S. 1051. D.

MEMORIAS
DE
MATHEMATICA
E PHISICA

S. 1051. D. 2.

MEMORIAS
DE
MATHEMATICA
E PHISICA
DA
ACADEMIA R. DAS SCIENCIAS
DE LISBOA.

Nisi utile est quod facimus, stulta est gloria.

TOMO II.

LISBOA
NA TYPOGRAFIA DA ACADEMIA,
1799.
Com licença de S. ALTEZA REAL.

MEMORIAS
DE
MATHEMATICA E PHISICA
DA
ACADEMIA REAL DAS SCIENCIAS
DE LISBOA.

DEMONSTRAÇAÕ

Do Theorema de Newton ſobre a relaçaõ que tem os coefficientes de qualquer equaçaõ algebrica com as ſommas das potencias das ſuas raizes, e applicaçaõ do meſmo Theorema ao deſenvolvimento em ſerie dos productos compoſtos de infinitos factores.

Por Francisco de Borja Garçaõ Stockler.

§. I.

Dada huma equaçaõ de qualquer gráo Lida em 17 de Dez. de 1789.

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + \ldots\ldots + N = 0$$

que

que se supponha ser produsida pela multiplicaçaõ de hum numero n de binomios simpleces $x + a$; $x + a'$; $x + a''$; $x + a'''$; $x + a^{IV}$; $x + a^{V}$; &c., e denotando por $\int a$ a somma de todas as quantidades a; a'; a''; a'''; &c. por $\int a^2$ a somma dos seus quadrados; por $\int a^3$ a somma dos seus cubos; e assim successivamente, de sorte que seja

$$\int a = a + a' + a'' + a''' + a^{IV} + a^{V} + \&c.$$
$$\int a^2 = a^2 + a'^2 + a''^2 + a'''^2 + a^{IV\,2} + a^{V\,2} + \&c.$$
$$\int a^3 = a^3 + a'^3 + a''^3 + a'''^3 + a^{IV\,3} + a^{V\,3} + \&c.$$
$$\int a^4 = a^4 + a'^4 + a''^4 + a'''^4 + a^{IV\,4} + a^{V\,4} + \&c.$$

- -

- -

$$\int a^n = a^n + a'^n + a''^n + a'''^n + a^{IV\,n} + a^{V\,n} + \&c.$$

afirma *Newton* em o Capitulo terceiro da segunda Parte da sua *Arithmetica Universal*, sem com tudo o demonstrar, que será sempre

$$\int a = A$$
$$\int a^2 = A\int a - 2B$$
$$\int a^3 = A\int a^2 - B\int a + 3C$$
$$\int a^4 = A\int a^3 - B\int a^2 + C\int a - 4D$$
$$\int a^5 = A\int a^4 - B\int a^3 + C\int a^2 - D\int a + 5E$$

- -

- -

$$\int a^n = A\int a^{n-1} - B\int a^{n-2} + C\int a^{n-3} - D\int a^{n-4} + E\int a^{n-5} - \ldots \pm nN.$$

§. II.

Para demonstrar este elegantissimo Theorema observaremos primeiramente, que pela natureza dos productos compostos

poſtos de factores binomios, como ſe acha demonſtrado em quasi todos os livros elementares de Algebra, A reprezenta a ſomma de todas as quantidades a; a'; a''; a'''; &c. B reprezenta a ſomma dos ſeus productos ſendo ellas entre ſi multiplicadas duas a duas; C a ſomma dos ſeus productos ſendo ellas entre ſi multiplicadas tres a tres; e aſſim ſucceſſivamente. Ora ſe dividirmos a Equaçaõ

$$\left(x + a\right)\left(x + a'\right)\left(x + a''\right)\left(x + a'''\right) \cdots \left(x + a^{\overline{n-1},}\right) = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \cdots + N$$

por x^n teremos

$$\left(1 + \frac{a}{x}\right)\left(1 + \frac{a'}{x}\right)\left(1 + \frac{a''}{x}\right)\left(1 + \frac{a'''}{x}\right) \cdots \left(1 + \frac{a^{\overline{n-1},}}{x}\right) = 1 + \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \cdots + \frac{N}{x^n}$$

e chamando Z a eſta expreſſaõ, e tomando o ſeu logarithmo hyperbolico ſerá

$$\text{Log. } Z = \text{Log. }\left(1 + \frac{a}{x}\right) + \text{Log. }\left(1 + \frac{a'}{x}\right) + \text{Log.}\left(1 + \frac{a''}{x}\right) + \&c.$$

ou deſenvolvendo cada hum deſtes logarithmos em ſerie

$$\text{Log. } Z = \begin{cases} \frac{a}{x} - \frac{a^2}{2x^2} + \frac{a^3}{3x^3} - \frac{a^4}{4x^4} + \frac{a^5}{5x^5} - \frac{a^6}{6x^6} + \cdots \&c. \\ \frac{a'}{x} - \frac{a'^2}{2x^2} + \frac{a'^3}{3x^3} - \frac{a'^4}{4x^4} + \frac{a'^5}{5x^5} - \frac{a'^6}{6x^6} + \cdots \&c. \\ \frac{a''}{x} - \frac{a''^2}{2x^2} + \frac{a''^3}{3x^3} - \frac{a''^4}{4x^4} + \frac{a''^5}{5x^5} - \frac{a''^6}{6x^6} + \cdots \&c. \\ \frac{a'''}{x} - \frac{a'''^2}{2x^2} + \frac{a'''^3}{3x^3} - \frac{a'''^4}{4x^4} + \frac{a'''^5}{5x^5} - \frac{a'''^6}{6x^6} + \cdots \&c. \\ \&c. \end{cases}$$

expreſſaõ que evidentemente ſe redus a

Log.

$$\text{Log. } Z = \frac{1}{x}\int a - \frac{1}{2x^2}\int a^2 + \frac{1}{3x^3}\int a^3 - \frac{1}{4x^4}\int a^4 + \frac{1}{5x^5}\int a^5 - \frac{1}{6x^6}\int a^6 + \cdots \&c.$$

mas he tambem

$$\text{Log. } Z = \text{Log.}\left(1 + \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x^4} + \frac{E}{x^5} + \frac{F}{x^6} + \cdots \&c.\right)$$

ou desenvolvendo em serie

$$\begin{array}{lllllll}
\text{Log. } Z = \frac{A}{x} & + \frac{B}{x^2} & + \frac{C}{x^3} & + \frac{D}{x^4} & + \frac{E}{x^5} & + \frac{F}{x^6} & + \&c. \\
 & - \frac{1}{2}\frac{A^2}{x^2} & - \frac{AB}{x^3} & - \frac{AC}{x^4} & - \frac{AD}{x^5} & - \frac{AE}{x^6} & - \&c. \\
 & & + \frac{1}{3}\frac{A^3}{x^3} & - \frac{1}{2}\frac{B^2}{x^4} & - \frac{BC}{x^5} & - \frac{BD}{x^6} & - \&c. \\
 & & & + \frac{A^2B}{x^4} & + \frac{A^2C}{x^5} & - \frac{1}{2}\frac{C^2}{x^6} & - \&c. \\
 & & & - \frac{1}{4}\frac{A^4}{x^4} & + \frac{AB^2}{x^5} & + \frac{A^2D}{x^6} & + \&c. \\
 & & & & - \frac{A^3B}{x^5} & + \frac{1}{3}\frac{2ABC}{x^6} & + \&c. \\
 & & & & + \frac{1}{5}\frac{A^5}{x^5} & + \frac{1}{3}\frac{B^3}{x^6} & + \&c. \\
 & & & & & - \frac{A^3C}{x^6} & + \&c. \\
 & & & & & - \frac{3}{2}\frac{A^2B^2}{x^6} & + \&c. \\
 & & & & & + \frac{A^4B}{x^6} & - \&c. \\
 & & & & & - \frac{1}{6}\frac{A^6}{x^6} & - \&c. \\
 & & & & & & - \&c.
\end{array}$$

e

e esta expressaõ deve ser identica com a precedente; logo tambem deve ser

$$\int a = A$$
$$\int a^2 = A^2 - 2B$$
$$\int a^3 = A^3 - 3AB + 3C$$
$$\int a^4 = A^4 - 4A^2B + 4AC + 2B^2 - 4D$$
$$\int a^5 = A^5 - 5A^3B + 5A^2C + 5AB^2 - 5AD - 5BC + 5E$$
&c.

§. III.

Substituindo na segunda destas equações $A\int a$ em lugar de A^2 ella se reduzirá a

$$\int a^2 = A\int a - 2B$$

e substituindo na terceira o valor de A^2 tirado da segunda, ella se reduzirá a $\int a^3 = A\int a^2 - AB + 3C$: e finalmente a

$$\int a^3 = A\int a^2 - B\int a + 3C$$

substituindo por A no penultimo termo do segundo membro o seu valor $\int a$ tirado da primeira

§. IV.

Substituindo na quarta o valor de A^3 tirado da terceira, ella se converterá em $\int a^4 = A\int a^3 - A^2B + AC + 2B^2 - 4D$: substituindo por A^2 o seu valor tirado da segunda ficará $\int a^4 = A\int a^3 - B\int a^2 + AC - 4D$: e finalmente substituindo no penultimo termo por A o seu valor $\int a$ tirado da primeira teremos

$$\int a^4 = A\int a^3 - B\int a^2 + C\int a - 4D$$

§ V.

Do mesmo modo substituindo na quinta equaçaõ primeiramente o valor de A^4 tirado da quarta : depois o valor de A^3 tirado da terceira : depois o valor de A^2 tirado da segunda : e finalmente no penultimo termo o valor de A tirado da primeira, ella se converterá em

$$\int a^5 = A\int a^4 - B\int a^3 + C\int a^2 - D\int a + 5E$$

e continuando assim successivamente a substituir em cada huma das equaçoens achadas no §. II. em lugar das potencias successivas de A os seus valores tirados das equaçoens precedentes, se iraõ achando todas as equaçoens

$$\int a = A$$
$$\int a^2 = A\int a - 2B$$
$$\int a^3 = A\int a^2 - B\int a + 3C$$
$$\int a^4 = A\int a^3 - B\int a^2 + C\int a - 4D$$
$$\int a^5 = A\int a^4 - B\int a^3 + C\int a^2 - D\int a + 5E$$
$$\int a^6 = A\int a^5 - B\int a^4 + C\int a^3 - D\int a^2 + E\int a - 6F$$

&c.

que constituem a serie de expressões indicada em o §. I. e cuja demonstraçaõ se pertendia.

§. VI.

He evidente, que a primeira serie infinita, que achamos exprimir o valor de Log. Z, ou (fallando com toda a exacçaõ geometrica) de cuja somma he Log. Z o limite de expressaõ, he a mesma quanto á forma, e successaõ dos seus termos,

termos, qualquer que ſeja o numero dos factores de Z, e por conſequencia, reprezentando por n o numero dos ditos factores, da comparaçaõ della com a ſegunda ſe podem deduzir as expreſsões naõ ſó de $\int a$ até $\int a^n$; mas tambem de todas as outras ſommas de potencias além deſta, e que por tanto o Theorema de *Newton* naõ tem limitaçaõ alguma.

§. VII.

Do que temos dito ſe ſegue, que reprezentando por X; X'; X''; X'''; &c. quaeſquer Funcções de x, as quaes conſtituaõ os termos ſucceſſivos de huma ſerie infinita de termos addicionados

$$X + X' + X'' + X''' + X^{\text{IV}} + X^{\text{V}} + \&c.$$

toda a ſerie infinita de termos multiplicados deſta forma

$$(1 + X)(1 + X')(1 + X'')(1 + X''')(1 + X^{\text{IV}})(1 + X^{\text{V}})\ \&c.$$

ſerá capaz de limite de expreſſaõ (*) todas as vezes que as ſommas das ſeries infinitas

$$(B)\quad \begin{array}{l} X + X' + X'' + X''' + X^{\text{IV}} + X^{\text{V}} + \&c. \\ X^2 + X'^2 + X''^2 + X'''^2 + X^{\text{IV}^2} + X^{\text{V}^2} + \&c. \\ X^3 + X'^3 + X''^3 + X'''^3 + X^{\text{IV}^3} + X^{\text{V}^3} + \&c. \\ X^4 + X'^4 + X''^4 + X'''^4 + X^{\text{IV}^4} + X^{\text{V}^4} + \&c. \\ \&c. \end{array}$$

forem capazes de hum tal limite; por quanto reprezentando

(*) Por limite de expreſſaõ de qualquer Funcçaõ variavel entendo a expreſſaõ, que reprezentaria o ſeu limite de grandeza, no caſo que a ſua raiz tiveſſe as condições neceſſarias para fazer a dita Funcçaõ capaz de limite, (Veja ſe a minha *Theorica dos Limites*). Mas como as ſommas das ſeries de termos addicionados podem variar já por cauſa ſómente da variaçaõ do numero dos ſeus termos, já por cauſa da variaçaõ de grandeza de cada hum delles, já por hum

do por $F'X$ o eſtado de grandeza do producto $(1+X)$ $(1+X')(1+X'')$ &c. quando o numero dos ſeus factores he n; reprezentando por A' a ſomma dos termos $X + X' + X'' + X''' + \ldots + X^{n-1}$: por B' a ſomma dos ſeus productos ſendo elles entre ſi multiplicados dois a dois: por C' a ſomma dos ſeus productos ſendo elles entre ſi multiplicados tres a tres, e aſſim ſucceſſivamente, ſerá

$$F'X = 1 + A' + B' + C' + D' + E' + F' + \ldots \text{ \&c.}$$

ſerie que variará em grandeza, e numero de termos todas as vezes que n variar; e que ſerá capaz de limite de expreſſaõ, quando as quantidades A'; B'; C'; D'; &c. forem capazes de hum tal limite. Ora que as quantidades A'; B'; C'; D' &c. ſaõ capazes de limite de expreſſaõ, todas as vezes que o ſaõ as ſommas das ſeries (B), he evidente; pois que repreſentando por $\int' X$ a ſomma da primeira das ditas ſeries; por $\int' X^2$ a ſomma da ſegunda; por $\int' X^3$ a ſomma da terceira, e aſſim ſucceſſivamente, e conſiderando cada huma dellas continuada até ao termo n, das Fórmulas do §. V. ſe deduz

$$A' = \int' X.$$

$$B' = -\frac{1}{2}\left(\int' X^2 - A'\int' X\right)$$

$$C' = \frac{1}{3}\left(\int' X^3 - A'\int' X^2 + B'\int' X\right)$$

D'

hum, e outro deſtes dois motivos juntamente: entaõ no primeiro caſo chamo limite de expreſſaõ da ſua ſomma aquella expreſſaõ, que reprezentaria o limite de grandeza da meſma ſomma, ſe a ſerie tiveſſe as condições neceſſarias para admitir hum tal limite; e nos outros dois chamo indiſtinctamente limite de expreſſaõ da ſomma da ſerie tanto á outra ſerie, que ſe obteria ſubſtituindo em lugar de cada hum dos termos da primeira o ſeu limite particular de expreſſaõ, como ao limite de expreſſaõ da ſomma dos termos deſta ſegunda ſerie.

$$D' = -\frac{1}{4}\left(\int' X^4 - A'\int' X^3 + B'\int' X^2 - C'\int' X\right)$$

$$E' = \frac{1}{5}\left(\int' X^5 - A'\int' X^4 + B'\int' X^3 - C'\int' X^2 + D'\int' X\right)$$

&c.

expressões em que naõ entraõ senaõ quantidades todas capazes de limite de expressaõ: logo reprezentando por FX o limite de expressaõ de $F'X$; por $\int X$ o limite de expressaõ de $\int' X$; por $\int X^2$ o limite de expressaõ de $\int' X^2$; e assim por diante; e reprezentando semelhantemente por A o limite de expressaõ de A', por B o limite de expressaõ de B'; por C o limite de expressaõ de C'; e assim successivamente será

$$A = \int X$$

$$B = -\frac{1}{2}\left(\int X^2 - A\int X\right)$$

$$C = \frac{1}{3}\left(\int X^3 - A\int X^2 + B\int X\right)$$

$$D = -\frac{1}{4}\left(\int X^4 - A\int X^3 + B\int X^2 - C\int X\right)$$

$$E = \frac{1}{5}\left(\int X^5 - A\int X^4 + B\int X^3 - C\int X^2 + D\int X\right)$$

&c.

e por tanto

$$1 + A + B + C + D + E + F + \&c.$$

ou o seu limite de expressaõ FX, será o limite de expressaõ da serie proposta de termos multiplicados

$$(1 + X)(1 + X')(1 + X'')(1 + X''')(1 + X^{IV})\ \&c.$$

 §. VIII.

§. VIII.

Aos productos assim compostos de hum numero ilimitado de factores chamaremos *Productos infinitos*, por nos accommodarmos ao modo commum de fallar de *Wallis*, e dos Geometras, que depois delle tem tratado das series infinitas de termos multiplicados; e assim tambem a operaçaõ de assinar, dado hum producto infinito qualquer, huma serie de termos addicionados, que seja o seu limite de expressaõ, chamaremos *converter*, ou *dezenvolver em serie o dito Producto*.

§. IX.

Exemplo I.

Supponhamos que se pertende converter em serie o Producto infinito

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6)\ \&c.$$

como neste caso he

$$\int' X = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + \&c.$$
$$\int' X^2 = x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10} + x^{12} + x^{14} + \&c.$$
$$\int' X^3 = x^3 + x^6 + x^9 + x^{12} + x^{15} + x^{18} + x^{21} + \&c.$$
$$\int' X^4 = x^4 + x^8 + x^{12} + x^{16} + x^{20} + x^{24} + x^{28} + \&c.$$
&c.

será

$$\int X = \frac{x}{1-x}$$

$\int X$

$$\int X^2 = \frac{x^2}{1 - x^2}$$

$$\int X^3 = \frac{x^3}{1 - x^3}$$

$$\int X^4 = \frac{x^4}{1 - x^4}$$

&c.

ſubſtituindo eſtes valores nas expreſsões de A; B; C; D; &c. acharemos

$$A = \frac{x}{1 - x}$$

$$B = \frac{Ax^2}{1 - x^2} = \frac{x^3}{(1 - x)(1 - x^2)}$$

$$C = \frac{Bx^3}{1 - x^3} = \frac{x^6}{(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)}$$

$$D = \frac{Cx^4}{1 - x^4} = \frac{x^{10}}{(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)(1 - x^4)}$$

$$E = \frac{Dx^5}{1 - x^5} = \frac{x^{15}}{(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)(1 - x^4)(1 - x^5)}$$

&c.

e por conſequencia o limite de expreſſaõ do producto proposto ſerá

$$1 + \frac{x}{1 - x} + \frac{x^3}{(1 - x)(1 - x^2)} + \frac{x^6}{(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)} + \&c.$$

ſerie cuja lei he facil de notar, e que por tanto ſe pode continuar quanto se quizer; pois que os expoentes de x em os numeradores dos ſeus termos ſaõ os numeros triangulares, e em os factores dos denominadores vaõ ſucceſſivamente creſcendo huma unidade.

§. X.

EXEMPLO II.

Se quizermos converter em ſerie o producto infinito

$$\left(1-x\right)\left(1-x^2\right)\left(1-x^3\right)\left(1-x^4\right)\left(1-x^5\right)\left(1-x^6\right) \text{ \&c.}$$

entaõ ſendo

$$\int' X = -(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + \text{\&c.})$$
$$\int' X^2 = x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10} + x^{12} + x^{14} + \text{\&c.}$$
$$\int' X^3 = -(x^3 + x^6 + x^9 + x^{12} + x^{15} + x^{18} + x^{21} + \text{\&c.})$$
$$\int' X^4 = x^4 + x^8 + x^{12} + x^{16} + x^{20} + x^{24} + x^{28} + \text{\&c.}$$

&c.

ſerá

$$\int X = \frac{-x}{1-x}$$
$$\int X^2 = \frac{x^2}{(1-x^2)}$$
$$\int X^3 = \frac{-x^3}{1-x^3}$$
$$\int X^4 = \frac{x^4}{1-x^4}$$

&c.

e por tanto

$$A = \frac{-x}{1-x}$$
$$B = \frac{-Ax^2}{1-x^2} = \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)}$$

$C =$

$$C = \frac{-Bx^3}{1-x^3} = \frac{-x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$

$$D = \frac{-Cx^4}{1-x^4} = \frac{x^{10}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$

$$E = \frac{-Dx^5}{1-x^5} = \frac{-x^{15}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)}$$

&c.

donde ſe conclue, que o limite de expreſſaõ do producto propoſto ſerá

$$1 - \frac{x}{1-x} + \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)} - \frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} + \&c.$$

ſerie que ſó difere da precedente na mudança de ſinal dos termos pares.

§. XI.

Do meſmo modo querendo converter em ſerie o producto infinito

$$(1+x)(1-x^2)(1+x^3)(1-x^4)(1+x^5)(1-x^6) \ \&c.$$

achariamos.

$$1 + \frac{x}{1+x} - \frac{x^3}{(1+x)(1-x^2)} - \frac{x^6}{(1+x)(1-x^2)(1+x^3)} + \&c.$$

ſerie em que a lei da formaçaõ dos termos he facil de conhecer, e em que os finaes ſe alternaõ de dois em dois termos. Igualmente achariamos.

$$1 - \frac{x}{1+x} - \frac{x^3}{(1+x)(1-x^2)} + \frac{x^6}{(1+x)(1-x^2)(1+x^3)} + \&c.$$

ſe quizeſſemos converter em ſerie o producto

$$(1-x)(1+x^2)(1-x^3)(1+x^4)(1-x^5)(1+x^6) \ \&c.$$

e he facil de ver que a ſerie, que rezulta deſta operaçaõ, ſó difere da precedente em mudarem de ſinal todos os termos pares.

§. XII.

He evidente, que por eſte modo ſe pode facilmente converter em ſerie qualquer outro producto infinito, que tenha as condiçóes mencionadas; aſſim como tambem que com igual facilidade ſe pode determinar o limite de expreſſaõ do ſeu logarithmo; pois ſe na expreſſaõ

$$(x+a)(x+a')(x+a'')(x+a''')(x+a^{\text{IV}})(x+a^{\text{V}}) \text{ \&c.}$$

do §. II. ſuppoſermos $x=1$, e $a=X$; $a'=X'$; $a''=X''$; $a'''=X'''$; &c. e ſe chamarmos FX ao limite de expreſſaõ de

$$(1+X)(1+X')(1+X'')(1+X''')(1+X^{\text{IV}}) \text{ \&c.}$$

ſerá

$$FX=1+A+B+C+D+E+F+G+ \text{\&c.}$$

e

$$\text{Log. } FX=\int X-\frac{1}{2}\int X^2+\frac{1}{3}\int X^3-\frac{1}{4}\int X^4+\frac{1}{5}\int X^5- \text{\&c.}$$

Com tudo ſendo os termos de huma, e outra deſtas ſeries expreſſados pelos limites de expreſſaõ das ſommas de outras ſeries he claro, que neſte eſtado ellas naõ ſeraõ ſempre ſeries ſimpleces; porém ainda quando naõ o forem, ſe poderáõ reduzir a que o ſejaõ com mais, ou menos facilidade, ſegundo a natureza, e fórma das expreſsóes $\int X$; $\int X^2$; $\int X^3$; &c.

§. XIII.

Para dar alguma idéa do noſſo modo de proceder neſte

te genero de transformações, ſupponhamos que ſe pertende converter em ſerie ſimples o producto infinito

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6)\ \&c.$$

Primeiramente o dezenvolveremos como praticamos em o §. IX. em a ſerie

$$1+\frac{x}{1-x}+\frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)}+\frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}+\ \&c.$$

e depois ſuppondo eſta igual a

$$1+A^{1\prime}x+A^{2\prime}x^2+A^{3\prime}x^3+A^{4\prime}x^4+A^{5\prime}x^5+\ldots\ldots\ldots+A^{n\prime}x^n+\ \&c.$$

teremos a ſeguinte Equação

$$\frac{x}{1-x}+\frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)}+\frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}+\ \&c.=$$

$$A^{1\prime}x+A^{2\prime}x^2+A^{3\prime}x^3+A^{4\prime}x^4+A^{5\prime}x^5+\ldots\ldots+A^{n\prime}x^n+\ \&c.$$

e multiplicando ambos os ſeus membros por $1-x$ teremos

$$x+\frac{x^3}{1-x^2}+\frac{x^6}{(1-x^2)(1-x^3)}+\frac{x^{10}}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}+\ \&c.$$

$$=A^{1\prime}x+A^{2\prime}x^2+A^{3\prime}x^3+A^{4\prime}x^4+A^{5\prime}x^5+\ldots\ldots+A^{n\prime}x^n+\ \&c.$$

$$-A^{1\prime}x^2-A^{2\prime}x^3-A^{3\prime}x^4-A^{4\prime}x^5-\ldots\ldots-A^{(n-1)\prime}x^n-\ \&c.$$

Donde ſe tira $A^{1\prime}=1$, e $A^{2\prime}=1$; pois que deve ſer $A^{1\prime}x=x$; e que o primeiro termo, que de neceſſidade deve rezultar do dezenvolvimento de $\frac{x^3}{1-x^3}$ em ſerie, he evidentemente x^3; o que moſtra ſer $A^{2\prime}-A^{1\prime}=0$, ou $A^{2\prime}=1$.

§. XIV.

Achados eſtes valores, e ſubſtituidos nos ſeus devidos lugares tiraremos de hum e outro membro os termos identicos,

ticos, e efcreveremos de novo a mefma equaçaõ, a qual por eftas operaçoens fica reduzida a

$$\frac{x^3}{1-x^2}+\frac{x^6}{(1-x^2)(1-x^3)}+\frac{x^{10}}{(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}+\&c.$$
$$=(A^{3\prime}-1)x^3+(A^{4\prime}-A^{3\prime})x^4+(A^{5\prime}-A^{4\prime})x^5+(A^{6\prime}-A^{5\prime})x^6$$
$$+\cdots\cdots\cdots+(A^{n\prime}-A^{(n-1)\prime})x^n+\&c.,$$

e multiplicando ambos os feus membros por $1-x^2$ teremos

$$x^3+\frac{x^6}{1-x^3}+\frac{x^{10}}{(1-x^3)(1-x^4)}+\frac{x^{15}}{(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)}+\&c.$$
$$=(A^{3\prime}-1)x^3+(A^{4\prime}-A^{3\prime})x^4+(A^{5\prime}-A^{4\prime})x^5+(A^{6\prime}-A^{5\prime})x^6$$
$$-(A^{3\prime}-1)x^5-(A^{4\prime}-A^{3\prime})x^6$$
$$+\cdots\cdots\cdots+(A^{n\prime}-A^{(n-1)\prime})x^n+\&c.$$
$$-\cdots\cdots\cdots-(A^{(n-1)\prime}-A^{(n-2)\prime})x^n-\&c.$$

Donde fe tira $A^{3\prime}-1=1$; ou $A^{3\prime}=2$; $A^{4\prime}-A^{3\prime}=0$, ou $A^{4\prime}=2$; $A^{5\prime}-A^{4\prime}-A^{3\prime}+1=0$; ou $A^{5\prime}=3$; levando a determinaçaõ dos coefficientes indeterminados até ao termo, em que x tem por expoente 5; por iffo que do dezenvolvimento da fracçaõ $\frac{x^6}{1-x^3}$ naõ pode rezultar termo em que o expoente de x feja menor que 6.

§. XV.

Subftituindo eftes valores no fegundo membro da Equaçaõ precedente, e tirando x^3 de hum e outro membro ella fe redus a

$$\frac{x^6}{1-x^3}+\frac{x^{10}}{(1-x^3)(1-x^4)}+\frac{x^{15}}{(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)}+\&c.$$
$$=$$

$$= (A^{6\prime} - 3)\,x^6 + (A^{7\prime} - A^{6\prime})\,x^7 + (A^{8\prime} - A^{7\prime})\,x^8 + (A^{9\prime} - A^{8\prime})\,x^9$$
$$- x^7 - (A^{6\prime} - 3)\,x^8 - (A^{7\prime} - A^{6\prime})\,x^9$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots + (A^{n\prime} - A^{(n-1)\prime})\,x^n + \&c.$$
$$- \ldots\ldots\ldots\ldots - (A^{(n-1)\prime} - A^{(n-2)\prime})\,x^n - \&c.$$

e multiplicando ambos os ſeus membros por $1 - x^3$ teremos

$$x^6 + \frac{x^{10}}{1-x^4} + \frac{x^{15}}{(1-x^4)(1-x^5)} + \frac{x^{21}}{(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)} + \&c.$$

$$= (A^{6\prime} - 3)\,x^6 + (A^{7\prime} - A^{6\prime})\,x^7 + (A^{8\prime} - A^{7\prime})\,x^8 + (A^{9\prime} - A^{8\prime})\,x^9$$
$$- x^7 - (A^{6\prime} - 3)\,x^8 - (A^{7\prime} - 3)\,x^9$$

$$+(A^{10\prime}-A^{9\prime})x^{10}+(A^{11\prime}-A^{10\prime})x^{11}+\ldots+(A^{n\prime}-A^{(n-1)\prime})\,x^n+\&c.$$
$$-(A^{8\prime}-A^{6\prime})x^{10}-(A^{9\prime}-A^{7\prime})x^{11}-\ldots-(A^{(n-2)\prime}-A^{(n-4)\prime})\,x^n-\&c.$$
$$+x^{10}+(A^{6\prime}-3)\,x^{11}+\ldots+(A^{(n-5)\prime}-A^{(n-6)\prime})\,x^n+\&c.$$

Donde ſe tira $A^{6\prime} - 3 = 1$; ou $A^{6\prime} = 4$; $A^{7\prime} - A^{6\prime} - 1 = 0$; ou $A^{7\prime} = 5$; $A^{8\prime} - A^{7\prime} - A^{6\prime} + 3 = 0$; ou $A^{8\prime} = 6$; $A^{9\prime} - A^{8\prime} - A^{7\prime} + 3 = 0$; ou $A^{9\prime} = 8$.

§. XVI.

Subſtituindo eſtes valores na Equaçaõ antecedente eſta ſe reduz a

$$\frac{x^{10}}{1-x^4} + \frac{x^{15}}{(1-x^4)(1-x^5)} + \frac{x^{21}}{(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)} + \&c.$$
$$= (A^{10\prime}-9)x^{10} + (A^{11\prime}-A^{10\prime})\,x^{11} + (A^{12\prime}-A^{11\prime})x^{12} + (A^{13\prime}-A^{12\prime})\,x^{13}$$
$$- 2\,x^{11} - (A^{10\prime}-7)\,x^{12} - (A^{11\prime}-9)\,x^{13}$$

$$+(A^{14,}-A^{13,})x^{14}+(A^{15,}-A^{14,})x^{15}+\ldots+(A^{n,}-A^{(n-1),})x^{n}+\&c.$$
$$-(A^{12,}-A^{10,})x^{14}-(A^{13,}-A^{11,})x^{15}-\ldots-(A^{(n-2),}-A^{(n-4),})x^{n}-\&c.$$
$$+2x^{14}+(A^{10,}-8)x^{15}+\ldots+(A^{(n-5),}-A^{(n-6),})x^{n}+\&c.$$

e multiplicando por $1-x^4$ teremos

$$x^{10}+\frac{x^{15}}{1-x^5}+\frac{x^{21}}{(1-x^5)(1-x^6)}+\&c.=(A^{10}-9)x^{10}$$
$$+(A^{11,}-A^{10,})x^{11}+(A^{12,}-A^{11,})x^{12}+(A^{13,}-A^{12,})x^{13}+(A^{14,}-A^{13,})x^{14}$$
$$-2x^{11}-(A^{10,}-7)x^{12}-(A^{11,}-9)x^{13}-(A^{12,}-11)x^{14}$$
$$+(A^{15,}-A^{14,})x^{15}+(A^{16,}-A^{15,})x^{16}+\ldots+(A^{n,}-A^{(n-1),})x^{n}+\&c.$$
$$-(A^{13,}-A^{10,})x^{15}-(A^{14,}-A^{11,})x^{16}-\ldots-(A^{(n-2),}-A^{(n-5),})x^{n}-\&c.$$
$$+(A^{10,}-6)x^{15}+(A^{11,}-7)x^{16}+\ldots+(A^{(n-5),}-A^{(n-8),})x^{n}+\&c.$$
$$-(A^{(n-9),}-A^{(n-10),})x^{n}-\&c.$$

Donde ſe conclue $A^{10,}-9=1$; ou $A^{10,}=10$, $A^{11,}-A^{10,}-2=0$; ou $A^{11,}=12$. $A^{12,}-A^{11,}-A^{10,}+7=0$; ou $A^{12,}=15$. $A^{13,}-A^{12,}-A^{11,}+9=0$; ou $A^{13,}=18$. e $A^{14,}-A^{13,}-A^{12,}+11=0$; ou $A^{14,}=22$.

§. XVII.

Substituindo estes valores na meſma Equaçaõ ella se reduz a

$$\frac{x^{15}}{1-x^5}+\frac{x^{21}}{(1-x^5)(1-x^6)}+\frac{x^{28}}{(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)}+\&c.=$$
$$(A^{15,}-26)x^{15}+(A^{16,}-A^{15,})x^{16}+\ldots+(A^{n,}-A^{(n-1),})x^{n}+\&c.$$
$$-5x^{16}-\ldots-(A^{(n-2),}-A^{(n-5),})x^{n}-\&c.$$
$$+(A^{(n-5),}-A^{(n-8),})x^{n}+\&c.$$
$$-(A^{(n-9),}-A^{(n-10),})x^{n}-\&c.$$

c

e multiplicando por $1-x^5$ ſe teria huma nova expreſſaõ; da qual ſe poderiaõ tirar os valores dos coefficientes $A^{15\prime}$; $A^{16\prime}$; $A^{17\prime}$; $A^{18\prime}$; $A^{19\prime}$; e $A^{20\prime}$: e ſemelhantemente todos os outros, que ſe quizeſſem, procedendo pelo meſmo modo, que até aqui temos praticado; ſendo porém a cada operaçaõ continuamente maior o numero dos coefficientes, que ſe poderaõ determinar; pois que cada huma dellas nos dá ſempre tantos coefficientes e mais hum, quantos saõ os que dá a operaçaõ precedente.

§. XVIII.

Naõ querendo porém paſſar além do coefficiente $A^{15\prime}$; todos os coefficientes $A^{10\prime}$; $A^{11\prime}$; $A^{12\prime}$; $A^{13\prime}$; $A^{14\prime}$; determinados em §. XVI; e o meſmo coefficiente $A^{15\prime}$ ſe poderiaõ determinar independentemente das operações alli praticadas, reflectindo em que os primeiros tres termos, que rezultariaõ do dezenvolvimento do primeiro membro da Equaçaõ expreſſada no dito §. ſaõ $x^{10}+x^{14}+x^{15}$; e que por conſequencia deve ſer $A^{10\prime}-9=1$; $A^{11\prime}-A^{10\prime}-2=0$; $A^{12\prime}-A^{11\prime}-A^{10\prime}+7=0$; $A^{13\prime}-A^{12\prime}-A^{11\prime}+9=0$; $A^{14\prime}-A^{13\prime}-A^{12\prime}+A^{10\prime}+2=1$; e $A^{15\prime}-A^{14\prime}-A^{13\prime}+A^{11\prime}+A^{10\prime}-8=1$; donde ſe tira igualmente $A^{10\prime}=10$; $A^{11\prime}=12$; $A^{12\prime}=15$; $A^{13\prime}=18$; $A^{14\prime}=22$; e além diſſo $A^{15\prime}=27$.

§. XIX.

Procedendo pois pelo modo indicado teremos, que o limite de expreſſaõ do producto infinito propoſto ſe converte em

$$1+x+x^2+2x^3+2x^4+3x^5+4x^6+5x^7+6x^8+8x^9$$
$$+10x^{10}+12x^{11}+15x^{12}+18x^{13}+22x^{14}+27x^{15}+\&c.$$

ſerie ſimples, cujos coefficientes reprezentaõ cada hum re-

 la-

lativamente ao termo, a que pertence, o differente numero de modos, porque o expoente de x nesse mesmo termo pode ser formado pela addiçaõ dos termos da serie dos numeros naturaes.

$$0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10;\ 11;\ 12;\ \&c.$$

Por exemplo o coefficiente 12 do termo $12x^{11}$ denota que o numero 11 se pode formar pela addiçaõ dos termos da serie dos numeros naturaes por 12 modos differentes; e com effeito he

$11 = 11 + 0$	$11 = 7 + 4$	$11 = 6 + 4 + 1$
$11 = 10 + 1$	$11 = 6 + 5$	$11 = 6 + 3 + 2$
$11 = 9 + 2$	$11 = 8 + 2 + 1$	$11 = 5 + 4 + 2$
$11 = 8 + 3$	$11 = 7 + 3 + 1$	$11 = 5 + 3 + 2 + 1$

pois sendo os numeros naturaes os expoentes de x em todos os factores do producto infinito, de que se trata, e devendo pela multiplicaçaõ effectiva delles rezultar esta mesma serie simples, he evidente que os coefficientes de cada termo denotaõ por quantos modos diversos o seu expoente pode rezultar da somma dos expoentes de x nos factores do producto; pois que em todos estes o segundo termo tem sinal additivo.

§. XX.

Tambem se poderia converter a serie

$$1 + \frac{x}{1-x} + \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)} + \frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} + \&c.$$

em serie simples contraindo primeiro os seus termos dois a dois; isto he, reduzindo-a primeiro á fórma

$$\frac{1}{1-x} + \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} + \frac{x^{10}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)} + \&c.$$

ou á forma

$$1+\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}+\frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}+\&c.$$

mas ainda que por efte modo o numero das operaçóes feria menor, e a cada huma dellas fe determinaria hum numero maior de coefficientes; com tudo cada huma dellas feria tambem mais complicada, e trabalhoza; pois que em vez de conftar o multiplicador fó de dois termos conftaria de quatro.

§. XXI.

Se quizeffemos converter em ferie fimples o producto infinito

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)\ \&c.$$

achariamos pelo methodo expofto, que o feu limite de expreffaõ

$$1+\frac{x}{1-x}+\frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)}+\frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}+\&c.$$

fe reduz a

$$1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-\&c.$$

ferie facil de continuar quanto fe quizer; pois que, como he facil denotar, ella fe pode feparar em duas

$$x^0-x^2+x^7-x^{15}+x^{26}-x^{40}+x^{57}-x^{77}+\&c.$$

e

$$-x+x^5-x^{12}+x^{22}-x^{35}+x^{51}-x^{70}+x^{92}-\&c.$$

ambas faceis de continuar; por quanto as differenças dos expoentes de x na primeira conftituem a progreffaõ arithmetica

$$2;5;8;11;14;17;20;23;26;29;\&c.$$

e as differenças dos expoentes de x na ſegunda conſtituem a progreſſaõ arithmetica

$$4, 7; 10; 13; 16; 19; 22; 25; 28; 31; \&c.$$

donde ſe vê que os expoentes de x na primeira ſerie conſtituem huma ſerie recurrente, cujo termo geral he $\frac{3n^2-5n+2}{2}$; e que os expoentes de x na ſegunda conſtituem outra ſerie recurrente, cujo termo geral he $\frac{3n^2-n}{2}$. Do meſmo modo ſe poderiaõ converter em ſeries ſimpleces os outros dois productos infinitos mencionados em o §. XI.

§. XXII.

O dezenvolvimento do producto infinito, que tomámos por primeiro exemplo, e a lei que entre ſi guardaõ os ſeus factores nos moſtraõ, que os diviſores ſimpleces do primeiro gráo da ſerie infinita

$$1 + x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 4x^6 + 5x^7 + 6x^8 + \&c.$$

ſaõ os meſmos que os de todas as Equações $x+1=0$; $x^2+1=0$; $x^3+1=0$; $x^4+1=0$; $x^5+1=0$; $x^6+1=0$; &c. donde ſe conclue, que reprezentando por p a ſemicircumferencia do circulo, cujo raio he 1, elles ſe poderaõ determinar ſubſtituindo na expreſſaõ

$$x - \text{Coſ.}\left(\frac{2k+1}{n}\right)p \mp \sqrt{-1}.\ \text{Sen.}\left(\frac{2k+1}{n}\right)p$$

todos os numeros inteiros poſitivos em lugar de n; e ſubſtituindo em lugar de k a cada valor de n todos os numeros inteiros poſitivos naõ maiores que $\frac{n-1}{2}$; por quanto todas as ditas Equações ſaõ da fórma $1+x^n=0$; e buſcando os factores trinomios d'eſta expreſſaõ ſe achará, que elles todos ſe contém na fórmula geral

1

$$1 - 2x \text{ Cof. } \left(\frac{2k+1}{n}\right) P + x^2$$

a qual igualada a cifra dá

$$x = \text{Cof. } \left(\frac{2k+1}{n}\right) P \pm \sqrt{-1}. \text{ Sen. } \left(\frac{2k+1}{n}\right) P$$

expreſſaõ da qual ſe deduzem por conſequencia todos os diviſores ſimpleces da ſerie expreſſada fazendo em lugar de n, e k as ſubſtitutiçóes ſobreditas.

§. XXIII.

Do meſmo modo ſe conclue pelo dezenvolvimento em ſerie do producto infinito, que tomámos por ſegundo exemplo, que os diviſores ſimpleces do primeiro gráo da ſerie infinita

$$1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} + \&c.$$

ſaõ os meſmos que os das Equaçóes $x - 1 = 0$; $x^2 - 1 = 0$; $x^3 - 1 = 0$; $x^4 - 1 = 0$; $x^5 - 1 = 0$; $x^6 - 1 = 0$; &c. n'uma palavra que elles ſaõ todos os que rezultaõ da igualaçaõ de todos os factores do meſmo producto a cifra; e porque todos elles ſaõ da fórma $1 - x^n = 0$ fica evidente pela razaõ expreſſada no §. antecedente, que os diviſores ſimpleces da referida ſerie ſe podem determinar ſubſtituindo na expreſſaõ

$$x - \text{Cof. } \frac{2k}{n} P \pm \sqrt{-1}. \text{ Sen. } \frac{2k}{n} P$$

em lugar de n todos os numeros inteiros poſitivos; e ſubſtituindo em lugar de k a cada valor de n todos os numeros inteiros poſitivos naõ maiores que $\frac{1}{2}n$.

§. XXIV.

Se quizermos deſde logo converter em ſerie ſimples

 qnal-

qualquer producto infinito, que tenha as condições mencionadas no §. VII. sem primeiro converter em serie composta, reduziremos primeiramente o segundo membro da Equação

$$\text{Log. } FX = \int X - \frac{1}{2}\int X^2 + \frac{1}{3}\int X^3 - \frac{1}{4}\int X^4 + \frac{1}{5}\int X^5 - \frac{1}{6}\int X^6 + \text{\&c.}$$

em serie simples, o que he sempre possivel ainda que as expressões de $\int X; \int X^2; \int X^3$; &c. se naõ possaõ obter; pois que sendo sempre dados os factores do producto saõ sempre dadas as series de cujas somas saõ $\int X; \int X^2; \int X^3$; &c. os limites de expressaõ; series que sempre se podem converter em series simpleces se no seu primitivo estado o naõ forem já; entaõ procedendo pelo methodo inverso das series d'esta expressaõ de Log. FX deduziremos

$$\begin{aligned} FX = 1 + \int X - \frac{1}{2}\int X^2 + \frac{1}{3}\int X^3 - \frac{1}{4}\int X^4 + \frac{1}{5}\int X^5 - \text{\&c.} \\ + \frac{1}{2}\int^2 X - \frac{1}{2}\int X \int X^2 + \frac{1}{3}\int X \int X^3 - \frac{1}{4}\int X \int X^4 + \text{\&c.} \\ + \frac{1}{6}\int^3 X + \frac{1}{8}\int^2 X^2 - \frac{1}{6}\int X^2 \int X^3 + \text{\&c.} \\ - \frac{1}{4}\int^2 X \int X^2 + \frac{1}{6}\int^2 X \int X^3 + \text{\&c.} \\ + \frac{1}{24}\int^4 X + \frac{1}{8}\int X \int^2 X^2 - \text{\&c.} \\ - \frac{1}{12}\int^3 X \int X^2 - \text{\&c.} \\ + \frac{1}{120}\int^5 X + \text{\&c.} \\ + \text{\&c.} \end{aligned}$$

tambem expressado em serie simples.

§. XXV.

§. XXV.

Porém este methodo, posto que mais amplo que o precedente, pois que naõ depende da condiçaõ de se conhecerem as expressões de $\int X; \int X^2; \int X^3$; &c. he nimiamente longo, e assaz laborioso todas as vezes que a lei, que seguem os termos da serie logarithmica, naõ he facil de notar; ou ainda quando, sendo facil de notar, os primeiros termos da serie, que d'esta se deduz pelo methodo inverso, naõ manifestaõ desde logo a lei, que devem seguir na sua succesaõ. O exemplo do §. IX. em que he dado o producto infinito

$$FX = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6) \text{ \&c.}$$

dá huma serie logarithmica simples, cuja lei he assaz patente; pois sendo

$$\text{Log.}\, FX = \text{Log.}\,(1+x) + \text{Log.}\,(1+x^2) + \text{Log.}\,(1+x^3) + \text{\&c.}$$

desenvolvendo todos estes logarithmos em series, ordenando em huma mesma columna todos os termos, em que as potencias de x forem as mesmas, e sommando acharemos

$$\text{Log.}\, FX = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{6}{5}x^5 + \frac{4}{6}x^6 + \frac{8}{7}x^7 + \text{\&c.}$$

serie cuja lei he com effeito facilima de notar, attendendo-se ao modo porque cada hum dos seus termos he formado pela addiçaõ dos termos semelhantes das series, que rezultaõ do desenvolvimento de Log. $(1+x)$; Log. $(1+x^2)$; Log. $(1+x^3)$; &c. pois por este modo se vê evidentemente

 que

que todos os coefficientes dos ſeus termos ſe podem determinar buſcando todos os diviſores do numero, que denota o lugar que cada hum d'elles occupa na meſma ſerie, e fazendo com cada hum dos meſmos diviſores huma fracçaõ, que tendo a unidade por numerador tenha cada hum d'elles por denominador; ſommando depois á parte todas as fracçóes, cujos denominadores forem pares, e tirando a ſegunda ſomma da primeira. Querendo por exemplo o coefficiente do ſexto termo, determinaremos todos os diviſores do numero 6, que ſaõ 1, 2, 3, e 6: com elles faremos quatro fracçóes $\frac{1}{1}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{6}$: ſommando a primeira, e a terceira teremos $\frac{4}{3}$; e ſommando a ſegunda, e a quarta teremos $\frac{4}{6}$; tirando finalmente eſta ſegunda ſomma da primeira teremos o reſto $\frac{4}{6}$, que ſerá o coefficiente de x^6. Do meſmo modo querendo o coefficiente do nono termo, buſcaremos os diviſores de 9, que ſaõ 1, 3, e 9, e faremos as fracçóes $\frac{1}{1}$; $\frac{1}{3}$; e $\frac{1}{9}$, as quaes tendo todas denominadores impares ſe juntaraõ em huma ſó ſomma $\frac{13}{9}$, que ſerá por conſequencia o coefficiente de x^9; e aſſim ſemelhantemente ſe poderáõ obter os coefficientes de todos os outros termos. Porém a paſſagem d'eſte logarithmo para o valor de FX dando

FX

$$
\begin{aligned}
FX = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{4}{3}x^3 + \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{6}{5}x^5 + \tfrac{4}{6}x^6 + \&c. \\
+ \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{4}{3}x^4 + \tfrac{1}{4}x^5 + \tfrac{6}{5}x^6 + \&c. \\
+ \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{8}x^4 + \tfrac{4}{6}x^5 + \tfrac{1}{8}x^6 + \&c. \\
+ \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{4}{6}x^5 + \tfrac{8}{9}x^6 + \&c. \\
+ \tfrac{1}{24}x^4 + \tfrac{1}{8}x^5 + \tfrac{1}{8}x^6 + \&c. \\
+ \tfrac{1}{12}x^5 + \tfrac{4}{6}x^6 + \&c. \\
+ \tfrac{1}{120}x^5 + \tfrac{1}{48}x^6 + \&c. \\
+ \tfrac{2}{9}x^6 + \&c. \\
+ \tfrac{1}{16}x^6 + \&c. \\
+ \tfrac{1}{48}x^6 + \&c. \\
+ \tfrac{1}{720}x^6 + \&c. \\
+ \&c.
\end{aligned}
$$

dá huma expreſſaõ aſſaz trabalhoza de calcular, e que naõ deixa deſcobrir taõ facilmente a lei dos coefficientes, como o methodo de que antecedentemente uzámos.

§. XXVI.

Poderia igualmente uzar-ſe para o meſmo effeito de buſcar duas expreſsões de $\frac{d\,\text{Log.}\,FX}{dx}$ huma determinada, e outra indeterminada, e pela comparaçaõ de ambas de-

 ter-

terminar a expressaõ de FX em serie simples. Por exemplo sendo como em o §. antecedente

$$FX = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6)\text{\&c.}$$

e suppondo

$$FX = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 + \text{\&c.}$$

será

$$\text{Log.}\, FX = \text{Log.}\,(1+x) + \text{Log.}\,(1+x^2) + \text{Log.}\,(1+x^3) + \text{\&c.}$$

$$= \text{Log.}\,(1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{\&c.})$$

e por consequencia

$$\frac{d\,\text{Log.}\,FX}{dx} = \frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1+x^2} + \frac{3x^2}{1+x^3} + \frac{4x^3}{1+x^4} + \frac{5x^4}{1+x^5} + \text{\&c.}$$

$$= \frac{A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + 5Ex^4 + 6Fx^5 + 7Gx^6 + \text{\&c.}}{1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6 + Gx^7 + \text{\&c.}}$$

Ora reduzindo em serie as fracções $\frac{1}{1+x}$; $\frac{2x}{1+x^2}$; $\frac{3x^2}{1+x^3}$; &c. se terá

$$\begin{array}{lllllllllll}
\frac{d\,\text{Log.}\,FX}{dx} = 1 & -\,x & +\,x^2 & -\,x^3 & +\,x^4 & -\,x^5 & +\,x^6 & -\,x^7 & +\,x^8 & -\,\text{\&c.} \\
 & +2x & * & -2x^3 & * & +2x^5 & * & -2x^7 & * & +\,\text{\&c.} \\
 & & +3x^2 & * & * & -3x^5 & * & * & +3x^8 & -\,\text{\&c.} \\
 & & & +4x^3 & * & * & * & -4x^7 & * & +\,\text{\&c.} \\
 & & & & +5x^4 & * & * & * & * & -\,\text{\&c.} \\
 & & & & & +6x^5 & * & * & * & -\,\text{\&c.} \\
 & & & & & & +7x^6 & * & * & -\,\text{\&c.} \\
 & & & & & & & +8x^7 & * & -\,\text{\&c.} \\
 & & & & & & & & +9x^8 & -\,\text{\&c.} \\
 & & & & & & & & & +\,\text{\&c.}
\end{array}$$

ou

$$\frac{d\,\text{Log.}\,FX}{dx} = 1 + x + 4x^2 + x^3 + 6x^4 + 4x^5 + 8x^6 + x^7 + \&c.$$

ſerie facil de continuar quanto ſe quizer ; pois que cada hum dos coefficientes dos ſeus termos ſe determina pelo modo indicado em o §. antecedente, iſto he, buſcando o numerador da fracçaõ, que pelo methodo alli expoſto ſe acharia para coefficiente de cada hum dos termos correſpondentes na ſerie alli expreſſada : mas ſendo

$$\frac{A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + 5Ex^4 + \&c.}{1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \&c.} = 1 + x$$
$$+ 4x^2 + x^3 + 6x^4 + 4x^5 + 8x^6 + \&c.$$

multiplicando ambos os membros deſta Equaçaõ pelo denominador do primeiro, ſerá

$$\begin{aligned}
&A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + 5Ex^4 + 6Fx^5 + \&c. \\
&= 1 + x + 4x^2 + x^3 + 6x^4 + 4x^5 + 8x^6 + \&c. \\
&\quad + Ax + Ax^2 + 4Ax^3 + Ax^4 + 6Ax^5 + 4Ax^6 + \&c. \\
&\quad + Bx^2 + Bx^3 + 4Bx^4 + Bx^5 + 6Bx^6 + \&c. \\
&\quad + Cx^3 + Cx^4 + 4Cx^5 + Cx^6 + \&c. \\
&\quad + Dx^4 + Dx^5 + 4Dx^6 + \&c. \\
&\quad + Ex^5 + Ex^6 + \&c. \\
&\quad + Fx^6 + \&c. \\
&\quad + \&c.
\end{aligned}$$

expreſſaõ igualmente facil de continuar; pois que os coefficientes numericos ſaõ os meſmos em cada linha de calculo, e as letras A; B; C; &c. que reprezentaõ os coefficientes indeterminados entraõ huma ſó em cada linha, e vaõ-ſe ſuccedendo ſegundo a ordem Alfabetica. Devendo pois eſta Equaçaõ ſer identica, a igualaçaõ dos termos, que em hum e outro membro multiplicaõ cada huma das differentes potencias de x, daraõ tantas Equações de condiçaõ quantas baſtem para determinar os coefficientes indeterminados A;

B; C; &c. que se acharaõ como acima: a saber, $A=1$; $B=1$; $C=2$; $D=2$; $E=3$; &c.

§. XXVII.

Para naõ terminar esta Memoria sem dar hum exemplo de desenvolvimento de hum producto infinito, de que rezulte immediatamente pelo nosso methodo huma serie simples, supponhamos

$$FX=(1+x)\left(1+\frac{1}{4}x\right)\left(1+\frac{1}{9}x\right)\left(1+\frac{1}{16}x\right)\left(1+\frac{1}{25}x\right) \&c.$$

será

$$\int X = x\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+\frac{1}{64}+\&c.\right)$$

$$\int' X^2 = x^2\left(1+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{16^2}+\frac{1}{25^2}+\frac{1}{36^2}+\frac{1}{49^2}+\frac{1}{64^2}+\&c.\right)$$

$$\int' X^3 = x^3\left(1+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{9^3}+\frac{1}{16^3}+\frac{1}{25^3}+\frac{1}{36^3}+\frac{1}{49^3}+\frac{1}{64^3}+\&c.\right)$$

$$\int' X^4 = x^4\left(1+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{9^4}+\frac{1}{16^4}+\frac{1}{25^4}+\frac{1}{36^4}+\frac{1}{49^4}+\frac{1}{64^4}+\&c.\right)$$

- -

- -

$$\int' X^n = x^n\left(1+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{9^n}+\frac{1}{16^n}+\frac{1}{25^n}+\frac{1}{36^n}+\frac{1}{49^n}+\frac{1}{64^n}+\&c.\right)$$

Donde, chamando p a semicircumferencia do circulo, cujo raio he 1, se deduz

$$\int X = \frac{p^2}{1.\,2.\,3}\,x$$

$$\int X^2 = \frac{2^2}{1.\,2.\,3.\,4.\,5}\cdot\frac{1}{3}\,p^4\,x^2$$

$\int X^3$

$$\int X^3 = \frac{2^4}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7} \cdot \frac{1}{3} p^6 x^3$$

$$\int X^4 = \frac{2^6}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6.\,7.\,8.\,9} \cdot \frac{3}{5} p^8 x^4$$

$$\int X^5 = \frac{2^8}{1.\,2.\,3.\,4.\,\ldots\,8.\,9.\,10.\,11} \cdot \frac{5}{3} p^{10} x^5$$

$$\int X^6 = \frac{2^{10}}{1.\,2.\,3.\,4.\,\ldots\,10.\,11.\,12.\,13} \cdot \frac{601}{105} p^{12} x^6$$

&c.

Ou servindo-nos dos numeros Bernoullianos, e reprezentando-os por $B^{1\prime}$; $B^{2\prime}$; $B^{3\prime}$; $B^{4\prime}$; $B^{5\prime}$; &c.

$$\int X = \frac{2\,B^{1\prime}}{1.\,2.} p^2 x$$

$$\int X^2 = \frac{2^3\,B^{2\prime}}{1.\,2.\,3.\,4} p^4 x^2$$

$$\int X^3 = \frac{2^5\,B^{3\prime}}{1.\,2.\,3.\,4.\,5.\,6} p^6 x^4$$

$$\int X^4 = \frac{2^7\,B^{4\prime}}{1.\,2.\,3.\,\ldots\,6.\,7.\,8} p^8 x^4$$

$$\int X^5 = \frac{2^9\,B^{5\prime}}{1.\,2.\,3.\,\ldots\,8.\,9.\,10.} p^{10} x^5$$

\- - - - - - - - - - -

\- - - - - - - - - - -

$$\int X^n = \frac{2^{2n-1}\,B^{n\prime}}{1.\,2.\,3.\,\ldots\,(2n-2)\,(2n-1)\,2n} p^{2n} x^n$$

&c.

serie cuja lei he assaz patente, e que se póde por consequencia continuar por tantos termos quantos forem os numeros Bernoullianos, que se tiverem calculado. A substitui-

çaõ d'eſtes valores nas expreſsões de A; B; C; D; &c. que indicamos em o §. VII., e que actualmente reprezentaremos por $A^{1\prime}$; $A^{2\prime}$; $A^{3\prime}$; $A^{4\prime}$; &c. nos dá

$$A^{1\prime} = \frac{p^2 x}{1.\ 2.\ 3}$$
$$A^{2\prime} = \frac{p^4 x^2}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}$$
$$A^{3\prime} = \frac{p^6 x^3}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7}$$
$$A^{4\prime} = \frac{p^8 x^4}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9}$$
$$A^{5\prime} = \frac{p^{10} x^5}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ 9.\ 10.\ 11}$$
&c.

ou em geral

$$A^{n\prime} = \frac{p^{2n} x^n}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ (2n-1).\ 2n.\ (2n+1)}$$

e por tanto nos moſtra ſer

$$FX = 1 + \frac{p^2 x}{1.\ 2.\ 3} + \frac{p^4 x^2}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5} + \frac{p^6 x^3}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7} + \&c.$$

§. XXVIII.

Comparando eſta expreſſaõ com as fórmulas exponenciaes bem conhecidas

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.\ 2} + \frac{z^3}{1.\ 2.\ 3} + \frac{z^4}{1.\ 2.\ 3.\ 4} + \&c.$$
$$e^{-z} = 1 - \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.\ 2} - \frac{z^3}{1.\ 2.\ 3} + \frac{z^4}{1.\ 2.\ 3.\ 4} - \&c.$$

em que e reprezenta o numero, cujo Logarithmo hyperbolico

co he 1, veremos que diminuindo a ſegunda da primeira, tomando metade da differença, e dividindo depois por z ſe tem

$$\frac{e^{z} - e^{-z}}{2z} = 1 + \frac{z^2}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4.5} + \frac{z^6}{1.2.3.4.5.6.7} + \&c.$$

expreſſaõ que ſerá a meſma que a do §. antecedente, todas as vezes que fizermos $z = px^{\frac{1}{2}}$, e que por conſequencia nos moſtra, que o limite de expreſſaõ do producto infinito, que alli conſiderámos, póde naõ ſó ſer repreſentado pela ſerie ſimples alli expreſſada; mas tambem por huma expreſſaõ de numero limitado de termos; pois que feitas as ſubſtituições mencionadas fica

$$FX = \frac{e^{px^{\frac{1}{2}}} - e^{-px^{\frac{1}{2}}}}{2px^{\frac{1}{2}}}$$

§. XXIX.

Das fórmulas

$$A^{n\prime} = \frac{p^{2n}x^n}{1.2.3\ldots\ldots 2n(2n+1)}$$

$$\int X^n = \frac{2^{2n-1}B^{n\prime}}{1.2.3\ldots\ldots(2n-1).2n} \cdot p^{2n}x^n$$

achadas em o §. antecedente ſe conclue, que o Theorema Newtoniano demonſtrado neſta Memoria póde tambem contribuir para ſe calcularem com facilidade os *Numeros Bernoullianos*; pois que ſubſtituindo na ſegunda deſtas Equações o valor de $p^{2n}x^n$ tirado da primeira ſe terá

$$B^{n\prime} = \frac{\int X^n}{(2n+1)2^{2n-1}A^{n\prime}}$$

e como pelo Theorema Newtoniano he

$$\int X^n = A^{1\prime} \int X^{n-1} - A^{2\prime} \int X^{n-2} + A^{3\prime} \int X^{n-3} - A^{4\prime} \int X^{n-4} + \ldots\ldots \pm n A^{n\prime}$$

expressaõ em que o final + do ultimo termo serve para o caso de ser n numero impar, e o final — para o caso de ser n numero par, he evidente que por meio destas tres fórmulas

$$A^{n\prime} = \frac{p^{2n}\, x^n}{1.\,2.\,3.\ldots\ldots 2n\,(2n+1)}$$

$$\int X^n = A^{1\prime} \int X^{n-1} - A^{2\prime} \int X^{n-2} + A^{3\prime} \int X^{n-3} - A^{4\prime} \int X^{n-4} + \ldots\ldots \pm n A^{n\prime}$$

$$B^{n\prime} = \frac{\int X^n}{(2n+1)\, 2^{2n-1} A^{n\prime}}$$

se podem com effeito calcular tantos dos numeros Bernoullianos quantos se quizer, substituindo em cada huma dellas em lugar de n todos os numeros inteiros positivos desde 1 até aquelle que se quizer.

§. XXX.

Todas as vezes que a serie $1 + A + B + C + D + E +$ &c. que reprezenta em geral o limite de expressaõ de hum producto infinito qualquer da fórma

$$(1+X)(1+X')(1+X'')(1+X''')(1+X^{\text{IV}}) \text{ \&c.}$$

como vimos em o §. XII. for tal, que a sua somma admita limite de expressaõ, o dito producto naõ só poderá converter-se

ter-ſe em ſerie ſimples; mas terá por limite de expreſſaõ o limite da ſomma da ſerie $1 + A + B + C +$ &c. o qual ſerá huma expreſſaõ algebrica, ou tranſcendente ſegundo a natureza d'eſta ſerie, como acabamos de ver em o exemplo do §. XXVII. O meſmo ſuccederá todas as vezes que a ſerie

$$\text{Log. } FX = \int X - \frac{1}{2}\int X^2 + \frac{1}{3}\int X^3 - \frac{1}{4}\int X^4 + \frac{1}{5}\int X^5 - \frac{1}{6}\int X^6 + \&c.$$

for capaz de limite de expreſſaõ; pois que he evidente que ſendo eſta ſerie o Logarithmo hyperbolico d'aquelle producto; e ſendo por exemplo v o limite de expreſſaõ da ſua ſomma ſerá

$$FX = e^v$$

Sendo e o numero cujo Logarithmo hyperbolico he 1.

ADVERTENCIA.

Pelo que dizemos nos §§. XXII., e XXIII. ſobre as ſubſtituições de valores numericos em lugar de k naõ ſe deve entender, que excluimos a ſubſtituiçaõ de o; antes pelo contrario eſta he ſempre aquella pela qual ſe deve começar. E quando nas Fórmulas dos ditos §§. tivermos feito as mencionadas ſubſtituições deveremos ſempre trocar o lugar dos termos paſſando x para ſegundo, e a expreſſaõ em que naõ entra x para primeiro; havendo além diſſo tambem a cautella de trocar-lhe os ſinaes quando a fórmula for a do §. XXIII.

ADITAMENTO.

§. I.

Quando naõ occorrer nenhuma das circunſtancias ſobreditas, e com tudo for conveniente ter por aproximaçaõ o limite da ſómma dos termos da ſerie, que rezulta do deſenvolvimento do producto

$$(1+X)(1+X')(1+X'')(1+X''')(1+X^{IV})\ \&c.$$

iſto ſe poderá conſeguir pelos methodos ſabidos para a transformaçaõ das ſeries em outras mais convergentes; porém por naõ repetir o que em muitos livros ſe acha eſcrito, proporei ſómente hum Methodo aſſaz ſimples de ſubſtituir a qualquer ſerie convergente huma Funcçaõ algebrica, de cujo deſenvolvimento rezulte huma ſerie recurrente proximamente igual a ella, e meſmo taõ proximamente quanto ſe quizer; e que por tanto poderá algumas vezes ter util applicaçaõ, naõ ſó neſte genero de queſtões, mas ainda meſmo em outras quaeſquer, em que ſe precize ſommar ſeries por aproximaçaõ.

§. II.

Seja $1 + a' x + a'' x^2 + a''' x^3 + a^{IV} x^4 + a^V x^5 + a^{VI} x^6 + a^{VII} x^7 + \&c.$ huma ſerie qualquer convergente, e repreſente Fx o limite da ſomma dos ſeus termos, cuja expreſſaõ ſe ignora, e cujo valor aproximado ſe pertende: ſupponhamos

$$Fx, \text{ ou } \frac{1 + A^{I\prime} x + A^{2\prime} x^2 + A^{3\prime} x^3 + A^{4\prime} x^4 + \cdots + A^{m\prime} x^m}{1 + Bx}$$

$$= 1 + a' x + a'' x^2 + a''' x^3 + a^{IV} x^4 + a^V x^5 + \&c.$$

mul-

multiplicando ambos os membros d'esta Equaçaõ por $1 + Bx$ será

$$1 + A^{1\prime} x + A^{2\prime} x^2 + A^{3\prime} x^3 + A^{4\prime} x^4 + \cdots + A^{m\prime} x^m =$$

$$1 + \left(a' + B\right)x + \left(a'' + B a'\right)x^2 + \left(a''' + B a''\right)x^3 + \left(a^{\text{IV}} + B a'''\right)x^4 + \&c.$$

mas sendo a serie proposta huma serie convergente, tambem a que constitue o segundo membro d'esta Equaçaõ será convergente, e por tanto tomando os seus primeiros $m + 2$ termos teremos, que será proximamente

$$1 + A^{1\prime} x + A^{2\prime} x^2 + A^{3\prime} x^3 + A^{4\prime} x^4 + \cdots + A^{m\prime} x^m =$$

$$1 + \left(a' + B\right) x + \left(a'' + B a'\right)x^2 + \cdots + \left(a^{(m+1)\prime} + B a^{m\prime}\right) x^{m+1}$$

Equaçaõ que igualada termo por termo nos dá as seguintes $m + 1$ Equações de condiçaõ

$$A^{1\prime} = a' + B; \quad A^{2\prime} = a'' + B a'; \quad A^{3\prime} = a''' + B a''$$

$$A^{m\prime} = a^{m\prime} + B a^{(m-1)\prime}; \quad 0 = a^{(m+1)\prime} + B a^{m\prime}$$

da ultima das quaes se tira $B = -\dfrac{a^{(m+1)\prime}}{a^{m\prime}}$; valor que substituido nas outras as converte em

$$A^{1\prime} = \frac{a' a^{m\prime} - a^{(m+1)\prime}}{a^{m\prime}}; \quad A^{2\prime} = \frac{a'' a^{m\prime} - a' a^{(m+1)\prime}}{a^{m\prime}};$$

$$A^{3\prime} = \frac{a''' a^{m\prime} - a'' a^{(m+1)\prime}}{a^{m\prime}}; \ldots A^{m\prime} = \frac{a^{m\prime} a^{m\prime} - a^{(m-1)\prime} a^{(m+1)\prime}}{a^{m\prime}}$$

e por consequencia substituindo estes valores na Equaçaõ primitiva teremos, que será proximamente

$$Fx = \frac{a^{m\prime} + \left(a' a^{m\prime} - a^{(m+1)\prime}\right)x + \left(a'' a^{m\prime} - a' a^{(m+1)\prime}\right)x^2 + \ldots + \left(a^{m\prime} a^{m\prime} - a^{(m-1)\prime} a^{(m+1)\prime}\right)x^m}{a^{m\prime} - a^{(m+1)\prime} x}$$

§. III.

Dividindo o numerador d'esta fracçaõ pelo seu denominador até se ter no quociente hum numero $m + 2$ de termos acharemos

$$1 + a' x + a'' x^2 + a''' x^3 + \ldots + a^{m\prime} x^m + a^{(m+1)\prime} x^{m+1} + \frac{a^{(m+1)\prime} a^{(m+1)\prime} x^{m+2}}{a^{m\prime} - a^{(m+1)\prime} x}$$

expressaõ identica até ao termo $m + 2$ com a serie proposta, e que nos mostra que depois de sommarmos hum numero qualquer $m + 2$ de termos da dita serie o valor aproximado de todos os outros será $\frac{a^{(m+1)\prime} a^{(m+1)\prime} x^{m+2}}{a^{m\prime} - a^{(m+1)\prime} x}$; donde se conclue, que o methodo indicado se reduz a suppor, que os termos da serie proposta subsequentes ao termo m constituem huma Progressaõ Geometrica, e que por tanto o limite da somma de todas as series, em que a razaõ dos seus termos immediatos depois de algum determinado numero d'elles se for continua, e rapidamente aproximando á igualdade, se poderá obter muito proximamente por meio da fórmula antecedente.

§. IV.

Neste caso está a serie

$$1 + \frac{x}{n u^n} - \frac{(n-1) x^2}{2 n^2 u^{2n}} + \frac{(n-1)(2n-1) x^3}{2.3.4.n^4 u^{4n}} - \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1) x^4}{2.3.4.n^4 u^{4n}} + \&c.$$

a qual tem por limite $\frac{\sqrt[n]{u^n + x}}{u}$; pois que sendo qualquer

dos

dos ſeus termos, a que na ordem numerica chamo k, para o ſeu immediato $k+1$ como $1 : \left(\frac{1-(k-1)n}{kn}\right)\frac{x}{u^n}$, e o termo $k+1$ para o ſeu immediato $k+2$ como $1 : \left(\frac{(1-kn)}{(k+1)n}\right)\frac{x}{u^n}$, he claro, que eſtas duas razões ſeraõ tanto mais proximas á igualdade, quanto maior for o numero k; pois que ſuppondo k ſem limite em augmento ſe acha, que o limite da razaõ, que ellas entre ſi tem, he a razaõ de igualdade; e por tanto a lei da ſucceſſaõ dos termos d'eſta ſerie ſe avezinha continuamente á lei da ſucceſſaõ dos termos de huma progreſſaõ geometrica: donde podemos concluir, que o noſſo methodo ſerá muito conveniente para determinar por aproximaçaõ as raizes irracionaes de qualquer gráo que ſejaõ.

§. V.

Supponhamos pois que ſe pertenda o valor aproximado de $\sqrt[n]{u^n+x}$; ſerá $\frac{\sqrt[n]{u^n+x}}{u} = 1 + \frac{x}{n u^n} - \frac{(n-1)x^2}{2n^2 u^{2n}} +$
$\frac{(n-1)(2n-1)x^3}{2.3.n^3 u^{3n}} - \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)x^4}{2.3.4.n^4 u^{4n}} + \&c.$;
e por tanto $a' = \frac{1}{n u^n}$; $a'' = \frac{(n-1)}{2n^2 u^{2n}}$; $a''' = \frac{(n-1)(2n-1)}{2.3 n^3 u^{3n}}$;
ou em geral $a^{m\prime} = \frac{(n-1)(2n-1)\ldots((m-1)n-1)}{2.3\ldots m n^m u^{mn}}$ ſegundo m for numero impar, ou numero par; e por tanto ſubſtituindo eſtes valores na fórmula que termina o §. II. teremos a expreſſaõ geral do valor aproximado de $\frac{\sqrt[n]{u^n+x}}{u}$, d'aqual, ſubſtituindo por m differentes valores, poderemos tirar tantas fórmulas particulares para calcular $\frac{\sqrt[n]{u^n+x}}{u}$ por

aproximaçaõ quantas nos quizermos; mas por evitar huma fórmula complicada começaremos por determinar as fórmulas particulares antes da geral. Supponhamos primeiramente $m = 1$ ferá

$$\frac{\sqrt[n]{u^n + x}}{u} = \frac{a' + (a'a' - a'')x}{a' - a''x}$$

ou $\frac{\sqrt[n]{u^n + x}}{u} = 1 + \frac{a'a'x}{a' - a''x}$; e por tanto, fubftituindo por a', e a'' os feus valores, ferá $\frac{\sqrt[n]{u^n + x}}{u} = 1 + \frac{x}{nu^n + \frac{n-1}{2}x}$;

e multiplicando por u

$$\sqrt[n]{u^n + x} = u + \frac{ux}{nu^n + \frac{n-1}{2}x}$$

expreffaõ que, fendo a menos exacta de todas as que podemos affinar pelo noffo methodo, fe pode com tudo reputar taõ vantajoza como as celebres fórmulas de *Halley* incertas nas Tranfacções Filofoficas da Sociedade Real de Londres do anno de 1694; porque tendo a fuperioridade de fer racional, e applicavel a todos os gráos, dá huma aproximaçaõ quafi igualmente exacta, e muito mais facil de calcular.

§. VI.

Se fupozermos $m = 2$ a noffa fórmula ferá

$$\frac{\sqrt[n]{u^n + x}}{u} = \frac{a'' + (a'a'' - a''')x + (a''a'' - a'a''')x^2}{a'' - a'''x}$$

ou $\frac{\sqrt[n]{u^n + x}}{u} = 1 + a'x + \frac{a''a''x^2}{a'' - a'''x}$; e por tanto fubftituindo por a'; a''; e a''' os feus valores ferá

$$\frac{\sqrt[n]{u^n+x}}{u} = 1 + \frac{x}{n\,u^n} - \frac{\frac{n-1}{2}\,x^2}{n^2\,u^{2\,n} + n\left(\frac{2\,n-1}{3}\right)u^n\,x}$$

e multiplicando por u

$$\sqrt[n]{u^n+x} = u + \frac{x}{n\,u^{n-1}} - \frac{\frac{n-1}{2}\,x^2}{n^2\,u^{2\,n-1} + n\left(\frac{2\,n-1}{3}\right)u^{n-1}\,x}$$

expreſſaõ muito mais exacta que a precedente, e tambem mais exacta que as de *Halley* em todos os caſos, em que x he poſitivo.

§. VII.

Do meſmo modo ſuppondo $m = 3$ ſerá a noſſa fórmula

$$\frac{\sqrt[n]{u^n+x}}{u} = \frac{a''' + (a'a''' - a^{IV})\,x + (a''a''' - a'a^{IV})x^2 + (a'''a''' - a''a^{IV})x^3}{a''' - a^{IV}\,x}$$

ou $\dfrac{\sqrt[n]{u^n+x}}{u} = 1 + a'\,x + a''\,x^2 + \dfrac{a'''\,a'''\,x^3}{a''' - a^{IV}x}$; e por conſequencia ſubſtituindo por a'; a''; a'''; e a^{IV} os ſeus valores ſerá

$$\frac{\sqrt[n]{u^n+x}}{u} = 1 + \frac{x}{n\,u^n} - \frac{(n-1)x^2}{2\,n^2\,u^{2\,n}} - \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{2\,n-1}{3}\right)x^3}{n^3\,u^{3\,n} + n^2u^{2\,n}\left(\frac{3\,n-1}{4}\right)x}$$

e multiplicando por u

$$\sqrt[n]{u^n+x} = u + \frac{x}{n\,u^{n-1}} - \frac{(n-1)\,x^2}{2\,n^2u^{2\,n-1}} + \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{2\,n-1}{3}\right)x}{n^3u^{3\,n-1} + n^2\left(\frac{3\,n-1}{4}\right)u^{2n-1}x}$$

valor ainda mais exacto que o precedente.

§. VIII.

Procedendo do mesmo modo se achariaõ as aproximações relativas a todos os outros valores particulares de m; porém sem passar mais adiante já fica evidente, que chamando S a somma dos primeiros m termos da serie rezultante do desenvolvimento de $\sqrt[n]{u^n+x}$ será geralmente falando

$$\sqrt[n]{u^n+x}=S\pm\frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{2n-1}{3}\right)\cdots\cdots\left(\frac{(m-1)n-1}{m}\right)x^m}{n^m u^{nm-1}+n^{m-1}\left(\frac{nm-1}{m+1}\right)u^{(m-1)n-1}x}$$

servindo o sinal + do segundo termo quando m for numero impar > 1, e o sinal — quando m for numero par, ou 1.

§. IX.

Se em vez de applicarmos o nosso methodo a fórmula

$$\frac{\sqrt[n]{u^n+x}}{u}=1+\frac{x}{nu^n}-\frac{(n-1)x^2}{2n^2u^{2n}}+\frac{(n-1)(2n-1)x^3}{2.3.n^3u^{3n}}$$
$$-\frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)x^4}{2.3.4.n^4u^{4n}}+\&c.$$

o applicarmos a fórmula

$$\frac{\sqrt[n]{u^n+x}}{u}=1+\frac{x}{n(u^n+x)}+\frac{(n+1)x^2}{2n^2(u^n+x)^2}+\frac{(n+1)(2n+1)x^3}{2.3.n^3(u^n+x)^3}$$
$$+\frac{(n+1)(2n+1)(3n+1)x^4}{2.3.4.n^4(u^n+x)^4}+\&c.$$

entaõ suppondo na fórmula do §. II. $m=1$, e multiplican-

cando por u acharemos

$$\sqrt[n]{u^n + x} = u + \frac{u\,x}{n\left(u^n + x\right) - \left(\frac{n+1}{2}\right) x}$$

Expreſſaõ que fazendo as multiplicaçóes indicadas ſe reduz a

$$\sqrt[n]{u^n + x} = u + \frac{u\,x}{n\,u^n + \left(\frac{n-1}{2}\right) x}$$

que he a meſma que achamos no §. V.

§. X.

Suppondo $m = 2$, e fazendo a multiplicaçaõ por u acharemos

$$\sqrt[n]{u^n + x} = u + \frac{u\,x}{n\,(u^n + x)} + \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right) u\,x^2}{n^2(u^n + x)^2 - n\left(\frac{2\,n+1}{3}\right)(u^n + x)\,x}$$

Formula mais exacta que a precedente, e tambem mais exacta que as de *Halley* em todos os caſos, em que x he negativo; e que por tanto combinada com a do §. VI. nos poem em eſtado de podermos ſempre obter aproximaçóes mais exactas, e com mais facilidade, do que pelas fórmulas do Geometra Inglez.

§. XI.

Se ſupozermos $m = 3$ acharemos

$$\sqrt[n]{u^n + x} = u + \frac{u\,x}{n(u^n + x)} + \frac{(n+1)u\,x^2}{2\,n^2(u^n + x)^2} + \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{2\,n+1}{3}\right) u\,x^3}{n^3(u^n + x)^3 - n^2\left(\frac{3\,n+1}{4}\right)(u^n + x)^2\,x}$$

e em geral ſe reprezentarmos por S a ſomma dos primeiros m termos da ſerie

$$u + \frac{ux}{n(u^n+x)} + \frac{(n+1)ux^2}{2n^2(u^n+x)^2} + \frac{(n+1)(2n+1)ux^3}{2.3.n^3(u^n+x)^3} + \&c.$$

acharemos

$$\sqrt[n]{u^n+x} = S + \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\frac{2n+1}{3}\right)\cdots\cdots\left(\frac{(m-1)n+1}{m}\right)ux^m}{n^m(u^n+x)^m - n^{m-1}\left(\frac{mn+1}{m+1}\right)(u^n+x)^{m-1}x}$$

§. XII.

Por meio deſta fórmula, e da outra que achamos no §. VII. ſe póde levar a aproximaçaõ das raizes a qualquer gráo de exacçaõ, que ſe pertender; mas ainda meſmo ſervindo-nos ſó da primeira fórmula particular

$$\sqrt[n]{u^n+x} = u + \frac{ux}{nu^n + \left(\frac{n-1}{2}\right)x}$$

ſe póde conſeguir eſta vantagem repetindo o calculo; iſto he, chamaudo u' ao valor achado por eſta primeira aproximaçaõ, fazendo $u^n + x - u'^n = x'$; e calculando eſta nova expreſſaõ

$$\sqrt[n]{u'^n + x'} = u' + \frac{u'x'}{nu'^n + \left(\frac{n-1}{2}\right)x'}$$

e ſe ainda eſta aproximaçaõ ſe naõ julgar baſtante, ſe pode repetir outra ſemelhante operaçaõ, chamando u'' a eſte novo valor achado; fazendo $u'^n + x' - u''^n = x''$, e calculando eſta expreſſaõ

$\sqrt[n]{\ }$

$$\sqrt[n]{u''^{n}+x''} = u''+\frac{u''\,x''}{n\,u''^{n}+\left(\frac{n-1}{2}\right)x''}$$

e aſſim ſucceſſivamente

§. XIII.

Se pelo decurſo d'eſtas operações ſe chegar a alguma expreſſaõ, em que o ſegundo termo do denominador ſeja huma quantidade muito pequena, o Calculo ſe abreviará, e ſimplificará conſideravelmente omittindo-o: por exemplo, ſe logo na ſegunda operaçaõ acharmos, que a quantidade $\frac{n-1}{2}x'$ he muito pequena, poderemos omittilla, e por eſte modo reduziremos o ſegundo membro da expreſſaõ

$$\sqrt[n]{u'^{n}+x'} = u'+\frac{u'\,x'}{n\,u'^{n}+\left(\frac{n-1}{2}\right)x'}$$

a $u'+\frac{x'}{n\,u'^{\,n-1}}$; quantidade muito mais facil de calcular; pois que u' he o valor achado pela primeira approximaçaõ, e a quantidade $\frac{x'}{n\,u'^{\,n-1}}$, que ſe lhe deve accreſcentar, ou tirar, ſegundo x' for poſitivo, ou negativo, facilmente ſe calcula por meio dos Logarithmos. Querendo continuar a approximaçaõ chamar-ſe-ha u'' ao valor ultimamente achado, e fazendo $u'^{n}+x'-u''^{n}=x''$ lhe accreſcentaremos ou tiraremos a quantidade $\frac{x''}{n\,u''^{\,n-1}}$ ſegundo x'' for poſitivo, ou negativo, e aſſim continuaremos ſucceſſivamente até ſe ter obtido a approximaçaõ, que ſe pertender. Eſta meſma repetiçaõ de

calculos ſe pode praticar com qualquer das outras fórmulas mais exactas, de que fizemos mençaõ em os §. §. VI., e VII.; e por meio d'ellas ſe obterá a approximaçaõ pertendida, ſem que o Calculo ſe repita tantas vezes.

§. XIV.

He claro, que ſe em vez de termos ſuppoſto

$$FX = \frac{1 + A^{1\prime}x + A^{2\prime}x^2 + A^{3\prime}x^3 + \cdots + A^{m\prime}x^m}{1 + Bx}$$

tiveſſemos ſuppoſto FX igual á outra qualquer Funcçaõ racional, em cujo denominador entraſſem mais de hum coefficiente indeterminado, teriamos achado outras expreſſões para o valor approximado do limite da ſomma dos termos da ſerie, de que ſe trataſſe, ainda mais exactas em quaſi todos os caſos, e que nos dariaõ occaſiaõ a novas reflexões, e nos manifeſtariaõ meios faceis de ſommar por approximaçaõ outras ſeries, além das que ſervem para a determinaçaõ das raizes irracionaes; mas eſte trabalho além de naõ ſer difficil depois dos paſſos, que até aqui temos dado, nos obrigaria a ſer demaſiadamente extenſos.

ME-

MEMORIA

Sobre huma eſpecie de petrificaçaõ animal.

Pelo P. Joaõ de Loureiro.

Flumen habent Cicones, quod potum ſaxea reddit
Viſcera, quod tactis inducit marmora rebus.
Ovidio nas Metamorfoſes. l. XV. v. 313.

NAõ he tudo fabuloſo, o que ſe acha eſcrito nos Poetas; mas como a ſua arte lhes dá privilegio para fingir, e dizer o que naõ he, preciſamos de muita cautela, e muita critica, antes de dar crédito ás noticias, que nos communicaõ: muito mais quando eſtas trataõ de materias extraordinarias. O Poeta Ovidio na elegante obra das Transformações, em que ſe apurou em deſcrever com aſſaz naturalidade as meſmas couzas, que naõ ſaõ conformes á natureza, nos dá huma noticia, que poſto que exotica, bem pode ſer natural. Diz elle, que no Paiz dos Cicones (povos da Thracia, hoje pertencentes á Turquia) corre hum rio, que transforma em pedra os animaes, que allí bebem, e outras couzas, que tocaõ nas ſuas agoas. Plinio o Naturaliſta nos confirma em parte eſta noticia, naõ ſó do rio dos Cicones, mas de outros varios, em cujas agoas diz, que os páos, ramos, e folhas de arvores ſe convertem em pedra. E ainda que Plinio o naõ affirma de viventes ſenſitivos, eu o tenho viſto, e experimentado d'eſtes (aſſim como o refere Ovidio) em hum rio de Cochinchina, onde naõ todos os animaes, mas ſim varias eſpecies de Caranguejos, que bebem, e ſe banhaõ nas ſuas agoas, ficaõ inteiramente transformados em pedra dura.

Plin. l. II. c. 103.

Os Gabinetes dos curioſos, e amantes da Sciencia Natural ſe achaõ hoje providos d'eſtas maravilhas, ou raridades,

que

que por taes se fazem estimaveis; mas que já se naõ pode duvidar, que saõ effeitos da Natureza. No que toca ao Reino Vegetal, se vem allí troncos, ramos, folhas, espigas de flores, e fructos de diversas arvores, principalmente de diversos Filices inteiros, e outros generos pertencentes á Cryptogamia: dando a todos estes o nome generico de *Phytolithos*. No que pertence ao Reino Animal, se vem nos mesmos Muséos muitos petrificados de insectos, de vermes, de peixes, de amphibios, de aves, de animaes quadrupedes, e ainda de homens. D'estes, que saõ os mais maravilhosos, se achaõ alguns citados por Linneo na terceira parte do

Lin. Syst. nat. p. III. p. 130.

Systema Naturae, e entre elles hum descripto por Scheuchzero com o titulo, de *Homem testemunha do diluvio*. E nesta materia ainda he mais admiravel, o que refere Hel-

Helm. *Tract. de Lithcasi.* c. I.

moncio de huma horda, ou tribu inteiro de Tartaros vagabundos Baskires, sogeitos agora ao Imperio Russiano, que no anno de 1320, diz, fôra transformada inteiramente em pedra, com todo o seu gado, carros, e alfayas, de que ainda permanecem naquelle sitio as estatuas de marmore mais naturaes, e mais conformes ao seu prototypo, que jámais deu á luz Esculptor algum.

Porém eu duvido muito de taõ memoravel successo, naõ porque o tenha por impossivel; pois os mesmos agentes naturaes, que tem força para petrificar hum vivente, a tem da mesma sorte para muitos, em quem achem as mesmas disposições: mas como se pode crer, que se ache huma tal raridade nos dominios da Russia ha mais de quatro Seculos, sem que ao menos parte d'ella se tenha conduzido para o Muséo de Petersburgo? Desde o tempo do Czar Pedro o Grande até ao presente saõ excessivas as diligencias, e as despezas, que os seus Augustos Successores, verdadeiros Protectores das Sciencias, principalmente a que hoje taõ dignamente occupa o throno, tem feito em conduzir para a sua Metropole dos lugares mais difficeis tudo aquillo, que pode servir para o augmento d'ellas: e com tudo

do naõ sei que alli se ache algum daquelles Tartaros Baskires, que se achaõ petrificados em grande numero nas Obras de Helmoncio. Pelo que deixando casos, quando menos duvidosos, vamos expôr hum do mesmo genero, em que naõ ha duvida.

No Reino de Cochinchina corre hum rio pela Provincia de *Gua'ng binh*, que passando pela Cidade de *Mùòi ko* toma d'ella o nome, chamando-se *Soung Mùòi ko*, e vai desembocar no porto *Sâì*, distante d'aquella Cidade quatro legoas para o Norte: ficando o tal porto quasi em 18 gráos de latitude Boreal, e por conseguinte pouco distante dos confins do Reino de Tunkim. Quasi no meio d'aquella distancia se alarga o rio, formando hum pequeno lago, ou enseada, na qual o fundo he de lodo, a agoa salgada, e ambas as margens do rio saõ cultivadas, e habitadas.

Neste sitio, e na altura de oito pés, ou pouco mais, se acha sempre desde alguns seculos até ao presente grande numero de Caranguejos petrificados, huns na superficie, e outros pouco encravados no lodo, dos quaes eu tenho hoje a honra de offerecer alguns ao sabio exame da Real Academia, que comigo trouxe da mesma paragem, aonde se transformaõ.

Pertencem estes ao quadragessimo genero do Systema Lapidum do Cel. Linneo, em que constituem a primeira especie com o nome de *Entemolithus Cancri*, Petrificado de Caranguejo. Dos quatro modos em que, segundo Linneo, se observa a petrificaçaõ, he a que se diz *Transsubstanciaçaõ*, o modo mais proprio e adequado: e este he o que se pratíca no nosso *Entemolithus*, no qual o corpo, e natureza de Caranguejo se muda, e transforma no corpo, e natureza de pedra. Esta pedra he densa, homogenea, pezada, e dura em huns mais que outros, ou seja pelo maior, ou menor influxo do agente, que em diversas occasiões os transformou, ou, como julgo mais certo, por ter perseverado mais tempo o tal influxo. Por fora conservaõ naõ sómente

Syst. Nat. P. III. p. 160.

a fórma de Caranguejo; mas muitas vezes a côr propria da ſua caſca, ou concha natural: e por dentro tem todos a côr eſcura de ferro. Muitas vezes ſe achaõ encruſtados, e pegados huns a outros como lodo, que ao meſmo tempo ſe converteo tambem em pedra menos eſcura, e menos dura.

Se me perguntarem, a que genero, e eſpecie de pedras pertencem eſtas, de que fallamos, que dantes fôraõ viventes ſenſitivos? Reſponderei, que conſideradas ſómente pelo que ſaõ, ſem reſpeito ao que fôraõ, pertencem á 2.ª eſpecie do genero * *Cos* de Linneo, chamada *Cos Quadrum*, pois ſe achaõ nellas os Caracteres Generico, e Eſpecifico, com que o meſmo Linneo as diſtingue das outras pedras. E ſe alguem quizer ſaber as eſpecies do genero Cancer, que padecem eſta transformaçaõ? Digo, que ſaõ varias, e todas dos *Brachyuros*, nenhuma dos *Macrouros*. E d'aquelles obſervei com mais frequencia eſta mudança na eſpecie 47.ª de Linneo, dita *Cancer Brachyuros Longipes*: e na 52.ª, dita *Cancer Brachyuros Calappa*: talvez por ſerem eſtas duas eſpecies mais frequentes na India, como ſe faz mençaõ no *Muſæum de Rumphio*. Naõ he facil o diſtinguir claramente todas as outras eſpecies: aſſim porque o lodo, em que eſtaõ commummente involtos, naõ deixa deſcóbrir adequadamente a fórma, que os diſtingue, como tambem porque a maior parte d'elles ſe tiraõ do lodo mutilados, e disformes: principalmente faltos de pernas, que ſendo delgadas, e mui frageis, quando formados em pedra ſe quebraõ facilmente em lhes tocando antes de ſahirem da agoa.

* Rumph. Arab. l. I. cap. 38. p. 134. de Ligno petrificato. Syſt. nat. P. III. p. 61.

Syſt. nat. P. I. p. 1047.

Parecerá talvez ſuperfluo o fallar eu neſta materia, de que já antes tem tratado homens mui ſabios, e inſtruidos na Sciencia Natural, como fôraõ Geſnero, Rumphio, Scheuchzero, Leſſer, d'Argenville, Seba, Grimmio, Bourguet, e outros; mas duvido muito, ſe algum d'eſtes Authores aſſiſtio, e preſenceou (como a mim me ſuccedeo) no lugar em

em que ſe formáraõ as taes petrificaçóes, ou ſe pela noticia dos Viajantes fòraõ entendidas do meſmo modo, que eu as vi.

O Doutor Joaõ Jacobo d'Annone, membrò illuſtre da Sociedade Helvetica, dando noticia de alguns Caranguejos petrificados, que tinha em ſeu poder, e d'antes tinhaõ ſido do Muſéo do celebre Naturaliſta Seba, começa dizendo: *Do meſmo nome ſe póde colligir, que os Caranguejos petrificados ſaõ Caranguejos, que tendo naſcido, e vivido na agoa fôraõ levados para a terra, e mudados em ſubſtancia de pedra por meio de varias mudanças, que tem havido no globo terreſtre.* Eſte he tambem o parecer de outtos Authores, que elle cita: o qual eu naõ nego, que ſe verifique em alguma parte: ſó digo, que naõ ſe póde admittir geralmente. *Acta Helvet. t. 3. p. 265.*

A origem dos noſſos petrificados de Cochinchina naõ ſó he diverſa, mas tambem mais natural, e mais palpavel, ſem para iſſo nos vermos preciſados a ſuppôr alguma mudança extraordinaria no noſſo globo, de grandes diluvios, terremotos, ou vulcanos, que talvez naõ houve, nem ha lembrança, que houveſſe jámais em Cochinchina.

Os petrificados d'eſte paiz nem ſe achaõ nas entranhas da terra, nem nas praias do mar, nem na extençaõ de todo aquelle rio, mais que ſómente na pequena ſuperficie de huma milha á flor da terra, e debaixo da agoa, e iſto perennemente por alguns Seculos, ſem notavel diminuiçaõ, por mais que os peſcadores os tirem para terra: logo he indubitavel, que allí meſmo ſucceſſivamente ſe formaõ, e naõ ſaõ levados para allí de outra parte por revoluçaõ alguma extraordinaria do globo terreſtre. Tambem he indubitavel, que iſto naõ ſuccede por virtude alguma lapidífica das agoas d'aquelle rio, que os transforma; pois ſendo elle aſſaz extenço em nenhuma outra paragem ſe achaõ Caranguejos de pedra, mas ſim muitos Caranguejos vivos, que peſcaõ, e comem os habitantes.

Daquí ſe infere, e conhece claramente, que a violencia

cia, que tira a vida, e transforma em pedra aquelles viventes, está no lodo, e no fundo d'aquelle pequeno espaço de rio, aonde se achaõ sem cavar a terra: e tendo elles allí chegado vivos, quando sobem do mar, ou descem com a corrente para o mar, ficaõ naquelle sitio entorpecidos, e duros como he a pedra, em cuja substancia se transformaõ. Esta acçaõ, e mudança, naõ he instantanea; pois se achaõ alguns mais endurecidos, e petrificados que outros: o que parece ser em razaõ do mais, ou menos tempo, em que ficáraõ expostos ao mortal influxo, que lhes destruio a propria natureza, depois de lhes tirar a vida.

Os naturaes da terra pertendem, que a transformaçaõ se faça naquelle tempo do anno, em que os Caranguejos mudaõ a casca; pois he certo, que a mudaõ, assim como as Serpentes mudaõ a pelle: porém, ainda que neste estado se achaõ mais dispostos para receber quaesquer influencias externas, com tudo naõ se póde affirmar isto geralmente de todos; por quanto na maior parte d'elles depois de mudados em pedra, se distingue ainda claramente a casca, ou concha, que os vestía, quando nelles se effeituou aquella mudança.

Arist. *Hist. Anim.* l. VIII c. 17. p. 56.

Para de algum modo percebermos o como se faz a tal transformaçaõ, he necessario advertirmos com o celebre Chimico e Medico Boerhaave, que assim o composto animal, como o de pedra tem por base, e fundamento o mesmo elemento da terra, e que os corpos, que tem este mesmo principio, facilmente se transmudaõ huns em outros. Todo o corpo animal, além da terra, he composto de grande quantidade de partes oleosas, e volateis, que se naõ achaõ na terra simples, nem nas pedras; pelo que, em se exhalando as taes particulas oleosas, e volateis, e restando sómente as fixas, fica logo o corpo animal reduzido a terra, como succede quotidianamente aos cadaveres sepultados.

Boerh. *El. Chim. de terra.* p. 333. vol. I.

Assim os Caranguejos, a que os vapores d'aquelle sitio petri-

petrificante tiráraõ a vida, ficando logo cubertos, ou eſtendidos no lodo, perdem naturalmente com o tempo as partes mais ſubtís, e volateis, proprias do animal, permanecendo as fixas, e terreas: e ajuntando-ſe a eſtas as exhalaçóes metallicas, principalmente de ferro, e chumbo, de que ha minas naquella Provincia, ficaõ mais condenſadas, mais pezadas, e mais duras que a meſma terra; que eſtas ſaõ as propriedades das pedras metallicas, e eſtas meſmas ſaõ as das pedras de Caranguejo. Tambem he mui provavel, que as meſmas exhalaçóes metallicas foſſem a cauſa dos Caranguejos ficarem naquelle ſitio entorpecidos, e mortos, como tem ſuccedido muitas vezes a alguns homens, que trabalhavaõ em minas. Aos que trabalhaõ nas de ouro em Cochinchina, ſe lhes endurece muitas vezes o ventre de tal ſorte, que parece principio de petrificaçaõ, de que muitos morrem. Porém naõ he poſſivel o examinar-ſe com certeza pela Anatomia; por quanto naquellas terras tem por impiedade execranda o abrir hum corpo humano depois de morto.

Bem conheço, que com eſta expoſiçaõ naõ fica totalmente clara a difficuldade da petrificaçaõ animal; com tudo parece, que explica mais a materia do que a ſentença commum, que diz, que hum animal ſe petrifica, porque ſe lhe introduz o ſucco, ou eſpirito Lapidifico, ſem explicar que couſa ſeja, e como obre o dito eſpirito: ou a ſentença Ariſtotelica, na qual pela corrupçaõ da fórma antiga de animal ſe diz gerar-ſe de novo a fórma de pedra, ſem dizer o como: ou finalmente por ſe lhe introduzir alguma ſemente de pedra, das que andaõ eſpalhadas, como as das plantas, por muitas partes, e fazer vegetar a materia, que achaſſe diſpoſta, na meſma figura, e ſubſtancia de pedra: como poderia alguem dizer, ſeguindo o parecer de Baglivio, Tournefort, e Homberg á cerca da geraçaõ, vegetaçaõ, e ſementes das pedras: mas eſta ſentença, ainda que foſſe mais provavel, do que he, nunca poderia admittir-ſe

nos petrificados animaes, como os noſſos, que nunca tem creſcimento, nem por conſeguinte vegetaçaõ.

Tom. III. p. 274.

Dos petrificados de Caranguejos, que ſe deſcrevem nas Actas Helveticas, ſe diz, que naõ ſe ſabe, de que parte do mundo foraõ trazidos para Europa; mas que pela grande ſemelhança, que tem com os que deſcreve Rumphio, Kundmann, Bruckmann, e Bourguet, ſe julga, que vieraõ da China, Japaõ, ou da Coſta de Coromandel. Eu que viví 46 annos naquellas terras (excepto o Japaõ) nunca lá ví, ou ouví dizer, que ſe formaſſe a tal petrificaçaõ. Por muitas partes da India correm elles com o nome de Caranguejos de Hainan, que he huma Ilha aſſaz grande do Imperio da China, cujo lado Auſtral fica quaſi na meſma Latitude, em que eſtá ſituado o porto *Sâí* de Cochinchina, aonde ſe transformaõ os Caranguejos; porém eu fallando com varias peſſoas, que aſſiſtíraõ na Ilha de Hainan, nenhuma me pôde certificar, que na dita Ilha ſe faça a tal patrificaçaõ.

Voyag. Tom. 7. p. 269.

No 7.° tomo do reſumo da Hiſtoria das Viagens, diz Mr. de la Harpe, *que os habitantes d'aquella Ilha* (*Hainan*) *naõ conhecem hum Lago celebrado de alguns Viajantes, por ter a virtude de petrificar tudo, o que nelle ſe lança: mas que eſta idéa póde vir das petrificações, que ſaõ communs em Cantaõ.* Eu naõ julgo ſer eſta a razaõ do engano na noticia dos Viajantes, mas ſim a proximidade dos dous lugares, e o julgarem alguns, que a Cochinchina naõ he Reino ſeparado, e independente da China. Eu tenho fundamento para julgar, que a maior parte dos Caranguejos petrificados, ou talvez todos os que ſe achaõ eſpalhados por diverſos Reinos da Aſia, e tambem da Europa, tem a ſua origem naquelle Lago do Rio de *Muòi ko* de Cochinchina; por quanto tenho viſto, que aſſim os Navios da China, como os Européos os compraõ allí em grande quantidade, e por baixo preço, e depois os exportaõ para a China, e outras partes, aonde ſe ſervem d'elles na Medicina.

E

E qual he o ſeu uſo, ou virtude? Por experiencia de muitos annos poſſo affirmar, que ſaõ hum excellente Abſorbente, e em nada inferior ao *Oculi Cancrorum* das Officinas. Daõ-ſe interiormente nas febres, nas dyſenterias, nas diarrhéas, nos tenesmos, nas dores, e azías do eſtomago, nos pleurizes, nos accidentes hyſtericos, e epilepticos, principalmente quando procedem do acido: e externamente ſaõ uteis nas inflamações, e apoſtemas. De ſorte que, ſendo taõ proveitoſo o ſeu uſo para conſervar a vida dos homens, naõ ſe póde julgar por meramente eſpeculativo, e ocioſo o ſeu conhecimento, que entaõ ſeria contra o fim, que eſta Real Academia nos propoem para ſeguir no ſeu judicioſo apophthegma:

Niſi utile eſt, quod facimus, ſtulta eſt gloria.

EXA-

EXAME PHISICO, E HISTORICO.

Se ha, ou tem havido no mundo diversas especies de homens?

Pelo P. Joaõ de Loureiro.

Fecitque ex uno omne genus hominum inhabitare super universam faciem terrae. Act. Ap. C. XVII.

Lida em 25 de Janeiro de 1784.

Tendo o celebre Linneo concebido a vasta idéa de expôr por novo, e claro methodo todas as producções naturaes sublunares, que se comprehendem nos tres reinos, Animal, Vegetal, e Mineral, começou pelo primeiro, e o dividio em seis Classes. Na 1.ª Classe, dita *Mamalia* (a que os antigos chamavaõ *animaes perfeitos*) collocou na primeira ordem aquelles, a que por excellencia chamou *Primates*. E dentre estes escolheo o Homem, e o poz por principio, e cabeça de todo o creado, e juntamente da sua obra; por ser o Homem o genero mais nobre de todos, que sendo feito conforme á imagem, e semelhança do Creador, leva maior vantagem a todos os viventes sensitivos, do que estes excedem os vegetaveis, e os vegetaveis os mineraes.

Linn. Syst. Nat. T. I. pag. 28.

Como caracter generico, distinctivo do Homem, lhe assignou o discurso, e reflexaõ, que se denota no dito do Sabio Legislador de Athenas Solon *Nosce te ipsum.* Pois seria taõ chimerico hum Homem, que naõ fosse racional, como o seria hum animal, que naõ fosse sensitivo, ou huma planta, que naõ fosse vegetavel. E para proceder coherente no seu Systema, em que distingue tambem os diversos generos de animaes da primeira ordem, pelo diverso numero, fórma, e disposiçaõ dos dentes, propoz Linneo a que lhe pareceo mais propria do genero humano:

ain-

ainda que neſta bem pouco ſe differença o Homem dos monos, e bugios; pois tem commummente huns, e outros o meſmo numero, e fórma de dentes: e ſómente as prezas dos bugios ſaõ de ordinario hum pouco apartadas dos inciſores de ambas as partes, e em alguns maiores. Porém differe infinitamente d'elles o Homem no racional, de que dá provas evidentes no fallar com hum diſcurſo ſeguido, e juntamente na Policia, com que vive, no bem Moral, que eſtima, e no conhecimento, que tem do Creador, e de outros entes incorporeos: o que nunca jámais ſe vio em bruto algum.

Além da 1.ª eſpecie de Homens, a que Linneo chamou *Homo Sapiens*, e *Homo diurnus*, poem logo immediatamente outra 2.ª eſpecie, a que chama *Homo Troglodytes*, *Homo Nocturnus*, e tambem *Homo Sylveſtris*, *Orang-Outang*, e *Kakurlacko*. Diz, que eſta 2.ª eſpecie de Homens ſe acha nos confins de Ethyopia, ſegundo Plinio: e tambem nas Ilhas de Java, Amboino, e Ternate, e no monte Ophir de Malacca, ſegundo Bontius, e outros Authores.

Linnæus Ibi. p. 33.

Faz logo a deſcripçaõ d'elles neſta fórma: que tem o corpo branco com os pêlos tambem brancos, e retorcidos: que anda levantado em dous pés, e na eſtatura he ametade menor que os homens ordinarios: que tem os olhos redondos com as pupillas da côr de ouro, e as palpebras cahidas, e tremulas: que olha de eſguelha, e tem a viſta mais clara de noite que de dia: que as mãos, deixando cahir os braços, lhe chegaõ aos joelhos: que vivem até 25 annos de idade, e que fallaõ por aſſobios. Finalmente diz, que, havendo de dar credito aos Viajantes, os taes Homens conſideraõ, e diſcorrem: e crem, que eſte mundo fôra creado para elles, no qual para o futuro haõ de vir a dominar.

Ora eſte modo de narraçaõ parece-me ter ſeu ar de fabula. Se aquelles Homens, ou animaes ſó fallaõ por aſſobios, ſem voz articulada, quem os podia entender? Como po-

poderaõ explicar, que o mundo foi creado para elles? Ou que elles haõ de vir a ser Senhores do mesmo mundo?

Nem basta para acreditar semelhante extravagancia (de que o mesmo Linneo nas notas, que accrescentou, mostra duvidar), que o dicesse Kjoep, ou qualquer Viajante pouco veridico, ou pouco exacto. E muito mais quando as relaçoẽs, que fallaõ nesta materia, naõ concordaõ entre si: descrevendo varias castas de animaes, ou de Homens de regiões mui distantes, e entre si mui differentes. As propriedades raras, e exoticas de huns, e outros confundio, e ajuntou Linneo na descripçaõ, que nos inculca desta sua 2.ª especie de Homens. Esta para maior clareza reduziremos a trez Classes, ou castas de individuos, em que ellas se observaõ.

Syst. Nat. Tom. I. p. 33.

A 1.ª he dos Troglodytas, naçaõ de Homens da mesma especie que nós, ainda que mui barbaros nos costumes. A 2.ª naõ he naçaõ particular; mas sim muitos individuos, que espalhados por diversas naçoẽs, ainda de pretos, nascem branquissimos, com os cabellos, e pêlos todos brancos, e retorcidos, e com os olhos da côr de fogo, e tremulos, que vem melhor de noute, que de dia; e por esta razaõ se podem chamar Nocturnos; mas na realidade saõ Homens, e filhos de Homens como nós: sómente com aquellas qualidades phisicas accidentaes, que os enfraquecem; pelo que de ordinario vivem pouco.

A 3.ª he huma casta (ou talvez varias) de animaes, que se encontraõ em diversos Reinos da Asia, e da Africa, e a que os Viajantes comummente chamaõ *Bugios*, e os naturaes da India chamaõ *Orang-Outang*, que quer dizer *Homem do mato*, e tambem *Kakurlacko*; mas na Africa saõ chamados *Pongo*, ou *Jocko*. Todos estes, ainda que differentes entre si na côr, e no tamanho, como tambem em algumas feições do corpo, tem com tudo muita semelhança na figura com o Homem; porém nunca se vio algum, que fallasse, nem desse signaes de raciocinio, ainda sendo domesticado, e creado desde pequeno entre os Homens; pelo que

que naõ póde haver duvida, que saõ brutos, e naõ verdadeiros Homens, ou da nossa, ou de outra especie; por lhes faltar o caracter essencial, e generico do Homem: *Nosce te ipsum.* Vamos por partes, começando pela primeira.

Dos antigos Trogloditas fallaõ naõ sómente Plinio, mas tambem Strabo, Pomponio Mela, e outros Authores mais modernos, que Herodoto, de quem parece que houvêraõ principalmente esta noticia. Herodoto historiador grave, e Pai da Historia, como lhe chamou *Cicero*, diz no Livro 4.° das suas antiguidades, *que de todas as nações conhecidas os Troglodytas de Ethyopia saõ os mais ligeiros na carreira: que se sustentaõ de serpentes, e lagartos, e outros animaes amphibios: que usaõ de Lingoa particular, que naõ tem semelhança com alguma outra, e que mais se parêce com os guinchos, ou silvos dos morcegos.* Com pouca mudança de termos nos communica a mesma noticia Pomponio Mela: *Troglodytæ nullarum opum domini strident magis, quam loquuntur, specus subeunt, aluntur que Serpentibus.* Strabo na sua Geografia das Nações do Mundo confessa, que elles costumaõ habitar em covas: que d'este costume procede o chamarem-lhes *Troglodytas*: e que saõ descendentes dos Arabios, que habitaõ da outra parte do Mar Roxo: *Quia enim terram subeant multi Troglodytas, quasi antricolas dixere: Hi ex Arabibus sunt, qui ad alteram sinus Arabici partem vergunt ad Ægyptum, et Æthyopiam.*

Herod. in Melpomene.

Pomp. Mela L. I. cap. 8.

Strabo *de Situ orbis* L. I. p. 39.

Plinio citado por Linneo, diz no L. V. Cap. 8.° da sua historia natural: *que os Troglodytas fazem covas, que saõ as casas, em que vivem: que o seu comer he carne de Serpentes: que daõ gritos, sem voz distincta: e que naõ podem communicar-se pela falla.*

Plin. *Hist. Nat.* L. V. cap. 8.

Assim tendo Herodoto affirmado sómente, que tem Lingoa particular, que naõ he semelhante a alguma outra, Plinio accrescentou expressamente, que naõ podem communicar-se pela falla, *adeo Sermonis commercio carent.* Mas parece, que se esqueceo do que tinha já dito, quando no Liv.

Liv. VI. cap. 29. fallando do lugar *Abulition* fundado pelos ſervos fugitivos dos Egypcios, diz, que ha allí hum grande emporio dos Troglodytas, e tambem dos Ethyopes: *Maximum hic Troglodytarum emporium, etiam Æthyopum.* Todos ſabem, que hum grande emporio he huma grande Cidade negociante, huma grande feira, ou hum grande Lugar de commercio, aonde concorre muita gente para tratar entre ſi da venda, e compra de diverſas fazendas. E póde-ſe fazer eſte vaſto commercio *maximum emporium* ſem ſe communicarem as peſſoas por palavra, ou por eſcrito, por ſi meſmo, ou por interprete? De que ſervia pois eſte grande emporio aos Troglodytas, ſe elles naõ ſe comunicavaõ pela falla?

Plin. L. VI. c. 29.

Mais. No cap. 8.° do Liv. XXXVII, que he o ultimo, refere o meſmo Plinio, que no Mar Roxo, entre as Coſtas de Abyſſinia, e Arabia eſtá ſituada huma Ilha chamada *Topazon*, aonde ſe achaõ, e d'ella tiraõ o nome as pedras, que ſe eſtimaõ com o nome de Topazios: que eſtando muitas vezes a tal Ilha encoberta com a nevoa he mui difficil de achar aos navegantes, que a buſcaõ, como ſaõ os Troglodytas, em cujo idioma o nome da Ilha *Topazin*, ſignifica buscar *Topazin enim Troglodytarum lingua significationem habere quærendi.* Com que temos já os Troglodytas com Lingoa, e vozes articuladas, como os outros Homens, qual he a palavra *Topazin*, que ſe percebe, e pronuncia mui bem por outras nações.

Plin. L. XXXVII. c. 8.°

Muito bem a entendia, e fallava a Rainha Cleopatra do Egypto, naõ obſtante, que a ſua converſaçaõ era mais de cortezã, que de barbara; pois d'ella refere Plutarcho na vida de Marco Antonio, que ſe communicava com os Troglodytas immediatamente ſem interprete. Donde ſe faz evidente, que os Troglodytas tinhaõ ſim hum idiôma proprio, mas racional, e capaz de ſer ouvido, e attendido nas Côrtes mais polidas do mundo, qual era a Metropole do Egypto.

O viverem aquelles Homens em covas, e ſerem ligeiriſſimos na carreira, ſe vê tambem em outros povos de Afri-

Africa, e de America; mas isto naõ basta para os desterrar da commum especie de Homens. O comerem cobras, e lagartos ainda he menos singular. Muitos Européos na India, e creio, que tambem em outras partes, usaõ na meza com especial gosto de huma especie de lagartos, que allí chamaõ *talagoyas*, e outros com Linneo lhes chamaõ *Iguanas*. Em muitas partes da Asia comem os naturaes a carne do maior lagarto, que ha, e que naõ differe do Crocodilo de Egypto. Para este fim me trouxeraõ huma vez amarrado hum de mediana grandeza, o que eu lhes agradecí, sem aceitar o presente. Huns póvos pretos chamados *Mois*, que habitaõ nas altas serranias, entre Cochinchina, e os Laos, vaõ muitas vezes em ranchos á montaria das serpentes nos dezertos: e a mim me certificáraõ, que achaõ melhor gosto em comer as cobras, do que as gallinhas, que elles criaõ em abundancia.

Abr. des Voyag. T. X. f. 307. e T. XI. f. 287. e T. I. f. 164.

Syst. Nat. T. I. pag. 366.

Além de que os Troglodytas, se he que usavaõ d'este mantimento, que nos mete horror, naõ usavaõ tanto d'elle quanto da caça dos Elefantes. O mesmo Plinio o confessa, declarando a destreza, e valor, com que segurando-se com huma maõ na cauda do Elefante, que perseguiaõ á caça, subiaõ logo por detraz d'elle, e firmando os pés na coxa da perna do mesmo animal, davaõ golpes com huma machadinha, que tinhaõ na maõ direita, e cortavaõ os nervos, ou tendões da outra perna do Elefante; com que, ficando coxo o animal, o matavaõ facilmente, e o comiaõ: *Troglodytæ contermini Æthyopiæ, qui solo hoc venatu (elephantum) aluntur. &c.*

Plin. L. VIII. c. 8.

Eu naõ tenho achado em algum author, que os Troglodytas fossem ametade mais baixos que nós, nem até agora consta com certeza, que haja no mundo naçaõ alguma taõ pequena. Dos Lapões do Norte, e dos Indios Esquimaux da America se affirma, serem comumente de baixa estatura; mas naõ tanto, que naõ excedaõ 3 pés de alto. Tambem naõ tenho lido, que os Troglodytas tivessem os

braços mais compridos, que o comum dos Homens. Bem póde ser, que a natureza por acaso distinguisse alguns d'elles com aquelle excesso, que deo nome a Artaxerxes Longimano Rey da Persia. Além disso naõ percebo como aquelles póvos de Ethyopia fossem brancos; pois tendo-se averiguado, que todos os póvos de Ethyopia saõ de côr mais, ou menos escura, o fazer o Homem Troglodyta branco seria *Æthyopem dealbare.*

L. VI c. 29. nota b. Hom. *Odyss.* L. IV.

Os Comentadores de Plinio notaõ, que os Troglodytas, aquem Homero na sua Odysséa chamou *Erembus*, saõ hum povo dos Abexins na Ethyopia alta, que fica proximo ao Mar Vermelho. Nos tempos modernos se chama o paiz dos *Barnágas*, que nos mappas se vé situado em 14 gráos de Latitude Boreal, junto ao Reino de *Tigré*, que he huma Provincia do Imperio Abexim.

No meio do Seculo 16.° por petiçaõ do Emperador de Ethyopia Claudius, feita á Corôa de Portugal, com promessa de se reduzir aquelle Imperio á Igreja Catholica (pois era, e ainda he Scismatico) fôraõ mandados áquellas terras naõ só Missionarios, e Bispos; mas tambem hum soccorro de 400 Soldados Portuguezes, com o seu Capitaõ General D. Chistovaõ da Gama, que allí obráraõ maravilhas de valor em defença da Religiaõ Catholica, e do Monarcha Abexim, que os pedíra. Com tudo achando-se as historias Portuguezas enriquecidas de noticias mui raras d'aquellas terras por meio dos seus naturaes, que lá assistíraõ por dilatados annos, naõ se lê nellas declaraçaõ, ou prova alguma convincente ácerca d'aquelles Homens, que se suppoem de diversa especie, com os quaes, se os houvesse, teriaõ tratado, quando menos os Missionarios, que assistíraõ no Reino de Tigré, confinante com o paiz dos Barnágas, e convertêraõ nelle muitas almas com a protecçaõ, e ajuda do Vice-Rey Abexim, que era mui zeloso Catholico.

Ludolph. *Hist. Æth.* L. I. c. 14 n. 102.

Leutolff na erudita historia, que compoz de Ethyopia, julga, que os Troglodytas naõ saõ differentes de huns póvos, que

que nas Cartas dos Missionarios Catholicos do Imperio Abexim saõ chamados *Sankálas* , e se diz d'elles , que andaõ nús , e comem ratos , e serpentes. O mesmo Author he de parecer , que os negros Hottentotes do Cabo de Boa Esperança procedem da mesma naçaõ. E com tudo he hoje constante , que todos saõ Homens da nossa mesma especie , ainda que a Lingoa , que fallaõ , tem hum tom dessemelhante ao de todas as outras , e elles mesmos tem alguma differença nas feições do corpo , e huma distancia enorme na barbaridade de costumes , com que se criaõ.

Visto que as principaes propriedades do *Homo Troglodytes* de Linneo , naõ se achaõ na propria naçaõ dos Troglodytas , vamos ver se as descubrimos em outra parte. Isigonus de Nicæa , citado por Plinio diz , que os Albanos , póvos da antiga Scythia , e descendentes de Jason , nascem com os cabellos brancos , e os olhos avermelhados , com os quaes vem melhor de noite , que de dia. Estas propriedades attribue Linneo ao seu *Homo Troglodytes* , a que tambem chama *Homo Nocturnus* por ter melhor vista de noute. Mas estes Homens Noćturnos , e Albanos (que ambos estes nomes lhes saõ proprios) naõ fazem por si huma naçaõ , nem ainda huma familia distincta , segundo a experiencia moderna nos tem ensinado : antes sim se encontraõ espalhados por diversas nações , e nellas procedem de Pais , e de familias , que naõ tem as mesmas propriedades.

Apud Plin. L. VII. c. 2.

Eu , antes de ir para a India , vî nesta Cidade huma pessoa , que parecia ter 10 , ou 11 annos de idade. Passados alguns annos vî outra em Macáo , que poderia ter 15. E ultimamente vî a terceira em Cochinchina de pouco maior idade. Todas estas trez pessoas eraõ de côr alvissima ; mas summamente desmaiada , como a cal , ou alvaiade. Tinhaõ os cabellos , e mais pêlos do corpo , totalmente brancos : as pupillas dos olhos , que abriaõ com difficuldade de dia , eraõ vermelhas , e luzentes , com alguma semelhança aos olhos da Coruja ; pelo que viaõ com mais facilidade de noute , que

de

de dia, cuja luz os obrigava a peſtanejar com frequencia. O mais ſingular he, que a peſſoa, que vî em Macáo, era naſcida em Timor de Pais pretos, como ſaõ todos os naturaes d'aquella Ilha.

Paſſando deſpois ha trez annos por Moçambique na Africa, me affirmaraõ allí peſſoas de credito, que entre os Cafres d'aquella Coſta ſe achaõ tambem alguns individuos ſemelhantes a ſeus Pais na eſtatura, e outras feições, mas diverſos na côr branca da pelle, e pêlos, que tinhaõ retorcidos, o que naõ ſe obſerva nos que ſaõ Filhos de Homens brancos: e todos com as meſmas propriedades de olhos vermelhos, e viſta nocturna.

Abr. des Voyag. T. IV. c. 213, e T. XII. c. 438.

Os meſmos, e da meſma ſorte differentes do commum dos Homens, tem encontrado os Viajantes na Coſta Occidental de Africa, e Reino de Congo: como tambem nas Ilhas de Amboino na Aſia, e no iſthmo de Panamá na America, aonde os Heſpanhoes os chamaõ Albinos. De ſorte que eſtes fenomenos, e deſvios das leys geraes da natureza naõ ſaõ dos mais raros. Com tudo ſendo huma mudança, ou variedade, que naõ he tranſcendente de algum principio conſtante, mas ſim do temperamento accidental, pela diverſa combinaçaõ dos humores, naõ ſe póde dizer, que eſtes individuos formaõ huma eſpecie de Homens diverſa da noſſa.

Deſpois de obſervarmos os paizes dos Troglodytas, e Albanos, Homens Nocturnos, paſſemos a dar viſta dos *Orang-Outangs*, Homens do matto. Aſſim ſaõ elles chamados em algumas partes da India. Do que naõ ſe deve inferir, que os Indios os tem por verdadeiros Homens; mas ſim por verdadeiros brutos, que com figura de Homens habitaõ nos mattos. Hum retrato, e hum cadaver de Homem tambem ſe dizem vulgarmente Homem pintado, e Homem morto, e com tudo naõ ſaõ Homens. Eſte naõ o he, porque naõ tem já a alma racional, principal conſtitutivo do genero humano: aquelle muito menos, por naõ ter a alma, nem o corpo, mas ſómen-

mente huma ſombra, e ſemelhança de homem. Eſta ſemelhança, e figura exterior, he unicamente a que nos pertende perſuadir, que o *Orang-Outang* he Homem; mas eſta meſma ſemelhança he muito menos propria, e adequada no *Orang-Outang*, que no cadaver, ou na pintura.

Nem me digaõ, que naquelle, além da grande ſemelhança na figura, ſe acha tambem a vida, com que ſe move, ſente, e conhece, como os Homens; pois o modo de vida, e conhecimento, que os Eſcritores mais exactos tem obſervado no *Orang-Outang*, he comum, e naõ ſuperior ao de outros animaes: e com tudo ſe diz d'eſtes, que ſaõ viventes ſenſitivos, e naõ racionaes. Logo ſegue-ſe, que o unico motivo, que nos poderia induzir, e enganar para o ter por Homem á primeira viſta, he ſómente a grande ſemelhança, que tem com a figura humana.

Jacobo Boncio, Medico da Companhia Hollandeza em Batavia na Java, he citado por Linneo como teſtemunha de viſta para prova da ſua nova eſpecie de Homens. Eſte Author, que aſſiſtio muitos annos na India, diz, *que elle víra allí varios Satyros, chamados* Orang-Outangs, *de ambos os sexos, que andavaõ direitos em dous pés; e principalmente hum do sexo feminino, que mostrava ter tanta vergonha á vista de Homens desconhecidos, que cubria a cara com as mãos, chorava, e dava gemidos com taes expressões das paixões humanas, que ſe poderia dizer, que ſó lhe faltava a falla para ſer mulher.* Com tudo elle naõ ſe attreve a affirmar, que o era, antes pelo contrario a chama Satyro, e monſtro. Jac. Bont. *Hiſt. Nat.* L. V p. 84.

Mirabile monstrum
Humanâ ſpecta facie; tum moribus illi
Assimile in gemitu, tum fletibus ora rigando.

E eſſas meſmas demonſtrações, que Boncio lhe attribue a pejo, e vergonha, com maior razaõ ſe devem attribuir a medo, e eſpanto, como eu tenho obſervado com outros animaes. Além de que, ſe aquella minina Satyra de Boncio

era de natureza taõ vergonhosa, com grande injuria, e muita impropriedade a representa o Author na estampa do seu livro, em figura taõ descomposta, que facilmente causaria pejo á mais barbara naçaõ do mundo.

Buff. T. IV. pag. 279. O sabio Conde de Buffon, que escreveo com muita exactidaõ, e ingenuidade a Historia Natural dos Animaes, diz, que elle vio, e observou muitas vezes em París hum *Orang-Outang* vivo, de dous pés, e meio de altura, o qual nem fallava, nem se dava a entender por assobios, nem fazia cousa alguma de maior habilidade, que hum caõ bem instruido naõ podesse fazer. Qual era logo o seu discurso, a sua falla, e a sua intelligencia racional? Diz mais, que se differença em quasi tudo da descripçaõ, que d'elle nos dá Linneo; pelo que duvída muito da verdade da tal descripçaõ, como tambem da existencia do objecto d'ella o Homem Nocturno: e depois accrescenta, que naõ julga demasiado o exame escrupuloso, e dilatado, que fez de hum Ente, que debaixo da figura de Homem, naõ he toda via mais, que hum Animal.

Dict. of Arts and Sciences. O Diccionario Inglez das Artes, e Sciencias os tem por verdadeiros brutos, e como taes os descreve na palavra *Monkey*, e traz a sua figura na Lamina 182, como tambem a do Satyro conhecido por Plinio, e outros Escritores Romanos, e Gregos, que tambem tem muita semelhança com o Homem.

Hum Capitaõ Inglez, com quem fiz viagem pelo Estreito de Malaca, me contou, que nos montes, que ficaõ para o Sudoeste, trez dias distantes d'aquella Cidade, se achaõ estes viventes, que parecem ser Homens: que naõ só andaõ sempre em dous pés levantados; mas que tem todos os membros proporcionados. Que por serem mui medrosos, e fugirem com extraordinaria ligeireza, nunca se pôde apanhar algum. Accrescentou, que se suspeitava serem descendentes de alguns naturaes da Cidade, que tinhaõ fugido para os montes no anno de 1640 por occasiaõ

ſiaõ da guerra, em que os Hollandezes ſe apoderáraõ de Malaca. Porém eſta conjectura naõ parece veroſimil; por quanto agora ſe diz, que elles naõ fallaõ lingoa alguma, e fallariaõ ſem duvida a Lingoa Malaia propria de ſeus ascendentes, ſe foſſem d'elles nascidos, e criados com elles naquelles montes. O que parece mais certo he, que elles ſaõ os mesmos *Orang-Outangs*, que Linneo diz, habitaõ no Monte Ophir de Malaca, e por ſerem taõ brutos, como quaesquer outros, naõ tem capacidade para discorrer, nem fallar.

O judicioso, e recente Author da Hiſtoria de Samatra (na qual Ilha junto ao Rio Paſſaman, na Coſta Occidental, e naõ no continente de Malaca, fica ſituado o Monte Ophir) escreve, que entre as varias nações, que povoaõ aquella Ilha, ſe achaõ duas totalmente ſylveſtres, e retiradas de todo o commercio com as outras, huma chamada *Orang-Cubu*, e outra *Orang-Gugu*, que ambas tem ſeu idioma proprio, em que fallaõ, e uſaõ por comida de tudo o que ſe cria nos bosques, veados, elefantes, rhinocerontes, javalís, ſerpentes, e bugios. A ſegunda caſta Orang-Gugu he menos numeroſa, mais brutal, e tem o corpo peludo; de ſorte, que exceptuando o uſo da falla, em pouco moſtra differençar-ſe dos *Orang-Outangs* de Bornéo. Os naturaes da Provincia de *Labun*, na mesma Ilha, indo á caça, tiveraõ occaſiaõ de apanhar huma mulher d'estes montanhezes, a qual depois vivendo em povoado ſe diz, que teve filhos, que nascêraõ tambem peludos como a Mãi; mas na terceira geraçaõ os ſeus deſcendentes naõ tinhaõ já pêlos, nem differença alguma dos outros Homens. Eſta noticia nos communica M.r Marsden, como havida dos mesmos habitantes de Samatra, de cuja verdade elle naõ quer ſer fiador; porém julga, que naõ he mera invençaõ, e ſem algum fundamento na realidade do caſo, ainda que exagerado nas circunſtancias. *It has probably ſome foundation in truth, but exággerated in the circumſtances.* A mim me parece, que ainda concedendo tudo o referido, aquelles montanhe-

M.r Marſden. *Hiſt. of Sumatr.* c. 2. pag. 35.

tanhezes de Samatra naõ eraõ *Orang-Outangs* ; porque tinhaõ o uſo ordinario da falla, que ſó podem ter os racionaes : nem tambem eraõ Homens de diverſa eſpecie da noſſa ; porque o terem o corpo peludo , e viverem ſelvagens nos bosques, ſó he differença accidental, e naõ eſpecifica.

Eu nos annos , que aſſiſtí em Cochinhina, naõ vi, mas tive comigo alguns tempo hum domeſtico , que tinha viſto no Reino de Champá , pertencente á Cochinchina hum d'eſtes homens do matto, ſemelhante áquelles, que nos Reinos de Congo, e Guiné ſaõ chamados pelos Africanos *Pongo*, e *Baris*. Era todo preto, com poucos pêlos no corpo, da eſtatura ordinaria dos Homens, e com baſtante ſemelhança a elles na proporçaõ dos membros. Andava em dous pés, e moſtrava huma força extraordinaria ; pois tendo-lhe amarrado fortemente os braços com cordas, quando o prendêraõ nos montes, com o impeto, que fazia, dando ao meſmo tempo hum ſalto, e hum grito, quebrava facilmente todas as prizoẽs, ſem fazer mal a peſſoa alguma. Naõ fallava, nem dava ſignaes de verdadeiro diſcurſo ; pelo que os meſmos naturaes da terra o tinhaõ por bruto, e naõ por Homem.

Eſta caſta de animaes tem ſe propagado muito em varios Reinos da Aſia, e da Africa, principalmente nas terras, que ficaõ debaixo da Zona torrida. Nas terras frias naõ podem abſolutamente viver, e nas temperadas vivem mui pouco : no que moſtraõ ter hum temperamento mui diverſo dos homens, que vivem igualmente em todos os climas ; e pelo contrario ſaõ proximos á natureza dos bugios, dos quaes a maior parte das eſpecies ſó podem viver em climas quentes. A razaõ, por que os *Orang-Outangs* ſe naõ vêm com mais frequencia , he porque ainda nos climas quentes, que habitaõ, ſe retiraõ para os montes mais agreſtes, e para os deſertos mais occultos, e menos frequentados dos homens. Alguns, que ſe apanháraõ com laços

fô-

fôraõ conduzidos em navios para Europa; mas os mais d'eſtes morrêraõ logo na viagem, e hum, ou outro, que chegáraõ a França, Inglaterra, e Hollanda, duráraõ neſtas terras mui pouco.

A eſtatura ordinaria dos *Orang-Outangs* he quaſi a meſma que a dos Homens; porém ſaõ mais encorpados, e alguns agigantados de 6 a 7 pés de altura. Outros muitos ſaõ ametade menores, como os deſcreve Linneo, e tambem era d'eſtes o que vio M.r de Buffon em París. Henrique Groſſe na viajem ás Indias Orientaes refere, que o Nababo de Carnate mandára de prezente ao Governador Inglez de Bombay dous d'eſtes animaes perfeitamente ſemelhantes aos Homens; mas que ſó tinhaõ dous pés de alto, e eraõ de côr branca pallida: o que, ſe aſſim he, eſta relaçaõ naõ ſe conforma bem com as outras. Quaſi todos os outros pela maior parte ſaõ de côr eſcura, e tambem alguns ha de côr amarella, como eraõ os que Boſman vio em Guiné. Todos elles naõ tem cauda, nem tem pêlos na cara; mas alguns tem muitos no corpo, principalmente nas coſtas.

Andaõ comummente em dous pés, e tambem algumas vezes em quatro, ſegundo outros referem. A cara he chata, e ainda mais o nariz, a bocca mui larga, os olhos encovados, e as orelhas grandes. Os pés ſaõ tambem chatos, com o dedo pollegar mui curto, e o calcanhar levantado, que naõ póde facilmente chegar ao chaõ, e ſe parecem mais ás maõs, que aos pés dos Homens, para com elles ſe ſegurarem mais facilmente nos ramos das arvores, aonde dormem. Os braços ſaõ mais compridos, e as coxas das pernas mais curtas, que nos Homens. Eſtas, e outras feiçóes, e propriedades d'eſtes animaes ſe podem vêr com mais clareza nas relaçóes de muitos viajantes, que ſe achaõ na Hiſtoria geral das Viagens, e tambem muitas d'ellas recopiladas na 4.a Parte da Hiſtoria Natural de M.r de Buffon.

M.r Tyſon, Anatomico Inglez, naõ ſó vio vivo; mas fez exacta anatomia em *Londres* de hum *Orang-Outang* pe-

queno, que tinha ſómente dous pés de altura, e dous annos de idade. Abrio-o em companhia do celebre Anatomico Cowper, e tendo ambos examinado com a maior attençaõ todos os membros, orgãos, partes internas, e externas d'aquelle corpo exotico acháraõ, que em mais de 30 partes era mais ſemelhante ao corpo dos bugios, que ao dos Homens; porém que em outro maior numero de partes concordava mais com o corpo humano, que com o dos bugios. E do reſultado d'eſtas obſervações deo M.r Tyſon noticia ao publico em hum Livro, que imprimio em Londres no anno de 1693.

Iſto he o que conſta com certeza do exame mais exacto, e das relações mais veridicas, que nos tem dado a conhecer eſtes animaes maravilhozos: creſcendo tanto mais a maravilha, quanto menos vezes ſe offerece occaſiaõ de os vêr. E como as noticias tanto ſe ouvem, ou lem com mais goſto, quanto ſe repreſentaõ mais raras, d'aquí naſceo, que os Authores, e Viajantes accreſcentáraõ, conforme a ſua fantaſia, mais do que viraõ em realidade: do que ſurprendida a ſinceridade do celebre Linneo, eſcreveo o que elle naõ tinha viſto, nem podia vêr; porque o naõ ha.

Do que exiſte, e ſe ſabe com certeza, ſe póde conhecer mui bem, que os *Orang-Outangs*, Homens do matto, e Selvagens, ſaõ na figura do corpo mui parecidos, ainda que naõ em tudo, aos verdadeiros homens; mas realmente naõ ſaõ Homens; porque naõ ſaõ racionaes. Que os Albanos, Homens nocturnos, e os Troglodytas, ſaõ racionaes, e ſaõ Homens; mas naõ de diverſa eſpecie, por naõ terem diverſas propriedades phiſicas, tranſcendentes, que baſtem para fundar huma nova eſpecie.

Depois da que o celebre Linneo na 1.a Parte do ſeu *Syſtema Naturæ* chamou 2.a eſpecie de Homens, deo á lúz outra 3.a eſpecie, que com o nome de *Gibbon*, ou *Golock* ſe acha deſcripta no appendix da *Mantissa* impreſſa em Stockol- Mant. f.
521. mo no anno de 1771. Elle lhe dá o nome eſpecifico de *Homo Lar*,

Lar, que parece quer dizer *domeſtico*, e *familiar*, aſſim como o eraõ os Deozes Lares, que ſe diziaõ aſſiſtir com os Romanos para lhes guardar as ſuas caſas, e os caminhos publicos: e ſegundo ſe refere nos Faſtos de Ovidio tiveraõ origem em dous Irmãos gemeos chamados Lares, que naſceraõ da Nympha Lara pela violencia, que lhe fez Mercurio. Ovid. Naſ. *Faſt.* L. II.

Fitque gravis, geminosque parit, qui compita ſervant,
Et vigilant noſtrâ ſemper in Urbe, Lares.

Eſtes, que eraõ falſos Deozes, tinhaõ a ſua aſſiſtencia na antiga Roma: os Gibbons, e Golocks, que ſaõ Homens fingidos, habitaõ hoje na Coſta de Coromandel, em Malaca, nas Ilhas Molucas, nos confins da China, e nos boſques de Bengalla. Saõ, conforme a deſcripçaõ de Linneo, de natureza manſos, e preguiçoſos, que ſoffrem mal o frio, e a chuva. Naõ tem cauda. Andaõ com o corpo levantado, de eſtatura ordinaria dos Homens, e de côr preta, ou eſcura. A cara, diz, que tem de côr de carne: o lugar dos olhos, nariz, e bocca ſem pêlos; mas á roda da cara os cabellos levantados. Os braços ſaõ mui corpridos, e eſtendidos até os pés, de ſorte, que ficando levantados andaõ em quatro.

O Conde de Buffon na ſua Hiſtoria Natural dos animaes traz a figura mui propria d'eſte com o nome de *Grande Gibbon*. Diz, que elle o vio vivo: que naõ chegava a trez pés de altura, e que o caracter principal, que o diſtingue dos outros bugios, he a prodigioſa grandeza dos braços, que ſaõ taõ compridos como todo o corpo; que a cara era de côr eſcura, com baſtante ſemelhança á dos Homens; mas os dentes caninos, que chamamos *prezas*, eraõ maiores, que os humanos: que era de natural doce, e domeſtico, e que tomava manſamente o que lhe davaõ a comer. Porém naõ notou, que fizeſſe acçaõ alguma, em que moſtraſſe ter discurso; e como aſſim o poem no numero dos bugios. *Hiſt. Nat.* T. IV. f. 298.

No anno de 1778, que eu eſtive em Bengalla, ouví di-

dizer, que os Hollandezes tinhaõ allí dous d'estes animaes na sua feitoria; porém eu naõ tive entaõ a curiosidade de os hir vêr. Logo no mesmo anno, passando por Malaca de volta para a China, vi outro naquella Cidade com quasi as mesmas propriedades, que referem os sobreditos Authores: e tive assaz de tempo para o examinar exactamente; porque o levamos com nosco no mesmo Navio para Cantaõ. Naõ chegava a trez pés de alto: o corpo era preto, sem cauda, e com pêlos densos em todo elle, excepto na cara, que os naõ tinha, e era de côr parda escura com hum circulo de pêlos cinzentos á roda d'ella. Na cabeça naõ tinha propriamente cabellos; mas pêlos enriçados, pouco mais compridos, e da mesma côr preta, como os do corpo. Os pés eraõ menos semelhantes aos dos Homens, que os de outras especies de bugios, e tinhaõ as unhas curvas, e agudas.

Os braços eraõ desmarcadamente grandes, e d'elles se valia com frequencia para andar; mas com esta singular differença, que pondo as maõs no chaõ naõ ficava, como os outros animaes, com o corpo parallello á terra, nem tambem perpendicular, como os Homens; porque encurvando-se hum pouco nos joelhos, e na cintura, formava com o corpo, e pernas dous angulos obtuzos á imitaçaõ da letra S. Era manso, e mui medrozo: naõ fazia os brincos, e ridicularias, que fazem os outros bugios: nem mostrava mais intelligencia, que elles.

Este he o animal disforme chamado *Gibbon*, que debaixo do especioso nome de *Homo Lar* se nos quer introduzir por individuo do nosso mesmo genero, formando huma terceira especie do genero humano. Chamo-lhe disforme; porque na realidade o he, assim na fórma interna, como na externa. Na externa basta para o affirmar a enorme desproporçaõ, que tem dos braços com o corpo, a qual deformidade naõ se vê em algum dos animaes, que chamamos perfeitos, e nelle faz huma apparencia desagradavel, e medo-

donha. Na interna; porque naõ obſtante alguma ſemelhança, que tem exteriormente com o Homem, elle naõ falla, nem diſcorre, nem ainda moſtra aquella induſtria, e habilidade, de que a natureza tem dotado outras eſpecies de bugios. Pois ſe d'eſtes, com ſerem mais induſtrioſos, falta a razaõ para dizer, que ſaõ Homens, como ſe poderá dizer d'aquelles, que o ſaõ?

Nos annos, que eu aſſiſtí na Cidade de *Húê* Côrte de Cochinchina, havia allí huma Companhia de Comediantes, que todos eraõ bugios d'aquella eſpecie, que mais comummente ſe chamaõ *macacos*, e coſtumaõ vir de Angola, e de outras partes de Africa. Eſtes, tendo-lhes cortado as caudas, e feito veſtidos, e maſcaras conformes ás peſſoas, que haviaõ de repreſentar, e induſtriados pelo ſeu meſtre nas acções, lugar, tempo, e modo, que haviaõ de obſervar, começavaõ a Comedia, ou Entremez, logo que ſe lhes dava ſignal para ſahirem ao theatro. Nelle tocavaõ inſtrumentos muſicos, dançavaõ ao compaſſo, peleijavaõ com diverſas armas, e o que mais he, fingiaõ com maravilhoſa imitaçaõ as acções humanas, e o caracter proprio d'aquellas peſſoas, de que faziaõ a figura. Do Soberano imitavaõ a gravidade, do Soldado a reſoluçaõ, do criado a diligencia, do criminoſo o temor, do paraſito os obſequios, e com mais propria naturalidade as macaquices do bobo.

Ora quem naõ diria, que aquelles repreſentantes eraõ racionaes? Pois nada menos; porque tantas, e taõ diverſas acções, que faziaõ com tanta propriedade, naõ procediaõ de verdadeiro diſcurſo; mas ſómente de imitaçaõ, e lembrança do que lhes tinhaõ enſinado: em que eſta caſta de animaes he mais docil, que outras, como bem notou o eloquente Lacerda: *Simia quamvis ludum docetur, natum ad imitationem animal: ſed vitia potius, quam rectè facta hominum imitatur.* Bem he verdade, que nos inſtrumentos, que tocavaõ, faziaõ elles as mudanças com os dedos; mas a harmonia da muſica, como tambem a falla dos papeis, que repreſenta- In *Campo Eloq.* vol. 1.

vaõ, ſahia detraz das cortinas, ſem que fóra ſe percebeſſe: e ainda neſta parte poderiaõ ſer ajudados de papagaios, principalmente de hum, que conta Joaõ Fabri, vio em Roma, o qual reſpondia com acerto a varias perguntas, que lhe faziaõ, e cantava varias letras por ſolfa. Mas tudo iſto naõ he prova de diſcurso, nem excede a capacidade material dos animaes.

Apud Hernand. in *theſ. Amer.* fol. 716.

Para fallar, e fazer as couſas, que ſe vêm, e ouvem, principalmente em materias limitadas, naõ he neceſſario o uſo do diſcurſo; mas ſim lembrança, e imitaçaõ do que ſe tem viſto, e ouvido: e diſto ninguem nega, que alguns animaes ſejaõ capazes. O diſcurſo racional ſe moſtra em conhecer, e inferir das couſas, que ſe viraõ, ou ouvíraõ, outras, que naõ fôraõ viſtas, nem ouvidas: e iſto naõ por ſemelhança alguma ſenſivel, que tenhaõ entre ſi; mas ſim pela connexaõ inſenſivel de cauſalidade, ou razaõ comum, que as une, a qual naõ alcança o conhecimento material dos brutos; mas ſim a intelligencia racional dos Homens. Eſta conhece tambem a exiſtencia dos entes incorporeos, inferindo-a dos ſeus effeitos: conhece, e ama o bem moral, e honeſto, de que os ſentidos corporeos dos brutos naõ tem, nem podem ter alguma idéa. Do que ſe ſegue claramente ſer a fórma Humana eſſencialmente diverſa da dos brutos, e naõ ſó no mais, ou no menos: que eſta diverſa eſſencia conſiſte em ſer racional: que por ſer racional he eſpirito: e por ſer eſpirito he immortal.

Naõ devo aquí diſſimular huma difficuldade, que ſe me póde oppôr. D'aquelles animaes, que tem alguma ſemelhança com o Homem, ſe conta, que tem algumas vezes cohabitado com individuos da verdadeira eſpecie humana. He certo, que na Africa tem vivido com elles algumas negras por annos inteiros, ou foſſe por violencia, ou por conſenſo voluntario. E tambem ſe diz (ainda que naõ com a meſma certeza) que d'eſte brutal commercio tem naſcido creaturas humanas: com que ſe pertende moſtrar, que ou os Pais

eraõ

eraõ Homens, como faz Linneo os Gibbons, e *Orang-Outangs*, ou que a fórma humana naõ he diverſa eſſencialmente da de outros animaes; pois póde d'elles proceder.

He mui notavel a eſte reſpeito, o que ſe conta da origem da Familia *Dinh*, que começou a reinar em Tunkim no anno de 968 da Era de Chriſto. Referem as hiſtorias d'aquelle Reino, que havia allí huma mulher viuva, ainda moça, e formoſa, mas de boa reputaçaõ, chamada *Nang Dam Nuong*, a qual por ſer pobre, hia muitas vezes a hum bosque, que ficava perto da ſua caſa, a buſcar alguns ramos de arvores ſeccos, com que fazer a comida. Em huma d'eſtas occaſiões vio ſahir do interior do bosque hum bugio (aſſim lhe chama a hiſtoria *Khitláng*) branco, e grande, como hum homem, o qual, naõ lhe podendo ella reſiſtir, a opprimio. Voltou para caſa triſte, e ainda moſtrou maior afflicçaõ, quando depois de algum tempo veio a conhecer em ſi os effeitos da violencia paſſada.

Hum ſeu Tio, com quem vivia, vendo-a deſconſolada, e notando tambem alguns ſignaes dos meſmos effeitos, a perſuadio com brandura a declarar-lhe a cauſa da mudanſa, que obſervava. Com repugnancia, e lagrimas contou ao Tio tudo, o que lhe tinha ſuccedido, e que por iſſo naõ ſe attrevêra mais a hir áquelle bosque. Has de hir commigo, replicou o Tio, e naõ temas; que eu te defenderei. Preparou logo as armas, e foi varias vezes com a Sobrinha ao lugar aſſinalado: até que huma vez, eſtando em cillada, vio ſahir o bugio, e arremeter com impeto para gozar da preza; mas o Tio, que o eſperava reſoluto, ſaltou de repente ſobre elle, e o matou: ficando certificado (ſegundo ſe refere) com o exame do corpo morto, de que naõ fôra Homem, mas bruto o author d'aquelle violento inſulto.

Paſſado o termo dos nove mezes determinado pela natureza ſahio á luz hum menino perfeito, que deſde os primeiros annos moſtrou grande inclinaçaõ, deſtreza, e valor

no

no exercicio das armas. Tinha fallecido alguns annos antes o Rei de Tunkim, chamado *Haŭngó*; e como naõ deixasse succeffor ao throno por se extinguir nelle a Real Familia, se levantáraõ doze pertendentes, e com outros tantos partidos se puzeraõ em armas para usurpar a Corôa; mas o menino, de que fallamos, que já entaõ era Homem, os venceo a todos, e sogeitados elles, alcansou por premio do seu valor o throno vacante, que occupou com applauso do povo por doze annos, com o nome de *Dinh Lien.*

Confesso, que naõ dou inteiro credito a esta historia; ainda que corre por bem averiguada nas Chronicas dos Reys de Tunkim. Naõ duvido, que nasçaõ especies hybridas do ajuntamento desordenado de animaes de diversas especies, como vemos nascer do burro, e egoa; do carneiro, e cabra; do lobo, e cadella, ou rapoza; do leaõ, e pardo; e de alguns outros, cujas castas naõ saõ muito distantes entre si. Tambem sei, que da comunicaçaõ infame de individuo humano com algum bruto, seguem alguns, que póde nascer creatura racional, e contaõ varios casos, que dizem ter succedido, com que o pertendem provar.

Com tudo, ou sendo o Pai a unica causa efficiente na producçaõ do feto, como quer Aristoteles, ou sendo o Pai, e Mãi agentes parciaes, como melhor sentem outros, assim Phisicos, como Anatomicos, sempre fica a grande difficuldade, que de hum Pai bruto podesse nascer hum Filho racional, capaz de governar hum reino? Sendo isto contrario á praxe, que segue a natureza, em que se funda o axioma Filosofico *Bonum ex integrâ causâ, malum ex quocumque defectu.* Mas naõ se deve d'aquí inferir, que o agente masculino no nosso caso, fosse mono racional: antes sim, que sendo verdadeiro individuo da nossa mesma especie, se procurou encobrir a indecencia (talvez voluntaria) da Mãi d'aquelle Rey com a violencia inevitavel (talvez fingida) do bruto aggressor, na qual a superstiçaõ gentilica acharia mysterio.

Nos

Nos animaes hybridos, ou mixtos, que nafcem de Pais de diverfas efpecies, fempre fe nota alguma femelhança mixta, e inadequada a refpeito de cada hum dos Pais, de que procedem: como fe vê no macho, e mula, que em parte faõ femelhantes ao burro, e em parte á egoa; naõ fó na fórma exterior do corpo, mas tambem nas inclinações, e propriedades internas: e o mefmo fe obferva regularmente nas outras caftas de animaes hybridos. Pelo contrario no noffo cafo o Rey *Dinh Lien* de Tunkim era Homem perfeito affim na fórma corporal externa, como interna racional: logo naõ era Filho do Pai bruto, que fe dizia; mas fim de Homem, que fe occultava. Além de que, contando a Hiftoria, que o aggreffor lafcivo fôra hum bugio branco, feria efte (quando foffe verdade) de huma cafta, que M.r de Buffon chama *Uanderu*, dos quaes os brancos faõ os maiores, e os mais libidinofos, e atrevidos a refpeito de individuos da noffa efpecie. E affim, ainda que foffe certa a hiftoria, nada provaria a refpeito do *Gibbon*, e *Orang-Outang*, que fe achavaõ innocentes no cafo. T. IV pag. 314.

Pelo que, geralmente fallando, venho a concluir, que de hum tal comercio brutal naõ poderia regularmente fahir á luz algum effeito: que, fe em algum cafo raro tiveffe effeito, feria efte monftro irracional, feguindo a natureza do agente parcial de inferior efpecie *malum ex quocumque defectu*: que finalmente, fe fe podeffe conhecer, que tinha nafcido creatura racional, fem que o foffem ambos os Pais (o que he quafi impoffivel provar-fe) entaõ digo, que feria por huma excepçaõ das Leis geraes da Natureza, unindo o Author d'ella a alma racional (de que elle fempre he a unica caufa efficiente) áquella materia informe, e defproporcionada, preparada pelos Pais, hum racional, outro bruto. E ainda affim a figura do feto teria alguma femelhança com o bruto, de que procedia, quando o mefmo Author da natureza naõ tiveffe tambem difpenfado nefta parte: o que fem graviffimo fundamento naõ fe deve prefumir.

Mas fosse, como quer que fosse, a origem genealogica d'aquelle Principe raro de Tunkim, ninguem poderia pôr duvida, que elle fosse Homem; naõ tanto pela figura humana, que tinha perfeita, quanto pela Ethica, e Politica acertada do seu governo, que internamente se fundava em hum perfeito discurso, e no exterior se manifestava pelas acções, e pela falla.

Se este constitutivo essencial do Homem se desse igualmente a conhecer no *Homo Lar* do celebre Linneo, nem eu, nem pessoa alguma duvidaria admittillo na sociedade humana, ainda quando na figura corporal fosse mais disforme, do que he. Aonde quer que se veja a fórma racional unida a hum corpo organico, devemos confessar, que aquelle composto he Homem: e que o naõ he, logo que lhe falte o principio do raciocinio. De sorte, que se Deos unisse, como he possivel, a alma racional ao corpo de hum quadrupede, ou de huma ave, ou de hum peixe, seria aquelle composto estranho verdadeiro animal racional, que continha o principio discursivo, ainda quando o naõ mostrasse na falla; mas que poderia mostrar com alguma mudança dos orgãos necessarios para fallar. E se os taes individuos exoticos fossem muitos, e da mesma symetria, poderia entaõ formar-se d'elles huma nova especie de Homens, que actualmente naõ nos consta, que exista.

Pelo contrario, se a hum corpo semelhante ao do Homem, se achasse unida, ou combinada a fórma sensitiva dos brutos, seria o tal composto bruto irracional, e naõ Homem: como actualmente de algum modo se observa em alguns monos, e Satyros dos bosques, e nos Tritões, e Nereidas, ou Sereias dos mares, nos quaes se vê alguma semelhança, mas nenhum tem falla, ou discurso, como o Homem.

Arist. *de anim.* L. I. cap. 3.

Aristoteles na excellente obra, que compoz dos animaes, para cujo solido exame concorreo a magnificencia do seu grande discipulo Alexandre, admittindo, que ha Homens

mens ſylveſtres, aſſim como ha bois, cavallos, cães, e outros animaes, tem por erro o dizer, que eſtes ſaõ de diverſa eſpecie, que os domeſticos. E na verdade parece, que tem razaõ, quando em huns, e outros ſe acha a meſma conformidade de membros, ſómente com aquella differença accidental, que póde cauſar a diverſidade de vida, e criaçaõ.

Taes eraõ os dous mininos, que no anno de 1661, foraõ deſcubertos entre huma manada de urſos, nos bosques de *Lithuania*, dos quaes ſe lembra o celebre Linneo, e ſe refere no Diccionario Hiſtorico. Os caçadores os ſeguíraõ; mas fugindo hum d'elles com os urſos, o outro, que parecia ter nove annos de idade, foi prezo pelos caçadores. Era mui alvo, e de perfeita fórma humana; ainda que mui feroz, defendendo-ſe a unhas, e dentes dos Homens, que o tomáraõ. Leváraõ-no ao Rey de Polonia, e ſendo allí baptizado, e criado com grande cuidado, nunca fallou, nem ſe eſqueceo de todo da ſua antiga ferocidade. Tanto póde a boa, ou má educaçaõ nos primeiros annos! Achaõ-ſe nos Authores outros caſos de individuos da noſſa eſpecie, que pela criaçaõ, que tiveraõ na mais tenra idade entre brutos, ficáraõ depois de tal ſorte abrutados, que nem fallavaõ, nem davaõ indicios certos de diſcurso, permanecendo nelles as potencias da alma adormecidas, e em grande parte ſem exercicio, aſſim como as tem o feto no utero, e algum tempo depois que nasce.

Lin. *Syſt. Nat.* T. I. pag. 28.

Porém naquelles, que naõ moſtrando diſcurso, ſe naõ acha tambem huma total conformidade com a figura humana, devemos persuadir-nos, que ſaõ brutos, e naõ Homens: e iſto he o que ſe acha nos *Orang-Outangs*, e nos *Gibbons.* O naõ terem cauda, e andarem em dous pés, he o que á primeira viſta nos repreſenta eſtes animaes mais ſemelhantes a nós com alguma admiraçaõ; mas ceſſará eſta quando advertirmos, que tambem outras especies de bugios, e do genero *Lemur*, e *Vespertilio*, nascem naturalmente ſem cauda:

da: e que os urſos, e os animaes chamados em Latim *Hiæna*, a que os Cafres chamaõ *Cazumba*, andaõ muitas vezes em dous pés; ainda que mais ordinariamente em quatro.

As hienas ſaõ animaes mui ferozes, e mui manhoſos, que appetecem muito a carne humana. Quando a luz do dia naõ he mui clara, ou de noite ao luar ſahem a paſſear nos caminhos levantadas em dous pés: e como eſta poſtura, e a côr preta, que tem, he a meſma dos Cafres naturaes da terra, enganaõ facilmente algum d'elles, até que chegando mais perto o apanhaõ, e o comem. Tambem para eſte fim ſe valem dos gemidos, e choro humano, que
Plin. L. 8. cap. 30. fingem com propriedade. Plinio accreſcenta, que as hienas fallaõ algumas palavras, que tem ouvido aos paſtores, e chamaõ pelo nome de algum d'elles, que acudindo cahe no ſeu poder, e perde a vida; mas d'eſta notavel circunſtancia naõ tenho certeza.

Temos viſto como de ambas as novas especies de Homens, que nos inculca o celebre Linneo, nem ha fundamento para dizer, que ſaõ racionaes, nem adequada ſemelhança no corpo com a noſſa especie. Como logo ſe ha de dizer que ſaõ Homens? Na mesma tal qual ſemelhança naõ concordaõ as relações dos viajantes. Donde ſe póde inferir, que ou elles differaõ mais do que viraõ (como ordinariamente ſuccede na relaçaõ de couſas maravilhoſas), ou que naõ ſendo os objectos das relações em ſi muito ſemelhantes, naõ podem formar hum todo, ou huma especie muito ſemelhante ao Homem.

Naõ entraõ neſta conta os Troglodytas, que, como temos viſto, ſempre fôraõ da noſſa meſma eſpecie; ainda que Homens agreſtes, e barbaros, aſſim como eraõ os Tapúias do Braſil, quando fóraõ deſcubertos pelos Portuguezes. Aſſim aquelles, como todas as mais nações, que povoaõ o Univerſo, tiveraõ principio, e deſcendem todos do meſmo Pai. Iſto nos enſina a Fé claramente por bocca do
Act. Ap. cap. 17. v. 26. Apoſtolo das gentes: *Fecitque ex uno omne genus Hominum in habi-*

habitare super universam faciem terræ. E he muito de notar, que tendo o Santo Apoſtolo propoſto eſta verdade na mais grave aſſembléa de ſabios da Grecia, qual era o Areopago de Athenas, naõ achou contradicçaõ neſte ponto, aſſim como achou no da reſurreiçaõ, que a razaõ natural naõ percebe, nem a experiencia enſina.

Tendo pois todos os Homens procedido do mesmo principio em Adam: ſendo todos illuſtrados com aquella luz celeſte, e eterna do raciocinio, como ſentíraõ Socrates, e Plataõ: tendo participado todos da Mente Divina, como enſina a Eſcola de Pythagoras, na alma racional immortal: ſendo todos incluidos no meſmo genero com a Divindade, como advertio S. Paulo aos Areopagitas *Ipsius et genus sumus*: naõ ſeria abſurdo aſſociar, e confundir a noſſa especie no mesmo genero com os brutos? He poſſivel, oh Homem, exclama o Filoſofo, e Orador Romano, que tendo-te Deos, ou a Natureza noſſa mãi dado huma alma, entre todas as couſas a mais excellente, e a mais Divina, te deixes tu cahir em tal desprezo, e em tal vileza, que naõ conheças a grande differença, que ha entre ti, e os brutos? *Sive Deus, sive Mater rerum omnium Natura dederit animum, quo nihil est præstantius, nihil Divinius: sic te ipse abjicies, et prosternes, ut nihil inter te, et quadrupedem aliquam putes interesse?*

Act. Ap. Ibi. verſ. 28.

M. T. Cicero *Parad.* 1.

DESCRIPÇAÕ BOTANICA

Das Cúbebas Medicinaes.

PELO P. JOAÕ DE LOUREIRO.

§ I.

Lida em 13 de Maio de 1784.

A Planta, que produz as *Cúbebas*, naõ foi conhecida pelos Medicos, e Botanicos antigos: nem até agora tiveraõ d'ella verdadeiro conhecimento os modernos. O que se usa na Medicina he o seu fructo, que saõ humas bagasinhas pequenas, redondas, e pretas, mui semelhantes á pimenta, as quaes costumaõ trazer huma cauda tenue, que he o pedunculo do fructo, em razaõ do qual se chama em algumas Farmacopéas *Piper Caudatum*, ainda que o seu nome mais usual he Cúbeba.

§. II.

No Livro XVII. da Geographia de Strabo se faz mençaõ de hum fructo, chamado *Corsium*, semelhante á pimenta, que por esta semelhança se poderia suspeitar, que fossem as Cúbebas, se o mesmo Author naõ declarasse, que este fructo nascia no Egypto, aonde naõ costumaõ nascer as Cúbebas. Plinio no Livr. II. Cap. 7. da Historia Natural diz com mais propriedade, que se acha na India huma droga semelhante aos grãos de pimenta: a qual segundo o parecer de Julio Cesar Escaligero na exercitaçaõ 146, saõ as nossas Cúbebas. E na verdade lhes compete bem a estas a semelhança do fructo, e o lugar do nascimento. Porém assim o nome de *Garyophyllon*, como o singular cheiro, que lhes dá a estimaçaõ, segundo Plinio, saõ mais pro-

prios

prios dos Cravos da India, que das Cúbebas. *Est etiam in India* (diz elle no lugar citado) *piperis grani simile, quod vocatur Garyophyllon, grandius, fragiliusque. Advehitur odoris gratia.* E por isso o douto Salmasio julgou, que Plinio neste lugar fallára do Cravo da India, e naõ das Cúbebas.

§. III.

D'ellas fallou Camelli no volume XXIV das Transacções Filosoficas da Sociedade Real de Londres, e Clutius no Tractado das Plantas Exoticas. Como tambem varios Diccionarios, o da Historia Natural, o Encyclopedico, o Inglez das Artes e Sciencias, e o Francez do Comercio. Neste diz M.r Savary (como tambem dizem outros), que as Cúbebas nascem de huma planta sarmentosa, que quer dizer, huma planta trepadeira, que com os seus ramos se encosta ás outras como a vide, ou como a hera. Porém isto he engano; porque a mim me consta ser huma arvore grossa, e firme, cujos ramos se elevaõ por si mesmos sem dependencia de outra.

§. IV.

Esta droga Medicinal costuma nos nossos tempos ser conduzida da Ilha de Java para a Europa nos Navios da Companhia Hollandeza. E admirome como esta Naçaõ naõ só industriosa no Comercio, mas tambem no adiantamento das Sciencias Naturaes, e principalmente da Botanica, como nos testificaõ as grandes obras de Van-Rheede, Rumphius, Burmman, Marcgrave, e outros, naõ tenha até agora dado inteira noticia ao Orbe Litterario da util planta das Cúbebas, que nasce nos seus dominios Orientaes.

§. V.

Novamente o clarissimo Bergius, digno discipulo do gran-

grande Linneo, falla do conhecimento, e uſo das Cúbebas no livro, que doutamente eſcreveo da Materia Medica, e deu á luz em Stockolmo no anno de 1782. Mas como até agora naõ era conhecida a claſſe, ou genero, a que pertence eſte ſimples vegetal, fallou d'elle ſómente o neceſſario para a praxe Médica debaixo do nome, e genero *Piper*, accommodando-ſe niſto á ſua Farmacopéa Nacional Sueca, que tracta d'elle debaixo do nome de *Piper Caudatum*.

§. VI.

Eſta planta naſce naõ ſómente na Java, mas tambem em outras partes da Aſia. Eu a vî muitas vezes em diverſos lugares de Cochinchina, e a tive por alguns annos plantada, e florecente na minha horta. Chama-ſe na lingoa vulgar d'aquella terra *Cây Mang Tang*: e no idiôma, de que lá uſa a Gente de Letras ſe diz: *Tat Truong Nhu.* Tendo eu bem examinado a ſua flor, achei ſer hum novo genero Botanico pertencente á *Enneandria Monogynia*, que no ſyſtema ſexual de Linneo he a 9.ª claſſe, e a mais rara em todo o Reyno Vegetal.

§. VII.

O ſeu Calyx comum, que he de côr branca, e deciduo, conſta de quatro folinhas redondas, iguaes, concavas, e patentes, que dentro em ſi contém cinco floreſinhas, e cada huma d'eſtas naõ tem outro calyx, ou perianthio proprio.

§. VIII.

A Corolla de cada florſinha conſta de ſeis petalos ſemelhantes, mas deſiguaes na grandeza, quaſi redondos, e patentes, premorſos na extremidade do limbo. O Nectario conſta de ſeis glandulas oblongas, e inflexas.

§. IX.

§. IX.

Os Filamentos saõ nove, mui breves, pegados ao receptaculo: trez dos quaes, os mais internos, se levantaõ perpendicularmente; os outros seis tem posiçaõ obliqua, encostados á Corolla: nenhum d'elles tem annexo algum corpusculo, ou appendix. As Anthéras saõ grandes, compressas, e quasi quadradas: cada huma tem quatro Loculos oblongos, dous de cada lado, que se oppoem decupadamente no mesmo plano.

§. X.

O Germen he redondo, superior ao receptaculo. Naõ tem Stylo. O Stigma he simples.

§. XI.

O Pericarpio he huma baga pequena, e globosa, com seu pedunculo proprio, delgado, e compridinho.

§. XII.

A semente he só huma, tambem globosa. Nascem esta flor, e fructo em huma arvore hortense, mas naõ rara, de mediana grandeza, e mui copada. As folhas saõ pequenas, lanceoladas, integerrimas, planas, lizas, sem nervos, alternas, petioladas, de côr verde alegre, e luzente. A flor he branca, e lateral, com pedunculos simples, quatro, ou cinco juntos no mesmo lugar. A baga he mui redonda, vermelha escura, quando madura, pouco maior que a pimenta, e liza, como esta, que só depois de secca fica engilhada, e crespa.

§. XIII.

As Cúbebas saõ mais aromaticas, que a pimenta, com menos ardor, e acrimonia. Como o seu cheiro, e gosto he agradavel, usaõ d'ellas verdes os naturaes da terra para temperar alguns guizados, principalmente de peixe. Depois de maduras, e seccas, se fazem mais desagradaveis, e tambem mais oleosas. Eu tenho usado na Medicina do seu oleo, que he de côr verde escura, pouco mais grosso, que o azeite ordinario, e com hum cheiro penetrante, o qual tirei por expressaõ, quasi a sexta parte do pezo. Naõ tirei o oleo essencial, por me naõ ser necessario, e se tirar com mais trabalho, em menos quantidade. Mas tendo visto como estas bagas saõ muito oleosas, quando recentes, julgo, que tambem por distillaçaõ se poderá haver maior copia d'elle, do que conseguio M.r de Baumé, que de treze libras e meia de Cúbebas houve sómente duas onças, e huma drachma: talvez por terem já alguma corrupçaõ, a que saõ mais sogeitas, que a pimenta, por serem menos solidas.

§. XIV.

A virtude medicinal das Cúbebas he calefaciente, cefalica, e estomachica. Usa-se d'ellas com bom successo na Vertigem, e tambem em alguns affectos paralyticos, que tem a sua origem na cabeça, ou no estomago. Daõ-se em cozimento, ou substancia na dose de meia drachma: e o melhor methodo nas doenças chronicas he tomallas em pilulas.

§. XV.

Saõ tambem de natureza Apoflegmatizantes, que puxaõ, e evacuaõ a flegma brandamente, ou pelo nariz formadas em errhinos, ou pela bocca em masticatorios, e gar-

garis-

garifmos. Nefta fórma aproveitaõ em muitas doenças da cabeça : naõ porque fejaõ purgantes do cerebro, como diziaõ os antigos, por falta de cabal noticia da Anatomia; mas porque eftimulando a membrana pituitaria de Schneider purgaõ, e fazem fahir das fuas glandulas a materia pituitofa, que o fangue arterial allí tinha depofitado, antes de fubir ao cerebro.

§. XVI.

D'efte modo podem tambem aproveitar para o exercicio mais prompto da Memoria, que alguns dizem fe fegue do frequente ufo das Cúbebas. Mas quanto á virtude alexiteria contra os venenos, que outros lhes attribuem, naõ tenho até agora achado fundamento para o affirmar.

CON-

CONSIDERAÇAÕ PHISICA, E BOTANICA

Da planta Aerides, que nasce, e se alimenta no Ar.

PELO P. JOAÕ DE LOUREIRO.

..... *Quod noſtri Cœlum memorant, Græci perhibent æthera: Quidquid eſt hoc, is omnia format, animat, auget, alit, ſerit, Sepelit, recipitque in ſe omnia, omniumque idem eſt pater.*

Ex Pacuvio in *Chryſe.*

Lida em 4 de Julho de 1785.

TRago hoje a noticia de huma planta verdadeiramente rara, e exotica; naõ tanto por ter a ſua origem nas Regiões remotas da China, e Cochinchina, quanto porque ſe cria, florece, e vive fóra do elemento natural dos Vegetaes, que he a terra. No elemento do fogo imagináraõ os antigos, que podia viver a Salamandra, e tambem huma caſta de inſectos em fórma de moscas, chamados *Pyraustas*, dos quaes refere Plinio, que naſciaõ nas fornalhas, em que ſe fundia o bronze na Ilha de Chypre. E ſe iſto ſe verificaſſe naquelles viventes ſenſitivos, naõ haveria difficuldade para o admittir tambem nos vegetativos; mas a verdade he, conforme a experiencia tem moſtrado, que a Salamandra ſó vive por breve tempo nas brazas, em quanto despede de ſi hum humor viſcoſo, com que apaga o fogo; mas ſe aſſoprando fomentamos a chamma, ſe reduz brevemente a cinzas como qualquer outro vivente. E no que toca ás moscas Pyraustas, todos conhecem já ſer huma fabula ſem fundamento algum em boa razaõ.

Plin. *Hiſt. Nat.* L. II. cap. 36.

O elemento da agoa he mais proprio, e ainda neceſſario para conſervar a vida, ou vegetal, ou animal. O celebre Chymico Van-Helmont (ſegundo elle mesmo refere) plantou hum pequeno ſalgueiro em hum vaſo de terra, e ten-

Helmont. L. *Mixt. Elem. figment.* n.20.

tendo cuidado em o regar ſómente com agoa pura por muito tempo, creſceo o ſalgueiro tanto, que arrancando-o da terra pezou 169 libras, conſervando a terra a meſma quantidade, e pezo, que tinha quando o plantáraõ. Donde quer moſtrar Van-Helmont, que toda a nutriçaõ, e grande augmento d'aquella planta foi tirado da agoa, e naõ da terra.

Mas ſeja qual for o ſentir dos Filoſofos neſta materia, o que nos moſtraõ os ſentidos, e o de que ninguem póde duvidar, he que todos os corpos viventes, ou ſejaõ ſenſitivos, ou vegetaes, ſe compoem de partes humas fluidas, e outras ſolidas. Pelo que, aſſim a terra, como a agoa, ou puras, ou mixtas, e combinadas, lhes ſaõ ambas neceſſarias para a ſua producçaõ, nutriçaõ, e conſervaçaõ; porém com eſta notavel differença, que huns ſó podem viver na terra, e naõ na agoa, e d'eſtes he o maior numero, que quotidianamente eſtamos vendo: outros ſó ſe podem conſervar na agoa, como ſaõ entre os ſenſitivos os peixes, e entre os vegetaes algumas plantas marinhas, como o *Sargaço.* Finalmente ha outra terceira Claſſe amphibia, e indifferente, que participa da natureza de ambas, e póde natural, e comodamente viver aſſim na agoa, como na terra. D'eſtes entre os animaes he o *Hyppotamo*, o *Crocodilo*, e tambem algumas eſpecies de ſerpentes. Das plantas, além de outras, he o *Convolvulus Reptans* de Linneo, a que Rumphio chama *Olus Vagum*, o qual he comida mui uſual na India, e ſemelhante aos noſſos eſpinafres; porém com eſta rara propriedade, que ou plantado na terra, ou lançado em alguma lagoa, e nadando com as raizes ſobre a agoa, cresce, florece, e ſe multiplica com a meſma facilidade. Rumph. *Amb.* L. IX. c. 41. tab. 155.

Do que ſe naõ deve inferir, que alguns d'eſtes vegetaes vivem, e ſe alimentaõ ſómente das partes ſolidas da terra, e outros ſómente das liquidas da agoa; pois os terreſtres, ainda nas terras mais áridas, recebem o liquor do orvalho, que os refreſca, e ſuſtenta: e os aquaticos recebem

tambem o alimento ſolido da terra, que do fundo, e praias do mar, e das lagôas ſe levanta com as ondas, e ſe acha ſempre, ainda na agoa, que nos parece mais pura, como tem examinado os Chymicos, e o teſtifica o celebre Roberto Boyle, dizendo, que ſempre na diſtillaçaõ das agoas ſe acha algum ſedimento de partes ſolidas.

R. Boyl. *de Ortu formar.* p. 259. &c.

Conhecido pois o naõ haver repugnancia, em que as plantas vivaõ, e ſe alimentem da agoa, reſta-nos averiguar ſe a ha, em que vivaõ ſómente do ar? A planta, de que eu hei de fallar, nasce, recebe a nutriçaõ, e multiplica-se no ar, vivendo nelle perenemente, e com augmento ſucceſſivo, e conſtante, totalmente ſeparada da terra, e da agoa. E ſeria innegavel o argumento *ab actu ad potentiam* para quem conheceſſe claramente a ſua exiſtencia. Mas como julgo, que em Europa naõ he conhecida, he me preciſo moſtrar, que naõ repugna; para que naõ pareça inveriſimil, que exiſte.

Beaumé *Chym.* T.I. p. 73.

O elemento do ar póde-ſe conſiderar dividido em duas regiões, huma mais inferior, a que chamamos *atmosfera*, a qual he hum ar pezado, e denſo, como moſtraõ os experimentos feitos na maquina pneumatica, e no barometro. Eſta regiaõ ſe eſtende da ſuperficie da terra para cima, por espaço de 15 legoas Francezas, ſegundo o computo mais ordinario, e conforme os calculos do grande Aſtronomo de Inglaterra Halley: no que todavia naõ póde haver cabal certeza. Depois d'eſta, ſegue-ſe outra regiaõ de materia mais liquida, leve, e pura, a que por diſtincçaõ chamamos *Æther*: e Ovidio lhe chama tambem *Ceo*, referindo mais como Naturaliſta, que como Poeta, o como Deos ſeparou eſtas duas regiões, que cercaõ o globo da terra: *Et liquidum ſpisso secrevit ab aere Cœlum*: e continuando a dizer, como ſobre o ar eſpeſſo, e grave dera o Author da natureza lugar ao *Æther*, ou *Ceo*, que naõ tem pezo algum, e he puro de todas as fezes terreas:

Ovid. *Metam.* L. I. verſ. 23.

Hec superimposuit liquidum, et gravitate carentem
Æthera, nec quidquam terrenæ fæcis habentem.

Ibi. verſ. 67.

Neſ-

Nesta regiaõ superior do ar, no *Æther* leve, e puro confesso eu, que naõ póde presistir, e muito menos alimentar-se, e crescer vivente algum: assim como a experiencia tem mostrado, que nenhum vegetativo, ou animal póde viver, no que impropriamente chamaõ *vacuo* da maquina pneumatica, que na realidade naõ he *vacuo*, mas sim hum ar mais puro, e leve, que allí ficou depois da extracçaõ das partes mais crassas feita pela maquina. Este ar denso, e pezado, que respiramos, he (diz Boerhaave no I. Tomo dos Elementos da Chymica) huma mistura confusa de corpos miudos de todo o genero, que constituem hum todo, composto de partes diversissimas. No ar se achaõ divididos em tenuissimos corpusculos, naõ só a terra, fogo, e agoa, mas todos os saes, oleos, espiritos, e exhalações vegetaes, animaes, e mineraes, que ha na terra: e o que he mais de admirar, até o mesmo ouro com ser o corpo mais pezado, que produz a natureza, se acha tambem em particulas subtís elevado ao ar, como pela Chymica se tem averiguado. De sorte, que tudo o que serve de nutrimento ás plantas, tudo o que dá alimento aos animaes cá na terra, tudo se acha tambem recolhido, e conservado neste celleiro universal da natureza a atmosfera.

Elem. Chym T. I. *de Aere* pag. 229.

Boerh. ibi pag. 246.

Sem duvida, que notando os antigos a abundancia de toda a casta de corpos, que se acha semeada pelo ar, naõ duvidáraõ annuir, a que d'elle podia viver o Cameleaõ, o qual he hum pequeno lagarto, de que o celebre Linneo fórma a segunda especie do genero *Lacerta*. Depois naõ vendo os mesmos antigos, que o Cameleaõ comia cousa alguma, e observando, que estava sempre com a bocca aberta recebendo o ar, com o qual todo o seu corpo, humas vezes se mostrava cheio, e inchado, outras lançando o ar fóra, se via attenuado, e magrissimo, assentáraõ, que na realidade naõ tomava outro alimento mais, que o ar. Assim deixáraõ escrito com outros Authores Gregos Theophrasto, e Plinio com os Latinos. O Cameleaõ, diz este, *So-*

Lin. *Syst. Nat.* T. I. pag. 364.

Plin. L. VIII. c. 33.

Solus animalium nec cibo, nec potu alitur, nec alio, quam aeris alimento.

Porém os modernos mais exactos nas suas observações, sem negarem a possibilidade, negaõ o facto. Na Academia Real das Sciencias de Pariz se examinou com diligencia, e se achou, que o Cameleaõ come alguns insectos, como saõ as moscas, as quaes apanha com a lingoa, que he mui subtíl, e ligeira, do comprimento de ametade de todo o seu corpo, com a qual despedida como huma seta caça a mosca, e a engolle inteira. Isto se confirmou com mais evidencia abrindo o Cameleaõ, em cujo estomago, e intestinos se acháraõ as moscàs, e tambem nas fezes finaes d'ellas, com que se mostrou claramente, que o Cameleaõ naõ vive sómente com o ar; mas de nenhum modo se concluio, que elle naõ possa viver, e viva muito tempo só com elle.

Plin. L. VIII. c. 36. Dos ursos do Norte deixou escrito Plinio, e outros, que no tempo do inverno se recolhem nas suas covas, aonde passaõ alguns mezes sem tomar alimento algum: e assim diz tambem dos ratos Ponticos, e o observou o excellente Medico, e Poeta Ausonio na sua Ephemeris:

D. Mag. Auson. *Ephemeris* p. 38.

Dormiunt glires hyemem peremnem,
Sed cibo parcunt.

O mesmo refere Linneo das Marmotas dos Alpes, que passavaõ o inverno em profundo sono, e por conseguinte sem comer. O douto Haller nos Commentarios, que escreveo sobre a *œconomia animalis* do seu grande mestre Boerhaave diz, que os ursos, e algumas especies de *Mustella*, e *Vulpes* se recolhem a dormir no principio do inverno, e continuaõ sem despertar até á entrada da primavera: e ainda ha quem affirme, que despois d'esta rigorosa, e prolongada abstinencia sahem das suas covas mais fortes, e mais gordos.

Hall. *prælect. in Boerh.* n. 55.

Pois se os ursos, sendo animaes taõ corpolentos, e taõ vorazes, podem passar muitos mezes sem comer, porque o naõ faraõ mais facilmente os Cameleões, sendo taõ tenues, e que

e que rara vez ſe observa, que comaõ? E ſe huns, e outros naõ comem, como ſe ſuſtentaõ, e crescem ſem alimento? He abſolutamente certo, que nenhum vivente póde naturalmente viver ſem ſe nutrir. A vida nos animaes, conforme a definiçaõ do engenhoſo Medico Eſcocez Pitcarne, conſiſte no movimento intrinſeco, a que chamamos *circulaçaõ do sangue pelas veias, e arterias*: e nas plantas em hum movimento do ſucco nutricio pelos ſubtís canaes, que nellas formou a natureza, com analogia ao movimento do ſangue nos animaes, ſegundo obſervou o perſpicaz Malpighi. Ora com eſte continuo movimento, que naõ póde ceſſar, ſem ceſſar a vida, ſe exhala continuamente pela ſuperficie dos corpos huma grande quantidade de materia em effluvios pelos vaſos exhalantes, que ſegundo a anatomia de *Ruischio* procedem ſómente das extremidades das arterias. Pitcarne *Elem. Med.* defin. 1.

O celebrado Sanctorio, a quem pela utiliſſima obra, que nos deixou da perſpiraçaõ inſenſivel, fundada em obſervações ſtaticas, deo *Boerhaave* lugar junto a Hippocrates, e mui ſuperior a todos os Commentadores de Galeno, diz, que a materia da perſpiraçaõ, que em hum dia ſe exhala em vapores do corpo humano, chega á quantidade de 5 libras, na ſuppoſiçaõ que o ſuſtento d'aquelle dia em comida, e bebida tenha pezado 8 libras: vindo a ſer por eſte computo muito maior a evacuaçaõ, que a natureza faz pelos poros, do que todas as outras juntas. E aſſim fica ſendo impoſſivel, que ainda faltando eſtas nos animaes, que dormem continuamente ſem comer, nem beber por alguns mezes, poſſaõ eſtes viver, ſe naõ receberem outra caſta de alimento; pois cada dia perdem muita ſubſtancia pela tranſpiraçaõ, ſem adquirirem alguma pelo paſto. Donde ſe vem a conhecer, que a ſubſtancia nutritiva, com que ſe refazem, da que quotidianamente exhalaõ, e perdem, naõ póde vir de outra parte ſenaõ do ar, o qual recebem pela bocca, e pelo nariz na inſpiraçaõ, e pelos infinitos poros, ou boccas das veias abſorbentes, que ſe achaõ em todo o ambito Sanct. *Aph.* 4. apud Goſter *de Perſpir. inſenſib.*

bito do corpo. D'allí se introduz nas veias maiores com o sangue, que purificado, e subtilizado nas glandulas, e nos bofes passa ao coração, do qual por meio das arterias se reparte, e communica para alimento, e vida de todo o corpo.

Este he o modo, e o caminho, pelo qual se communicaõ ordinariamente a peste, e enfermidades contagiosas, como bem conheceo, e ensinou o douto Medico Hollandez Gorter: *materiam pestilentialem aeri mixtam misceri sanguini constat.* E este he tambem o meio, por onde com hum ar limpo, e saudavel se restauraõ as forças de alguns doentes, a quem de outra sorte naõ póde aproveitar a Medicina.

Gorter *de Persp. insens.* c. 13. n. 19.

Nos tempos mais antigos antes da vinda de Christo, já era conhecida esta verdade; pois o sabio, e prudente velho Hippocrates ensinou aos da sua escola, que toda a superficie do corpo humano transpira, isto he, segundo a exposiçaõ de Haller, que em todos os membros, e em todas as partes do corpo, internas, e externas, se achaõ vasos exhalantes, e inhalantes. Pelos exhalantes perde o animal em effluvios a substancia, que tinha adquirido: e pelos inhalantes a restaura, attrahindo a si as partes aptas para a nutriçaõ, que se achaõ espalhadas no ar.

Hall. *prælect.* n. 87.

Este admiravel mechanismo da natureza, que he certo se acha nos animaes, he tambem indubitavel, que o ha nas plantas: e ainda nestas o suppoem Boerhaave, ou mais necessario, ou mais conhecido, quando d'ellas faz parallello para os animaes, dizendo, que assim como as plantas attrahem a si o nutrimento liquido do ar pelos canaesinhos absorbentes, da mesma sorte os animaes: *ut plantæ bibulis superficiei fistulis ex aere hauriunt applicatos humores, ita et animalia.* E pouco mais acima tinha dito, que *supposto a raiz da planta seja o orgaõ mais ordinario, por que ellas costumaõ receber o alimento, tambem o recebem pela superficie de todo o corpo, conseguindo a nutriçaõ por meio das boccas attrahentes, que estaõ dispostas em ordem mui densa por toda a superficie,*

Boerh. *El. Chym.* T. I. pag. 32.

Ibi pag. 28. *de radice veg.*

com

com as quaes chupaõ o humor do pabulo, e o vaõ introduzindo pelos canaesinhos, que o distribuem a todo o corpo da planta. No que fundado o meſmo Author affirma, *que com razaõ ſe podem comparar estes vasos, ou canaesinhos dos vegetaes ás veias lacteas, meſentericas, e absorbentes dos animaes.*

Eu conſiderando eſte modo admiravel da nutriçaõ das plantas, e ouvindo dizer, que huma mui vulgar da India, a que Linneo chama *Cotyledon Laciniata*, ſe conſervava no ar arrancada da terra, quiz certificar-me com a experiencia. Pendurei-a por hum fio no ar livre de hum alpendre, tendo primeiro examinado o ſeu pezo. Continuou por muitos dias na meſma fórma, e freſcura, e ainda brotando algumas folhas novas; porém depois foi diminuindo no pezo, que eu obſervava com frequencia, de ſorte, que paſſados alguns mezes naõ pezava já ametade, ainda que na apparencia ſe moſtrava verde; pelo que vim a concluir, que a *Cotyledon Laciniata* naõ ſe nutria adequadamente do ar, e que aquella vida, que parecia conſervar, era huma vida attenuada com huma atrophia, e maraſmo, em que por fim faltando-lhe o alimento externo neceſſario ſe conſervava violenta, conſumindo-ſe a ſi meſma: aſſim como aquelle, de quem falla o Poeta, que obrigado de huma fome deſeſperada ſe alimentava de ſeus proprios membros: *Minuendo corpus alebat.*

Lin. *Syſt. plant.* G. 628. ſp. 6.

He mui differente a vida, e mui propria a vegetaçaõ da planta *Aerides*, que agora vou deſcrever, a qual pendurada por hum fio no ar livre, vai ſempre creſcendo aſſim na extençaõ, como no pezo.

O Calix he huma pequena ſpatha, ovada, monoflora, e preſiſtente.

A Corolla ſaõ cinco petalos, ovados, planos, expanſos, e quaſi iguaes.

O Nectario conſta de duas folhas horizontaes: d'eſtas a inferior he oblonga, carnoſa, hum pouco concava em fórma de barquinha: a ſuperior cobre, e fecha a inferior, e de

e de hum lado ſe levanta, encurvando-ſe para cima em fórma de tubo ſubulado: o outro lado ſe dilata horizontalmente cortado em trez lacinias, duas das quaes ſaõ obtuſas, e verticalmente parallellas; e a terceira, que fica no meio, he de figura conica.

Os Stamines ſaõ dous filamentos, breves, e elaſticos, pegados á extremidade interna da folha inferior do nectario. As Antheras ſaõ em fórma de lentilha, ſimples, e cobertas.

O Piſtillo conſta de hum Germine trigono, tenue, e curvo, que ſuſtenta a flor. Naõ tem Stylo. O Stigma he huma pequena concavidade, junta á baſe dos Stamines.

O Pericarpio aborta.

A Raiz he compoſta de bulbos lineares, ſimples, compridos, e enlaçados. O Caule he redondo, groſſo, ſimpliciſſimo, igual, inflexo, e comprido de hum pé, ou mais. As folhas ſaõ grandes, lizas, craſſas, reflexas, compridas de oito pollegadas, e largas de huma, com os lados parallelos, e a extremidade obtuſa, e emarginada: com os petiolos curtos, e vaginantes. A flor he pallida, maior que hum jaſmim, de viſta agradavel, e cheiro mui ſuave. Naſce em ramos ſimples, lateraes, e reclinados, quaſi do meſmo comprimento, que as folhas.

Eſta planta he de origem agreſte, que nos bosques coſtuma naſcer paraſitica, pegada aos ramos das arvores; pois já ſe vê, que ſendo pezada de huma, e mais libras, era impoſſivel ficar ſuſpenſa, no ar, ſem ſe ſegurar de algum modo. Trazida dos bosques, ſe pendura por huma cordinha no ar livre, ou ſe mete em hum ceſtinho de qualquer materia, porém tecido com aberturas por todas as partes, e ſuſpenſo da meſma ſorte por hum cordel. Neſta poſtura, ſem ſe lhe lançar terra, agoa, ou alguma outra couſa, vai continuamente creſcendo, ainda que lentamente, e florece no Outono. Allí meſmo ſe multiplica, gerando cada anno novos filhos, com raizes novas, e novas folhas, que ſeparando-ſe da planta mãi, e ſuſpenſos na meſma fór-

ma,

ma, vaõ todos vegetando, florecendo, e multiplicando-se por largos annos, sem receberem outro alimento, que do ar.

Eu tendo achado nas especies, e systema das plantas de Linneo huma planta, a que elle chama *Flos Aeris*, e he a segunda especie do *Epidendro*, de que he Author Kempfer, e diz, que nasce na Java, com o caule escandente, poucos ramos, as folhas lanceoladas, e os petalos da corolla lineares em figura de aranha, suspeitei, em razaõ de lhe chamar *Flor do ar*, se seria a nossa *Aerides*, que na lingoa de Cochinchina se chama *Phaong Lon*, que quer dizer *flor do ar*; mas adverti logo, que he totalmente diversa, como se póde ver combinando o habito de ambas as plantas, de que se fórma a differença especifica: e tambem a fórma da mesma flor, que na nossa em nada se parece com a aranha, nem nos petalos, nem no nectario: e muito mais, que este na nossa naõ he turbinado, caracter essencial do Epidendro de Linneo.

Na nossa planta *Aerides*, naõ sei, que até agora se tenha achado virtude alguma; mas nem por isso se póde dizer, que he inutil o seu descobrimento, e exame. Por elle se vê claramente, que hum vivente corporeo póde conservar-se por largos annos sem tomar outro alimento, que o dos effluvios do ar, que o cercaõ. Pois naõ será util este exemplo para salvar a vida de hum homem, que apertado de huma esquinencia, ou outro semelhante accidente, naõ póde engollir mantimento algum? Em tal caso, porque naõ pereça o enfermo desfallecido, póde-se-lhe acodir naõ só com clysteres nutritivos, cujos vapores entrem nas veias lacteas, ou com os cheiros de guizados substanciaes, mas tambem com fatias de paõ ensopadas em bons caldos temperados com vinho, e noz muscada, que applicadas exteriormente de ambas as partes na regiaõ do estomago, introduzaõ nelle as partes mais subtís do alimento por meio dos vasos inhalantes.

E para que alguem naõ julgue ser isto huma mera especu-

peculaçaõ, póde consultar as obras do Doutor Haller, Phisico Mór da Rainha de Gram-Bretanha, e digno discipulo do grande Boerhaave, o qual nas Prelecções sobre a economia do animal affirma, ter-se já mostrado em Inglaterra, que hum homem por meio de fomentações applicadas exteriormente, póde receber tanto alimento, quanto lhe baste para sustentar a vida: *In Britania demonstratum est hominem de solâ materia extrinsecus per fomenta applicatâ tantum sibi sumere, ut vitam utcunque sustinere possit.*

Haller *Præ-lect.* n. 1021.

ME-

MEMORIA

Em que se dá noticia de diversas especies de abelhas, que daõ mel, proprias do Brasil, e desconhecidas na Europa.

POR VICENTE COELHO DE SEABRA.

A Familia dos Insectos, que hum grande numero de homens tem contemplado como insignificante, inutil, e mesmo superflua, he aquella, que sendo observada pelos olhos de Swammerdam, Maraldi, Reaumur, Linneo, Bomare, &c. he summamente necessaria, e util: e me faz dizer com Plinio: *In his tam parvis, atque tam nullis quæ ratio! Quanta vis! Quam inextricabilis perfectio!* Para prova disto basta lançarmos os olhos sobre as abelhas, e examinarmos, como estes grandes observadores, as suas funcções, o seu governo, a sua industria, a arte dos seus trabalhos, e a utilidade em fim, que nos resulta do seu mel, e cera. Eu me naõ demorarei em narrar cada huma d'estas cousas, bem descriptas pelos Authores acima referidos, e tractadas profundamente por Bomare nos seus Diccionarios de Historia Natural. O meu objecto he sómente dar noticia de algumas especies de abelhas melliferas, proprias do Brasil, principalmente da Capitanía de Minas geraes, que naõ fôraõ ainda descriptas pelos Naturalistas da Europa.

Linneo no seu *Systema Naturæ*, mete as abelhas na ordem *Hymenoptera*: e no genero *Apis*, sómente faz mençaõ da especie *Apis mellifera pubescens, thorace subgriseo, abdomine fusco, pedibus posticis glabris, utraque margine ciliatis.* Esta he justamente a abelha, que se cultiva em Portugal, e quasi toda a Europa. Mas além d'esta ha ainda na mesma Europa outras muitas abelhas melliferas, que Boma-

mare refere no ſeu Diccionario de Hiſtoria Natural, como ſaõ abelhas *bourdons*, abelhas ſolitarias, abelha fura-páos, abelhas *maçonnes*, abelhas mineiras, e outras, as quaes todas comprehende debaixo do nome de Abelhas *Villageoises*.

A maior parte d'eſtas abelhas, por naõ dizer todas, ſaõ deſconhecidas no Braſil. A meſma abelha vulgar *Apis mellifera* de Linneo, naõ he allí viſta. Ha porém naquelle Paiz muitas outras differentes eſpecies de abelhas, que daõ mel, e a maior parte tambem daõ cera, ainda que differente entre ſi, e differente da cera da abelha vulgar da Europa. Sendo o Braſil taõ fertil d'eſtes uteis inſectos, os ſeus habitantes naõ cuidaõ na ſua cultura. As colmeias ſaõ allí deſconhecidas: e quando a neceſſidade os obriga, ſervemſe das colmeias, que as meſmas abelhas fazem diſperſamente, aonde a natureza lhes offerece lugar commodo. A cera he muito abundante em algumas; porém antes querem comprar por hum preço cariſſimo a que da Europa, e da Africa lhes vai, do que cultivar a que a natureza taõ liberalmente lhes dá. Tanto póde o ocio! E tal he a deſgraça de hum Paiz abundante, onde a induſtria he deſconhecida! O mel de algumas he ſuperior ao mel Portuguez. A eſtructura das caſas, e dos favos de mel he diverſa, nas diverſas abelhas. Eu vou appreſentar na Memoria, que hoje offereço á Academia huma taboa Synodica d'eſtas abelhas; onde do modo poſſivel darei huma idéa das ſuas differentes eſpecies, e da utilidade, que ſe póde tirar de cada huma. Para maior clareza faço quatro divisões d'eſtas abelhas. Na primeira comprehendo aquellas, que ſaõ deſarmadas, iſto he, que naõ mordem, e ſaõ deſtituidas de aculeo, e humor cauſtico no anus: aquí entraõ ſeis eſpecies *Urusû*, *Mumbuca*, *Mandasaia*, *Jatai*, *Mendorí*, *Bate-Chapeo*. Na ſegunda divisaõ entraõ aquellas, que naõ mordem, nem tem aculeo, mas lançaõ pelo anus, ſegundo parece, hum humor cauſtico, o qual ſendo lançado ſobre qualquer parte do noſſo corpo, ſerve de hum eſtimulante mais, ou menos activo: com elle ſe deſen-

defendem. Aquí entraõ trez efpecies *Caga-fogo*, *Jandaíra*, e *Tubíba*. Na terceira divifaõ entraõ aquellas, que naõ mordem, mas offendem á maneira das vefpas com hum, ou mais aculeos envenenados, que tem junto ao anus. Comprehende duas efpecies *Marimbondo vulgar*, e *Marimbondo Inchû*. Na quarta em fim comprehendemos aquellas, que fómente mordem: tal he a *Arapúa*. Eu me firvo dos feus nomes mais vulgares.

Abelhas melliferas proprias do Brafil.

Divifaõ.

1.ª *Desarmadas*: *destituidas de aculeo, e humor caustico, e naõ mordem.*

Efpecies

I. *Urusû*: abelha grande: côr avermelhada: thorax, e cabeça manchados com eftrias negras.

Urusû pé de páo: faz fua cafa dentro dos páos, e ordinariamente junto á raiz: a cafa he grande: os favos quafi cylindricos, ou melhor, em fórma de hum folido eliptico: grandes: mais compridos, que huma pollegada, e quafi de huma pollegada de largura: unidos como em racemo. Cera aloirada: em muita quantidade. Mel branco aloirado: em quantidade vinte libras, ou quartilhos.

Urusû do chaõ: a fua cafa he fubterranea, e em tudo o mais femelhante á antecedente. Quando temem alguma coufa, huma d'ellas occupa a porta da cafa, e de forte a tapa com a cabeça, que he difficil dar com a mefma porta.

II. *Mumbúca.* Negra : do tamanho da *Urusû.* Faz a ſua caſa grande, ordinariamente dentro dos ramos das arvores. Os ſeus favos ſaõ grandes, e unidos. Cera negra, e muita. Mel aloirado: muito doce: em quantidade até quarenta, e tantos quartilhos. Criaõ huma eſpecie de reſina, que os Braſileiros chamaõ *cerol de Mumbúca*: e uſaõ d'elle como reſolvente, madurante, e abſtergente.

III. *Mandasaia.* Avermelhada: mais pequena, que as antecedentes. Faz as ſuas caſas ordinariamente nos troncos das arvores. Favos encadeados, e menores, do que os da *Urusû.* Cera negro-aloirada. Mel em menor qantidade, do que o das antecedentes, e loiro.

IV. *Jataí.* Corpo muito pequeno: aloirado : as tibias muito compridas: faz a ſua caſa em páos, e a ſua porta ſahe para fóra em fórma de trombeta de cera, que de noite fechaõ com cera.

Jataí verdadeira. Fazem as caſas nos troncos ſeccos. Favos orbiculados, encadeados, e do tamanho de bago de uva. Cera loira. Mel branco : muito doce: em quantidade até cinco libras, ou quartilhos.

Jataí mosquito, ou *Moça branca* Muito pequena: alvarenta. Faz a ſua caſa nos páos ſeccos. Favos arredondados : pequenos: encadeados. Cera esbranquiçada. Mel muito branco, e doce: em quantidade até huma libra.

Jataí amarella. Tem maior corpo, do que as outras *Jataís*: loira: tem as extremidades das azas eſbranquiçadas. Em quanto á caſa, favos, cera, e mel he muito ſemelhante á *Jataí* verdadeira.

V. *Mendorím.* Maior, do que a *Jataí.* Côr ouracea, avermelhada. Faz as ſuas caſas nas partes mais altas das arvores,

res, e formaõ na porta huma muito comprida trombeta de cera, que naõ tapaõ como a *Jatai*. Favos cylindricos, de comprimento de meia pollegada, e até cinco linhas de largura: unidos. Cera vermelho-amarellada. Mel loiro: até quatro quartilhos.

VI. *Bate-Chapéo*. Do tamanho da antecedente. Côr fusco-avermelhada. Faz a sua casa no alto das arvores. Favos compridos. Cera aloirada. Mel alvo: alguma cousa azedo: em quantidade até seis quartilhos.

2.ª *Abelhas sem aculeo; mas que lançaõ pelo anus* (segundo parece) *hum humor caustico, e naõ mordem.*

Especies

I. *Caga-fogo*. Negra. Corpo delgado. Tibias peludas, e compridas. Faz as suas casas nos troncos seccos das arvores ordinariamente. Favos grandes. Cera quasi negra. Mel espesso: esbranquiçado: até huma libra em quantidade.

II *Jandaíra*. Abelha negro-avermelhada: dotada de hum humor mais caustico: no mais semelhante á antecedente.

III *Tubíba*. Menor, do que as duas precedentes: em quanto ao mais muito semelhante á Caga-fogo.

3.ª *Abelhas com aculeo venenoso no anus, qué offendem á maneira das vespas: naõ mordem: naõ tem cera.*

I. *Marimbondo vulgar*. Negro. Mais pequeno, que o seguinte: comprido. Casa redonda formada ás vezes ao redor de hum ramo de qualquer arvore; ás vezes porém sómente apegada, ou ao ramo, ou a outra qualquer parte por huma substancia propria como coriacea: he patente, e coberta de huma como materia coriacea: internamente he dividida, como por laminas horizontaes, cuja superficie inferior he liza, e a supperior toda cheia de cellulas cylindricas, cheias de hum clarissimo mel, e summamente doce. Naõ tem cera. Estas laminas horizontaes ás vezes saõ convexo-concavas, com a convexidade

xidade para cima, e a concavidade para baixo, e ſaõ mais, ou menos multiplicadas. O mel he muito pouco.

II. *Marimbondo Inchû.* { amarello, rajado, preto. } Maior, do que o vulgar. Naõ tem cera. O mel he ſemelhante ao do *Marimbondo vulgar*. As ſuas caſas ſaõ unidas ás arvores: muito raras vezes a outras couſas. A materia, de que ſaõ feitas, nos he deſconhecida; porém he como coriacea. A figura he varia, ou quaſi cylindrica: tapada por ambas as baſes, e ſómente com huma pequena porta ao lado, ou globoſa, ou eliptica, maior, ou menor. Toda a caſa he patente pela ſua ſuperficie externa; mas por dentro tem a meſma eſtructura, que a da eſpecie antecedente. D'eſta eſpecie já ha noticia em algumas partes da Europa; por ſe ter mandado para cá algumas caſas.

4.ª *Abelhas que mordem.*

I. *Arapuá.* Grande. Negra. Cheia de pêlo pelas pernas, e abdomen. Faz a ſua caſa, ou nos buracos das paredes, ou nos ramos delgados das arvores, abraçando os meſmos ramos: he cercada por fóra com huma groſſa cruſta, ou capa formada de eſterco, pedaços de páo miſturados, e unidos com terra. A figura he quaſi orbicular. Favos de figura oval: negros. Mel groſſo: avermelhado: e doce com alguma couſa de azedo. Cera reſinoſa: negra: e muito impura.

De todas eſtas ultimas eſpecies ſe tira o mel ſem perigo, fazendo-ſe junto á caſa fumo: principalmente fumo de tabaco, pelo qual ſe affugentaõ. Além d'eſtas, eſpecies ha outras, de que, ſe eu lá eſtiveſſe, poderia dar noticia: por hora contentar-me-hei com iſto.

OBSER-

OBSERVAÇÕES METEOROLOGICAS

Feitas no Real Collegio de Mafra no anno de 1785.

POR D. JOAQUIM DA ASSUMPÇAÕ VELHO.

AS presentes Observações foraõ feitas com os mesmos Instrumentos, e do mesmo modo, que as do anno precedente.

JANEIRO DE 1785.

Dias do mez.	BAROMETRO.			THERMOMETRO.			PLUVIMETRO.		
	Manhan	Tarde	Noire	M.	T.	N.	M.	T.	N.
	P. L. D.	P. L. D.	P. L. D.	Grad. de Farenhei.			L. d.	L. d.	L. d.
1	26 11 7	26 10 4	26 9 5	52	54	53	0,4	1,6	5,2
2	26 9 6	26 11 2	27 0 2	49	52	51	2,1	1,4	0,9
3	27 1 3	27 2 6	27 3 0	51	55	52	1,3	1,1	0
4	27 3 0	27 3 0	27 2 3	54	55	54	0,8	0,2	0,1
5	27 1 6	27 1 5	26 10 5	53	56	54	0	0	6
6	26 10 7	26 11 0	27 2 6	52	53	52	4,5	2,6	1,8
7	27 3 4	27 4 5	27 8 0	50	50	50	0	0	0
8	27 9 0	27 9 5	27 9 0	48	53	49	0	0	0
9	27 8 4	27 8 0	27 6 0	49	53	49	0	0	0
10	27 5 9	27 5 5	27 5 0	47	52	48	0	0	0
11	27 4 5	27 4 0	27 3 0	44	47	46	0	0,2	0,8
12	27 3 0	27 3 2	27 3 0	45	50	49	0	0	0
13	27 2 9	27 3 0	27 2 5	48	53	52	0	0,1	0
14	27 0 0	27 11 2	27 0 0	50	54	48	7,8	2,8	5,4
15	27 2 5	27 6 0	27 6 7	49	53	49	0	0,1	0
16	27 7 0	27 7 0	27 6 5	47	53	51	0	0	0,2
17	27 6 0	27 6 0	27 5 6	51	54	50	0	5	2,3
18	27 5 0	27 4 9	27 4 8	49	51	49	2,1	1	0
19	27 5 0	27 4 6	27 3 1	46	51	46	0,6	0,4	1,1
20	27 2 0	27 1 9	27 3 5	48	53	46	0,4	4,8	0,7
21	27 5 0	27 6 5	27 6 2	43	51	47	0	0	0
22	27 7 5	27 7 8	27 8 0	44	51	48	0	0	0
23	27 8 5	27 8 3	27 8 8	44	52	49	0	0	0
24	27 8 9	27 8 4	27 7 5	46	51	47	0	0	0
25	27 6 5	27 5 9	27 4 5	42	51	47	0	0	0
26	27 4 6	27 5 0	27 6 9	46	50	49	0	0	0
27	27 7 6	27 8 8	27 9 0	47	54	48	0	0	0
28	27 10 0	27 9 5	27 9 4	46	54	48	0	0	0
29	27 9 0	27 8 0	27 7 2	44	52	47	0	0	0
30	27 7 0	27 6 5	27 6 0	45	52	47	0	0	0
31	27 6 5	27 7 9	27 10 0	48	52	48	0	0	0

Rezultado de todo o mez.

	P. L. D.					
Maior elevaçaõ	27 10 0	Maior calor - -	56	Toral da chuva.		
Menor elevaçaõ	26 9 5	Menor calor -	42	P.	L.	D.
Elevaçaõ media	27 5 0	Calor medio -	50	8	9	3

JA-

JANEIRO.

Ventos e eſtado do Ceo.

Dias do mez	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	O. rij. Ceo cub. nuv. car.	O. rij. Ceo cub. nuv. car.	O. m. rij. de temp. Ceo c.
2	O. m. rij. de temp. Ceo c. t.	O. m. rij. de temp. torv.	O. m. rij. de temp. torv.
3	O. rij. nuv. enter.	O. rij. e N. E. Ceo cl.	O. rij. nuv. rar.
4	S. m. rij. de temp. hum.	S. m. rij. de temp. hum.	S. m. rij. de temp. hum.
5	S. rij. de temp. hum.	S. de temp. Ceo cub.	S. E. rij. Ceo cub.
6	S. E. rij. Ceo cub. nuv. car.	S. E. rij. Ceo c. nuv. car.	E. Ceo cub. nuv. car.
7	N. Ceo cub.	N. Ceo cub.	N. E. Ceo cl.
8	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
9	E. Ceo cl.	E. Ceo cl.	E. Ceo cl.
10	E. br. nev. alt.	E. br. nev. alt.	S. E. Ceo cub.
11	S. E. Ceo cub.	S. E. Ceo cub.	S. E. Ceo cub.
12	S. E. Ceo cub.	S. E. Ceo cub.	S. E. Ceo cub.
13	S. E. Ceo cub.	S. E. Ceo cub.	S. E. Ceo cub.
14	S. O. m. rij. de t. Ceo cub.	S. O. m. rij. de t. dep. O. C. c.	N. O. Ceo cub. nuv. car.
15	N. O. alg. nuv. ſolt.	N. alg. nuv. ſolt.	N. Ceo cl. e lind.
16	S. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.
17	S. E. e N. O. Ceo cub.	S. Ceo cub. nuv. car. hum.	S. Ceo cub. nuv. car.
18	S. E. Ceo cub. nuv. car.	S. E. Ceo cub. nuv. car.	O Ceo cub.
19	O. Ceo cub.	O. Ceo cub. nuv. car.	O Ceo cub. nuv. car.
20	S. Ceo cub. nuv. car.	S. Ceo cub. nuv. car.	S. E. Ceo ennevoado.
21	E. alg. nuv. ſolt.	E. alg. nuv. ſolt.	E. Ceo cl. e lind.
22	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.
23	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.
24	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.
25	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.	S. br. Ceo cub.
26	S. br. dep. E. alg. nuv.	E. alg. nuv.	N. E. Ceo cub. nev. alt.
27	N. E. br. Ceo c. nev. alt.	N. E. nuv. ſolt.	N. E. Ceo cl. e lind.
28	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
29	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cub. nev. alt.
30	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cub. nev. alt.
31	N. Ceo cub. nev. alt.	N. Ceo cub. nev. alt.	N. E. m. ſeco Ceo cl. e lind.

Dias

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de torv.
9	13	0	3	5	1

FE-

FEVEREIRO DE 1785.

Dias do mez.	BAROMETRO. Manhan P. L. D.	Tarde P. L. D.	Noite P. L. D.	THERMOMETRO. Grad. de Farenhei. M.	T.	N.	PLUVIMETRO. M. L. d.	T. L. d.	N. L. d.
1	27 10 2	27 9 9	27 8 6	40	46	43	0	0	0
2	27 8 0	27 7 9	27 7 5	45	49	48	0	0	1,8
3	27 8 0	27 6 5	27 8 0	44	49	47	0	0,6	2,2
4	27 8 2	27 6 5	27 7 0	41	47	45	0,4	0	1
5	27 8 0	27 8 5	27 8 8	48	50	49	0	0	1,7
6	27 9 0	27 9 0	27 9 1	48	53	51	0,3	0,4	0,2
7	27 8 9	27 8 6	27 8 5	49	52	48	0	0	0,5
8	27 8 2	27 9 0	27 9 0	49	53	48	0	0	0
9	27 9 7	27 9 5	27 9 3	45	55	52	0	0	0
10	27 9 5	27 9 0	27 8 2	45	55	52	0	0	0
11	27 8 0	27 7 9	27 7 0	50	57	50	0	0	0
12	27 6 5	27 6 1	27 5 6	47	54	49	0	0	0
13	27 5 1	27 5 0	27 4 9	46	53	48	0	0	0
14	27 5 0	27 4 5	27 3 8	43	45	45	0	3,2	0,4
15	27 3 2	27 3 0	27 2 6	42	44	47	1,8	2,5	1,1
16	27 2 4	27 2 3	27 0 0	44	50	48	0,3	0,9	2
17	26 11 0	26 10 2	26 11 3	45	50	46	3,2	0	0,7
18	26 11 4	27 0 0	27 0 5	44	49	46	0,5	0	1,6
19	27 2 3	27 1 5	27 3 6	45	47	44	1,9	0	0,5
20	27 2 3	27 2 5	27 2 5	41	47	45	0	0	0,2
21	27 2 5	27 2 6	27 2 8	41	46	44	0,1	0,2	3,9
22	27 4 0	27 5 3	27 6 1	42	49	46	0	0	0
23	27 6 2	27 6 2	27 5 0	45	51	46	0,1	0,2	0
24	27 5 2	27 5 9	27 6 6	45	50	45	0,8	0,3	0
25	27 6 9	27 7 5	27 7 0	47	55	50	0	0	0
26	27 7 0	27 6 5	27 6 0	49	55	50	0	0,2	0
27	27 5 8	27 5 0	27 3 0	52	56	52	0,1	0,1	3,1
28	27 2 6	27 2 2	27 2 0	51	54	48	6,6	0	1

Rezultado de todo o mez.

	P. L. D.			Total da chuva.		
				P.	L.	D.
Maior elevaçaõ	27 10 2	Maior calor - -	56			
Menor elevaçaõ	26 10 2	Menor calor -	40			
Elevaçaõ media	27 5 5	Calor medio -	45	4	8	5

MAR-

FEVEREIRO.

Ventos e estado do do Ceo.

Dias do mez.	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	N. E. fec. Ceo cl. e lind.	S. E. fec. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
2	N. Ceo cub. nev. alt.	N. Ceo cub. nev. alt.	N. alg. nuv. enter.
3	N. Ceo cub.	N. O. Ceo cub. nuv. car.	N. O. Ceo cub. nuv. car.
4	N. O. Ceo cub.	N. O. nuv. enter. e car.	N. O. Ceo cub. nuv. car.
5	O. Ceo cub. nuv. car.	O. Ceo cub. nuv. car.	O. Ceo cub. nuv. car.
6	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.
7	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.
8	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.	N. E. br. Ceo cl. e lind.
9	N. E. br. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. br. Ceo cl. e lind.
10	E. m. br. Ceo cl. e lind.	E. m. br. Ceo cl. e lind.	E. muito br. Ceo cl. e lind.
11	E. m. br. Ceo cl. e lind.	E. m. br. Ceo cl. e lind.	N. muito br. Ceo cl.
12	Vario m. br. Ceo cl. e lind.	N. O. br. Ceo cl.	N. E. Ceo cl. e lind.
13	Vario Ceo cl. dep. cub.	N. O. e S. ao mesm. temp.	N. O. Ceo cub.
14	Muito vario Ceo cub.	Muito vario Ceo cub.	S. E. Ceo cub nuv. car.
15	S. E. Ceo cub. nuv. car.	S. E. Ceo cub. nuv. car.	S. E. Ceo cub. nuv. car.
16	S. E. Ceo cub. nuv. car.	S. E. Ceo cub. nuv. car.	S. E. Ceo cub. nuv. car.
17	N. E. Ceo cub. nuv. car.	N. O. Ceo cub. nuv. car.	N. E. Ceo cub. nuv. car.
18	N. E. Ceo cub. nuv. car.	O. nuv. folt.	O. nuv. folt. e car.
19	O. dep. N. O. n. ent. e car.	N. O. nuv. enter. e car.	N. O. nuv. enter. e car.
20	S. E. br. Ceo cub.	S. E. br. Ceo c. dep. O. br.	O. br. nev. alt. dep. N. O. nuv. car.
21	N. O. n. f. e car. chuv. dep.	N. O. n. f. e car. chuv. dep.	N. O. nuv. folt. e car.
22	N. O. nuv. folt. e car.	N. O. n. f. dep. N. Ceo cl.	N. muito br. Ceo cub.
23	N. e S. e ao m. t. N. b. S. alt.	N. junt. a ter. e S. mais alt.	S. E. br. Ceo cub.
24	S. E. rij. Ceo cub.	S. E. Ceo cub.	S. E. br. Ceo cub.
25	S. E. junt. a ter. e N. O. alt.	N. alt. e S. E. junt. a ter.	S. nev. alt.
26	S. E. nev. alt. humidade.	S. nuv. car. nev. e humid.	S. O. br. nev. esp. e hum.
27	S. O. nev. esp. gr. hum.	S. O. Ceo cub. n. car. hum.	S. O. Ceo c. nuv. car. hum.
28	S. O. Ceo cub. n. car. hum.	O. Ceo c. dep. N. O. n. ent.	N. O. nuv. folt.

Dias

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de torv.
5	17	2	3	0	0

MARÇO DE 1785.

Dias do mez.	BAROMETRO. Manhan P. L. D.	BAROMETRO. Tarde P. L. D.	BAROMETRO. Noite P. L. D.	THERMOMETRO. M. Grad. de Farenhei.	THERMOMETRO. T.	THERMOMETRO. N.	PLUVIMETRO. M. L. d.	PLUVIMETRO. T. L. d.	PLUVIMETRO. N. L. d.
1	27 2 9	27 3 0	27 4 8	45	49	44	1	0	0
2	27 5 0	27 5 0	27 4 5	35	42	41	0	0	0
3	27 4 0	27 3 6	27 1 2	42	51	50	0	0	1,8
4	27 0 4	27 0 8	27 3 0	44	50	48	4,4	0	0
5	27 4 1	27 4 6	27 5 0	44	52	50	0	0	0
6	27 4 2	27 3 2	27 1 0	47	55	52	0	0	8,4
7	27 0 9	27 1 0	27 1 5	51	55	54	0,2	0,4	0,9
8	27 2 1	27 2 4	27 2 8	52	54	52	0,5	0,6	0,8
9	27 2 0	27 1 0	27 3 0	49	55	54	2	0,8	4,4
10	27 4 0	27 4 6	27 4 0	51	54	53	0	0	0
11	27 3 6	27 3 0	27 1 0	52	57	56	0	0	0
12	27 0 5	27 0 0	26 0 6	52	58	55	0	0	0
13	26 11 0	27 0 0	27 0 2	50	55	52	0	0	0
14	27 0 4	27 1 0	27 1 5	49	56	52	0	0	0
15	27 2 0	27 2 9	27 2 4	49	55	51	0	0	0
16	27 1 0	27 0 8	27 2 0	48	56	52	0	3,2	5
17	27 2 0	27 2 5	27 4 0	49	54	50	0,7	1	0
18	27 5 0	27 5 9	27 5 2	50	56	52	0	0,8	0,6
19	27 4 6	27 4 9	27 5 1	47	57	53	0,2	0,1	0
20	27 5 2	27 5 4	27 5 2	49	59	53	0	0	0,4
21	27 5 0	27 4 8	27 4 0	50	56	50	0,3	0,6	0
22	27 4 0	27 4 0	27 4 5	46	56	50	0	0,2	0
23	27 4 8	27 4 6	27 5 0	48	57	52	0	0	0
24	27 4 8	27 4 6	27 3 9	49	58	52	0	0	2
25	27 4 8	27 5 0	27 5 1	48	52	49	0	0	0
26	27 5 6	27 6 2	27 7 1	44	54	48	0	0	0
27	27 7 0	27 6 6	27 5 8	44	53	51	0	0	0
28	27 5 0	27 3 2	27 1 0	48	54	50	0	1,2	1,5
29	27 2 0	27 2 8	27 3 0	49	56	51	1,8	0	1,5
30	27 2 3	27 1 5	27 2 5	52	53	52	0,5	1,4	4,9
31	27 2 6	27 2 8	27 3 2	51	56	52	0,8	2,3	0,3

Rezultado de todo o mez.

	P. L. D.					
Maior elevaçaõ	27 7 1	Maior calor - -	58	Total da chuva		
Menor elevaçaõ	26 10 6	Menor calor -	35	P.	L.	D.
Elevaçaõ media	27 3 0	Calor medio -	51	4	9	5

ABRIL

MARÇO.

Ventos e eſtado do Ceo.

Dias do mez.	Manhan	Tarde	Noite
1	N. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.	N. O. nuv. ſolt. dep. N. E.
2	N. E. rij. Ceo cl. e lind.	N. E. dep. N. Ceo cl.	N. Ceo cl.
3	N. dep. N. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.	S. E. Ceo cub. nuv. car.
4	S. E. rij. Ceo c. nuv. car.	E. e S. E. dep. N. E. Ceo c.	N. O. br. Ceo cl.
5	N. O. m. br. C. cl. dep. cub.	N. O. Ceo cub.	O. br. Ceo cl.
6	S. E. Ceo cub.	O. rij. dep. S. Ceo cub.	S. Ceo cub. nuv. car. hum.
7	S. O. rij. Ceo c. gr. hum.	O. rij. Ceo cub. humid.	S. O. m. rij. Ceo cub. hum.
8	S. O. m. rij. Ceo cub. hum.	S. O. rij. Ceo cub. hum.	S. O. br. Ceo cub. hum.
9	S. rij. Ceo cub. humid.	S. O. m. rij. Ceo cub. hum.	S. O. Ceo cub. hum.
10	S. O. Ceo cub. humid.	S. O. Ceo cub. humid.	S. O. br. Ceo cub. hum.
11	S. muito rij. Ceo cub.	S. rij. Ceo cub.	S. E. Ceo cub.
12	E. rij. junt. a ter. e S. alt.	S. rij. Ceo cub.	S. Ceo cub.
13	S. O. Ceo cub.	S. O. nuv. enter.	E. br. Ceo cl.
14	E. br. Ceo cl. dep. S. E.	S. e dep. S. O. nuv. enter.	S. O. nuv. enter.
15	S. O. br. nuv. enter.	O. br. nuv. enter.	S. E. br. Ceo cl. e lind.
16	S. E. rij. nev. alt.	S. E. m. rij. nuv. car.	S. E. rij. nuv. car.
17	S. E. rij. nuv. car.	S. E. rij. nuv. car.	S. E. rij. nuv. car.
18	S. E. rij. nuv. car.	S. E. rij. nuv. car.	S. E. nev. alt.
19	S. E. Ceo cub.	S. E. Ceo cub.	S. E. br. alg. nuv. ſolt.
20	S. E. Ceo cub.	S. E. e N. O. ao meſm. t.	S. E. Ceo cub.
21	S. E. Ceo cub.	S. E. Ceo cub. nuv. car.	S. E. dep. N. E. Ceo cl.
22	S. E. Ceo cub.	S. E. e N. O. nuv. car.	N. br. Ceo cl. e lind.
23	S. E. Ceo cub.	S. E. e N. O. n. car. dep. C. cl.	N. Ceo cl. e lind.
24	S. E. Ceo cub.	S. E. e N. O. nuv. car.	S. E. Ceo cub.
25	S. E. Ceo cub.	S. E. e N. O. Ceo cub.	N. br. Ceo cl. e lind.
26	E. br. dep. N. alg. nev. ſolt.	N. O. e S. E. alg. nuv. ſolt.	N. E. Ceo cl. e lind.
27	*	N. O. e S. E. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.
28	S. E. Ceo cub.	S. O. gr. fur. e panc. de chu. p.	S. O. m. rij. Ceo c. nuv. car.
29	N. O. rij. nuv. car.	N. O. rij. nuv. car.	O. dep. S. O. m. r. C. c. n. car.
30	S. O. m. rij. Ceo cub. n. car.	O. e dep. N. O. nuv. car.	S. e N. O. rel. e torv. ao long. dep. S. O. rij.
31	O. m. rij. Ceo cub. n. car.	O. Ceo cub. nuv. car.	O. Ceo cub. nuv. car.

Dias

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de torv.
1	19	0	5	2	1

ABRIL

ABRIL DE 1785.

Dias do mez.	BAROMETRO. Manhan P.	L.	D.	Tarde P.	L.	D.	Noite P.	L.	D.	THERMOMETRO. Grad. de Farenhei. M.	T.	N.	PLUVIMETRO. M. L. d.	T. L. d.	N. L. d.
1	27	4	0	27	3	6	26	11	0	52	56	53	0	0	8,6
2	27	0	0	27	1	1	27	3	5	52	56	52	2,2	0,6	1
3	27	4	0	27	5	3	27	7	3	43	49	47	0	0	0
4	27	7	3	27	7	1	27	6	2	37	49	46	0	0	0
5	27	5	9	27	6	0	27	5	5	39	54	50	0	0	0
6	27	5	3	27	5	1	27	6	0	47	56	53	1	0,6	0,2
7	27	6	0	27	6	5	27	7	0	51	56	53	0,4	0,6	0,2
8	27	7	1	27	7	5	27	7	3	51	55	52	0,1	0	0
9	27	7	8	27	7	4	27	8	0	51	55	49	0	0	0
10	27	8	2	27	8	1	27	8	9	47	60	56	0	0	0
11	27	8	5	27	8	8	27	8	0	53	64	55	0	0	0
12	27	8	1	27	8	5	27	7	0	52	66	61	0	0	0
13	27	6	4	27	6	5	27	6	0	58	64	56	0	0	0
14	27	6	2	27	6	1	27	6	2	54	66	57	0	0	0
15	27	6	5	27	6	4	27	6	6	56	70	65	0	0	0
16	27	7	0	27	6	0	27	4	8	57	67	61	0	0,2	2,2
17	27	4	6	27	5	0	27	5	2	56	67	61	0	0	0
18	27	4	8	27	5	0	27	5	6	53	59	53	0,1	1,8	0,9
19	27	6	2	27	7	0	27	6	6	51	58	54	0	0	0
20	27	6	4	27	6	0	27	5	9	52	61	57	0	0,9	0
21	27	6	0	27	6	1	27	7	2	53	58	54	0	0	0
22	27	7	5	27	7	4	27	6	7	52	57	53	0	0	0
23	27	6	5	27	6	0	27	5	5	55	68	57	0	0	0
24	27	5	9	27	5	0	27	4	9	57	69	62	0	0	0
25	27	6	0	27	7	1	27	7	0	60	70	62	0	0	0
26	27	7	3	27	6	7	27	5	8	56	63	60	0	0	0
27	27	5	6	27	5	8	27	5	5	56	65	57	0	0	0
28	27	5	6	27	5	5	27	5	4	56	69	60	0	0	0
29	27	5	6	27	5	8	27	6	4	56	68	60	0	0	0
30	27	6	5	27	6	3	27	5	5	49	64	59	0	0	0

Rezultado de todo o mez.

	P.	L.	D.				Total da chuva. P.	L.	D.
Maior elevaçaõ -	27	8	9	Maior calor - -	70				
Menor elevaçaõ	26	11	0	Menor calor -	37				
Elevaçaõ media	27	6	0	Calor medio -	56		1	9	6

ABRIL

ABRIL.

Ventos, e eſtado do Ceo.

Dias do mez.	Manhan.	Tarde.	Tarde.
1	O. rij. Ceo cub. nuv. car.	O. Ceo cub. dep. S.	S. e O. nuv.car. gr. temp.
2	O. rij. Ceo cub. nuv. car.	O. rij. Ceo cub. nuv. car.	O. rij.C. cl.dep. N.O. rij. Ceo cl.
3	N. nuv. ſolt. e enter.	N.nuv.ſolt.dep.N.E.C.cl.	N. E. Ceo cl. e lind.
4	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.
5	E. Ceo cl. e lind.	E.junt. a ter.e S. alt.n.alt.	E.junt.a t.e S.O.alt.n.ſolt.
6	S.E.junt.a t.eS.O.alt.n.car.	S. nuv. car. gr. humid.	S. nuv.car.dep.O.br.C.cl.
7	O. dep. S. O. nuv. car.	S. O. nuv. car. nev. eſp.	O. dep. N. O. Ceo cub.
8	N. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.
9	N. alg. nuv. ſolt.	N. Ceo cl. e lind.	N.br.dep.N.E.C.cl.e lind.
10	E.e O.juntam. C.cl.e lind.	E.junt. a ter. e O.alt.Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.
11	E. junt. a ter. e O. alt.	E. Ceo cl.	E. Ceo cl.
12	E. junt. a ter. e S. O. alt. nev. alt. e rar.	E. junt. a ter. e S. O. alt. nev. alt. e rar.	E. muito br. Ceo cl.
13	E. junt. a ter. e S.alt. C.c.	E. e N. O. Ceo cub.	E.junt.a ter.eN.alt.dep.S.
14	N. e S. ao m. temp.	N. alt. e S. junt. a ter.	N. muito br.C. cl. e lind.
15	E.junt. a ter. e S.alt.C.cl.	E. muito br. Ceo cl.	E. e S. Ceo cl.
16	E.C.cl.dep.S.E.m.rij.C.c.	S. E. muito rij. Ceo cub.	S.E. Ceo cub. relamp.
17	S. E. dep. S. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.
18	S. alt. e N. junt. a ter.	S. e N. nuv. car.	N. junt. a ter. e S. alt.
19	N. junt.a ter. e S.alt.C.c.	N.junt. a ter. e S.alt.C. c.	N. E. nev. alt. dep. C. cl. e lind.
20	N. E. Ceo cl. e lind.	S.E.e N.O.torv.dep.N.E.	N. E. alg. nev. alt.
21	N. nev. alt.	N. O. nev. alt.	N. O. nev. alt.
22	N. E. nev. alt.	N.O.junt.a ter.e N.E.alt.	E. Ceo cl. e lind.
23	E. br. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.
24	E. br. Ceo cl. e lind.	E. br. Ceo cl. e lind.	E. br. Ceo cl. e lind.
25	E. br. Ceo cl. e lind.	E. dep. S.E. alg.nuv.ſolt.	N. E. br. Ceo cl. e lind.
26	O.junt.a ter.e E.alt. C. cl.	O. junt.a ter.e E.alt.C.cl.	N.O. Ceo cub. nev. alt.
27	N.O.C.c.d.N.e N.E.C.cl.	N. Ceo cl.	N. E. br. Ceo cl. e lind.
28	N. Ceo cl. e lind.	N. br. Ceo cl. e lind.	N. br. Ceo cl. e lind.
29	N.E.dep.E.Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.
30	N. E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.

Dias

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de torv.
13	6	1	1	1	2

MAIO DE 1785.

Dias do mez.	BAROMETRO. Manhan P. L. D.	Tarde P. L. D.	Noite P. L. D.	THERMOMETRO. Grad. de Farenhei. M.	T.	N.	PLUVIMETRO. M. L. d.	T. L. d.	N. L. d.
1	27 5 1	27 5 0	27 5 4	57	63	56	0	0	0
2	27 5 6	27 5 4	27 4 9	54	66	60	0	0	0
3	27 4 8	27 4 5	27 4 4	59	70	66	0	1,4	2,1
4	27 4 0	27 3 4	27 3 9	56	68	60	0	0	4,6
5	27 4 0	27 3 9	27 4 0	57	59	56	2,2	0,9	0
6	27 3 8	27 3 4	27 3 5	54	63	59	0	0	2,6
7	27 3 9	27 3 0	27 4 1	56	64	57	0,7	0,4	0
8	27 4 0	27 4 1	27 5 1	56	63	57	0	0,6	0
9	27 5 4	27 5 3	27 5 4	55	61	56	0,8	0,4	1,2
10	27 5 6	27 5 9	27 6 1	55	58	56	0	0	2,1
11	27 6 3	27 6 5	27 6 6	54	59	55	2,1	0	0
12	27 6 6	27 6 3	26 7 0	53	59	55	0	0	0
13	26 7 2	27 7 4	27 7 5	54	70	63	0	0	0
14	27 7 6	27 7 5	27 6 9	56	68	60	0	0	0
15	27 6 2	27 6 0	27 6 3	54	66	61	0	0	0
16	27 6 6	27 6 8	27 6 4	57	68	61	0	0	6
17	27 6 7	27 6 8	27 7 0	58	65	57	0	0	0
18	27 7 1	27 7 0	27 7 0	54	64	59	0	0	0
19	27 7 0	27 6 9	27 6 6	55	64	56	0	0	0
20	27 6 0	27 5 8	27 5 7	55	63	57	0	0	0
21	27 5 7	27 5 7	27 5 6	56	66	58	0	0	0
22	27 5 8	27 5 7	27 6 0	58	65	58	0,2	0,1	0
23	27 7 0	27 7 4	27 8 0	58	66	59	0,8	0	0
24	27 8 1	27 8 0	27 7 8	56	66	59	0	0	0
25	27 7 9	27 7 8	27 7 6	56	69	60	0	0	0
26	27 7 5	27 7 7	27 7 7	68	79	69	0	0	0
27	27 7 6	27 7 5	27 7 8	68	73	62	0	0	0
28	27 7 7	27 7 7	27 7 5	59	63	57	0	0	0
29	27 7 6	27 7 7	27 8 0	57	61	56	0	0	0
30	27 8 3	27 8 2	27 8 3	54	61	55	0	0	0
31	27 8 2	27 8 1	27 8 5	52	59	55	0	0	0

Rezultado de todo o mez.

	P.	L.	D.					
Maior elevaçaõ	27	8	3	Maior calor - -	79	Total da chuva		
Menor elevaçaõ	27	3	4	Menor calor -	53	P.	L.	D.
Elevaçaõ media	27	6	3	Calor medio -	61	2	5	2

MAIO

MAIO.

Ventos e eſtado do Ceo.

Dias do mez.	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	N. junt. a ter. e S. E. alt.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
2	E. junt. a ter. e S. O. alt.	S. E. Ceo cl. e lind.	S. E. Ceo cl.
3	S. E. alg. nuv. ſolt.	S. e N. O. nuv. car. torv.	S. nuv. car.
4	S. Ceo cub.	S. Ceo cub. nuv. car.	S. Ceo cub. nuv. car.
5	S. Ceo cub. nuv. car.	S. E. Ceo cub. nuv. car.	S. E. br. alg. nuv. ſolt.
6	S. E. Ceo cub. nuv. car.	S. E. Ceo cub. nuv. car.	S. E. nuv. car.
7	S. E. Ceo cub. nuv. car.	N. E. e S.E. torv. ao long.	S. E. Ceo cub.
8	N. O. junt. a ter. e S.E. alt.	N. O. e S.E. nuv. car. torv.	N. E. br. Ceo cl.
9	N. E. C. cl. N. O. C. cub.	N. O. Ceo cub. nuv. car.	N. O. Ceo cub. nuv. car.
10	N. O Ceo cub. nuv. car.	N. O. Ceo cub. nuv. car.	N. O. Ceo cub. nuv. car.
11	N. O. rij. C cub. nuv. car.	N. O. rij. nuv. car.	N. rij. nuv. ſolt. e enter.
12	N. rij. nuv. ſolt. e enter.	N. rij. nuv. ſolt. e enter.	E. nuv. ſolt.
13	E. nuv. ſolt.	E. nuv. ſolt.	N. E. Ceo cl. e lind.
14	N. E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl.
15	E. Ceo cl. e lind.	E. alg. nuv. ſolt.	S. E. Ceo cub.
16	S. E. Ceo cub.	S. E. e O. dep. N. O. n. ſolt.	N. O. Ceo cl. e lind.
17	N. O. nev. alt.	N. O. nev. alt.	N. O. dep. E. br. C. cl. e lind.
18	E. br. dep. N. E. C. cl. e lind.	N. E. dep. alg. nuv. ſolt.	N. nev. alt.
19	N. nev. alt. dep. E. br. C. cl. e lind.	E. br. Ceo cl. e lind.	N. E. br. C. cl. e lind. dep. N. O. nev. alt.
20	O. alg. nuv. ſolt.	O. rij. alg. nuv. ſolt.	S. O. nuv. car.
21	S. O nuv. ſolt. e car.	S. O. nuv. ſolt. e car.	S. O. dep. S. Ceo cub.
22	S. Ceo cub.	S. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.
23	S. O. Ceo cub.	S. O. dep. O Ceo cub.	N. nev. alt.
24	N. E. nev. alt.	N. E. nev. alt.	N. E. nev. alt.
25	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
26	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. C. cl. e lind. torv.. ao long.	N. E. Ceo cl. e lind.
27	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. C. cl. dep. N. O. n. eſp.	N. O. nev. eſp.
28	N. O. rij. nev. alt.	N. O. rij. nev. alt.	N. O. rij. nev. alt.
29	N. O. rij. nev. alt.	N. O. nev. alt.	N. rij. nev. alt.
30	N. rij. Ceo cl. e lind.	N. rij. Ceo cl. e lind.	N. rij. Ceo cl. e lind.
31	N. rij. Ceo cl. e lind.	N. rij. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.

Dias

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de torv.
8	10	1	0	0	4

JU-

JUNHO DE 1785.

Dias do mez.	BAROMETRO. Manhan	Tarde	Noite	THERMOMETRO. M.	T.	N.	PLUVIMETRO. M.	T.	N.
	P. L. D.	P. L. D.	P. L. D.	Grad. de Farenhei.			L. d.	L. d.	L. d.
1	27 8 4	27 8 1	27 7 8	51	65	57	0	0	0
2	27 7 9	27 7 8	27 7 2	54	64	56	0	0	0
3	27 7 0	27 7 9	27 7 0	55	65	59	0	0, 1	2, 3
4	27 7 5	27 7 8	27 8 0	59	66	60	0	0	0
5	27 8 4	27 8 5	27 8 3	58	68	60	0	0	0
6	27 8 3	27 8 0	27 7 9	58	68	61	0	0	0
7	27 8 1	27 8 5	27 8 9	59	68	63	0	0	0
8	27 8 8	27 8 4	27 8 6	60	67	60	0	0	0
9	27 8 7	27 8 4	27 8 6	56	74	66	0	0	0
10	27 9 0	27 8 3	27 8 3	67	82	68	0	0	0
11	27 8 1	27 8 2	27 8 2	66	84	69	0	0	0
12	27 8 0	27 7 8	27 7 5	69	82	70	0	0	0
13	27 7 0	27 6 8	27 5 9	69	82	71	0	0	0
14	27 5 9	27 6 0	27 6 0	71	81	70	0	0	0
15	27 6 0	27 6 5	27 6 7	65	76	65	0	0	0
16	27 6 8	27 6 9	27 7 3	64	74	65	0	0	0
17	27 7 9	27 8 3	27 8 0	63	76	65	0	0	0
18	27 8 0	27 7 9	27 7 8	61	72	64	0	0	0
19	27 7 6	27 7 6	27 7 9	65	70	65	0	0	0
20	27 8 1	27 7 8	27 7 2	63	70	64	0	0	0
21	27 6 8	27 6 1	27 6 6	64	72	65	0	0	0
22	27 6 5	27 6 9	27 7 0	64	73	66	0	0	0
23	27 7 1	27 6 8	27 6 7	62	73	66	0	0	0
24	27 7 0	27 6 8	27 6 7	64	73	68	0	0	0
25	27 6 9	27 6 6	27 6 8	63	72	67	0	0	0
26	27 6 5	27 6 4	27 6 7	62	71	66	4, 8	0	0
27	27 7 0	27 6 9	27 7 1	62	72	67	1, 6	0	0
28	27 7 4	27 7 3	27 7 6	63	73	67	0	0	0
29	27 7 8	27 7 6	27 7 4	64	72	66	0	0	0
30	27 7 3	27 6 9	27 7 1	64	73	65	0	0	0

Rezultado de todo o mez.

	P. L. D.			Total da chuva.		
				P.	L.	D.
Maior elevaçaõ -	27 9 0	Maior calor - -	84	0	8	8
Menor elevaçaõ	27 5 9	Menor calor -	51			
Elevaçaõ media	27 7 4	Calor medio -	62			

JU-

JUNHO.

Ventos e estado do do Ceo.

Dias do mez.	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
2	O. Ceo cl.	O. Ceo cl.	O. dep. S. O. Ceo cl.
3	S. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub. nuv. car.	S. O. Ceo cub. nuv. car.
4	S. O dep. O. Ceo cub.	O. dep. N. Ceo cl.	N. Ceo cl. e lind.
5	N. O. nev. alt.	N. O. nev. alt.	N. nev. alt.
6	N. nev. alt.	N. nev. alt.	N. nev. alt.
7	N. nev. alt.	N. nev. alt.	N. nev. alt.
8	N. nev. alt.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
9	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
10	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. dep. N. nev. alt.	N. E. Ceo cl. e lind.
11	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
12	N. E. Ceo cl. e lind.	O. br. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
13	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
14	E. dep. S. E. Ceo cub.	O. br. Ceo cl. e lind.	O. muito br. Ceo cl. dep. S. nuv. solt.
15	S. Ceo cub.	O. br. Ceo cl. e lind.	N. O. dep. S. Ceo cub.
16	S. alg. nuv.	N. O. alg. nuv. solt.	N. O. Ceo. cl. e lind.
17	N. O. alg. nuv. solt.	N. O. alg. nuv. solt.	N. E. Ceo cl. e lind.
18	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
19	N. alg. nuv. solt.	N. nuv. solt.	N. nuv. solt.
20	N. Ceo cub.	N. Ceo cub.	N. Ceo cl.
21	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.
22	Vario: Ceo cub.	Vario: Ceo cub.	N. Ceo cl. e lind.
23	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.
24	O. Ceo cl.	O. alg. nuv.	O. nuv. solt.
25	O. nuv. solt.	O. nuv. solt.	O. nuv. solt.
26	O. nuv. solt.	O. nuv. solt.	O. nuv. solt.
27	O. nuv. solt.	O. nuv. solt.	O. nuv. solt.
28	O. nuv. solt.	O. nuv. solt.	N. nuv. solt.
29	O. nuv. solt.	O. nuv. solt.	N. O. nuv. solt.
30	N O. Ceo cub. nuv. car.	N. Ceo cub.	N. E. nuv. solt.

Dias

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de torv.
13	2	0	0	0	0

JULHO DE 1785.

Dias do mez	BAROMETRO. Manhan P. L. D.			Tarde P. L. D.			Noite P. L. D.			THERMOMETRO. Grad. de Farenhei. M.	T.	N.	PLUVIMETRO. M. L. d.	T. L. d.	N. L. d.
1	27	7	6	27	7	8	27	7	7	64	72	65	0	0	0
2	27	7	5	27	7	9	27	7	8	66	73	64	0	0	0
3	27	7	7	27	7	6	27	7	4	64	78	66	0	0	0
4	27	7	3	27	7	1	27	7	4	67	79	70	0	0	0
5	27	7	5	27	7	2	27	6	7	65	72	65	0	0	0
6	27	6	8	27	6	6	27	6	5	60	73	64	0	0	0
7	27	6	6	27	6	5	27	6	6	60	76	66	0	0	0
8	27	6	8	27	7	0	27	7	7	60	87	74	0	0	0
9	27	7	8	27	7	6	27	7	5	70	85	75	0	0	0
10	27	7	4	27	7	2	27	7	0	75	83	73	0	0	0
11	27	6	8	27	6	7	27	6	4	72	78	71	0	0	0
12	27	6	2	27	6	0	27	6	0	66	75	67	0	0	0
13	27	6	2	27	6	4	27	6	5	65	70	65	0	0	0
14	27	6	4	27	6	5	27	6	8	62	70	65	0	0	0,8
15	27	7	0	27	7	3	27	7	8	61	70	66	0	0	0
16	27	8	0	27	7	7	27	7	9	61	74	63	0	0	0
17	27	7	8	27	7	7	27	7	6	66	83	70	0	0	0
18	27	7	6	27	7	5	27	7	0	63	73	64	0	0	0
19	27	6	9	27	6	7	27	6	7	62	70	65	0	0	0
20	27	6	8	27	6	5	27	6	7	64	69	64	0	0	0
21	27	7	0	27	7	2	27	8	3	60	70	65	0	0	0
22	27	8	4	27	8	5	27	9	0	60	70	64	0	0	0
23	27	8	7	27	8	5	27	8	1	60	73	65	0	0	0
24	27	7	6	27	7	0	27	6	4	63	81	75	0	0	0
25	27	6	4	27	6	2	27	5	9	72	83	68	0	0	0
26	27	6	8	27	7	0	27	7	5	62	71	66	0	0	0
27	27	7	8	27	8	0	27	8	4	64	71	64	0	0	0
28	27	8	3	27	8	3	27	8	2	59	71	62	0	0	0
29	27	8	3	27	8	0	27	7	7	59	75	63	0	0	0
30	27	7	5	27	7	3	27	7	0	62	73	65	0	0	0
31	27	6	7	27	6	6	27	6	5	63	74	67	0	0	0

Rezultado de todo o mez.

	P. L. D.			
Maior elevaçaõ	27 9 0	Maior calor - -	83	Total da chuva.
Menor elevaçaõ	27 5 9	Menor calor -	59	P. L. D.
Elevaçaõ media	27 7 3	Calor medio -	45	0 0 0,8

JU-

JULHO.

Ventos e eſtado do Ceo.

Dias do mez.	Manhan	Tarde	Noite
1	N. alg. nuv. ſolt.	N. nuv. ſolt.	N. Ceo cl.
2	N. nuv. ſolt.	N. nuv. ſolt.	N. E. Ceo cl. e lind.
3	N. E. e E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
4	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind	N. E. Ceo cl. e lind.
5	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. rij. Ceo cl. e lind.	N. E. rij. Ceo cl. e lind.
6	N. E. rij. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
7	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
8	N. E. dep. E. C. cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.
9	E. br. Ceo cl. e lind.	E. br. Ceo cl. e lind.	E. br. Ceo cl. e lind.
10	E. br. Ceo cl. e lind.	E. br. Ceo cl. e lind.	E. br. Ceo cl. e lind.
11	O. Ceo cl.	O. Ceo cl.	O. br. Ceo cl. e lind.
12	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.	O. br. Ceo cub.
13	O. Ceo cub.	O. rij. Ceo cub.	O. Ceo cub.
14	O. rij. Ceo cub.	N. O. nuv. ſolt.	N. O. nuv. ſolt.
15	O. br. nuv. ſolt.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
16	N. Ceo. cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
17	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
18	N. E. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind. dep. N. muito rij.	N. rij. Ceo cl. e lind.
19	N. rij. Ceo cl. e lind.	N. rij. Ceo cl. e lind.	N. nev. alt. Ceo cub.
20	N. nuv. ſolt. e enter.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl. e lind.
21	N. nuv. ſolt.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl. e lind.
22	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
23	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
24	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl.
25	N. Ceo cub.	N. e S. O. Ceo cub.	N. Ceo cub.
26	N. E. Ceo cl. e lind.	N. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.
27	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl.
28	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cub.
29	N. E. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. rij. Ceo cub.
30	N. Ceo cl.	N. nuv. enterromp.	N. Ceo enev.
31	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.

Dias

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de torv.
23	0	0	0	0	0

AGOS-

AGOSTO DE 1785.

	BAROMETRO.			THERMOMETRO.			PLUVIMETRO.		
Dia do mez.	Manhan	Tarde	Noite	M.	T.	N.	M.	T.	N.
	P. L. D.	P. L. D.	P. L. D.	Grad. de Farenhei.			L. d.	L. d.	L. d.
1	27 6 4	27 6 2	27 5 6	64	73	66	0	0	0
2	27 5 0	27 4 7	27 4 5	63	70	65	0	0	2,6
3	27 5 4	27 5 7	27 6 2	63	68	63	2,8	0,8	2,6
4	27 7 1	27 7 1	27 7 3	60	70	65	0	3	0
5	27 7 1	27 6 9	27 7 0	61	72	65	0	0	0
6	27 7 1	27 7 0	27 6 0	62	71	66	0	0	0
7	27 5 7	27 5 4	27 5 2	60	70	65	0	0	0
8	27 6 3	27 6 4	27 6 7	59	69	66	0	0	0
9	27 7 2	27 7 0	27 6 3	60	72	64	0	0	0
10	27 6 4	27 6 2	27 6 2	59	69	65	0	0	0
11	27 6 4	27 6 3	27 6 6	58	73	64	0	0	0
12	27 7 2	27 7 3	27 7 7	59	72	63	0	0	0
13	26 7 8	27 7 6	27 7 5	60	73	65	0	0	0
14	27 7 0	27 6 8	27 6 2	60	69	63	0	0	0
15	27 6 0	27 5 8	27 6 0	60	72	66	0	0	0
16	27 5 7	27 5 9	27 5 9	61	70	64	0	0	0
17	27 6 0	27 6 7	27 7 2	62	66	63	0	0	0
18	27 7 3	27 7 4	27 7 6	60	67	63	0	0	0
19	27 6 8	27 6 7	27 6 7	61	67	64	0	0	0
20	27 6 0	27 6 6	27 6 2	63	66	62	0	0	0
21	27 5 9	27 6 0	27 5 8	63	70	65	0	0	0
22	27 6 6	27 7 2	27 7 2	60	74	65	0	0	0
23	27 7 6	27 7 9	27 7 4	61	74	69	0	0	0
24	27 7 4	27 6 8	27 7 0	63	72	67	0	0	0
25	27 7 1	27 7 2	27 7 4	63	72	68	0	0	0
26	27 7 5	27 7 4	27 7 6	63	70	65	0	0	0
27	27 7 8	27 7 7	27 7 8	59	71	64	0	0	0
28	27 8 4	27 8 2	27 8 3	61	74	69	0	0	0
29	27 7 7	27 7 4	27 6 8	66	75	68	0	0	0
30	27 7 1	27 6 8	27 6 4	65	73	67	0	0	0
31	27 7 0	27 7 2	27 7 3	46	72	64	0	0	0

Rezultado de todo o mez.

	P. L. D.		
Maior elevaçaõ 27 8 4	Maior calor - - 75	Total da chuva	
Menor elevaçaõ 27 4 5	Menor calor - 58	P. L. D.	
Elevaçaõ media 27 6 6	Calor medio - 65	0 11 8	

MAIO

AGOSTO.

Ventos e eſtado do Ceo.

Dias do mez.	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	N. Ceo cl.	O. nuv. ſolt.	O. nuv. ſolt.
2	O. nuv. ſolt.	O. nuv. ſolt.	O. Ceo cub. torv.
3	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.	N. O. nuv. ſolt.
4	N. O. nuv. ſolt.	N. O. nuv. ſolt.	O. br. nuv. ſolt.
5	O. nuv. ſolt.	O. nuv. ſolt.	O. nuv. ſolt.
6	N. nuv. ſolt.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl. e lind.
7	N. rij. alg. nuv.	N. rij. Ceo cub.	N. Ceo cub.
8	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
9	N. E. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
10	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
11	N. nev. eſp. dep. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind. no f. nev. alt.	N. E. nev. alt.
12	N. nev. alt. dep. C. cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
13	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. C cl. e lind. dep. nev. alt.
14	N. E. nev. alt. dep. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
15	N. E. nev. alt. dep. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cub. nev. alt.
16	N. nev. alt. dep. Ceo cl.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. nev. alt. dep. Ceo cl.
17	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
18	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
19	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
20	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
21	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.
22	N. E. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl.
23	N. nev. alt. dep. Ceo cl.	N. Ceo cl.	N. nev. alt.
24	N. O. nev. alt.	N. O. alg. nuv. ſolt.	N. O. nev. alt. Ceo cub.
25	N. O. Ceo cub. nev. alt.	N. O. nuv. inter.	N. nev. alt.
26	N. O. Ceo cub.	N. E. nuv. inter.	N. E. Ceo cl. e lind.
27	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. br. Ceo cl. e lind.	N. E. br. Ceo cl. e lind.
28	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cub. nev. alt.
29	N. E. nev. alt. dep. C. cl.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. O. nev. alt.
30	O. Ceo cl.	O. e N. O. nuv. ſolt.	N. O. Ceo cub.
31	N. E. nev. eſp. dep. C. cl.	N. E. Ceo cl.	N. Ceo cl.

Dias

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de torv.
21	2	0	0	0	0

SETEMBRO DE 1785.

Dias do mez.	BAROMETRO. Manhan P. L. D.	Tarde P. L. D.	Noite P. L. D.	THERMOMETRO. M.	T.	N.	PLUVIMETRO. M. L. d.	T. L. d.	N. L. d.
				Grad. de Farenhei.					
1	27 7 2	27 7 1	27 7 3	63	72	66	0	0	0
2	27 7 3	27 7 2	27 8 0	65	74	70	0	0	0
3	27 7 9	27 7 6	27 7 0	64	71	64	0	0	0
4	27 6 8	27 6 7	27 6 0	59	70	64	0	0	0
5	27 5 7	27 5 6	27 5 9	66	72	66	0	0	0
6	27 6 0	27 6 3	27 6 8	65	72	64	2	4	6
7	27 7 2	27 7 8	27 7 8	64	68	65	3, 9	0	0
8	27 7 9	27 7 6	27 7 0	60	67	64	0	0	0
9	27 6 3	27 6 1	27 5 6	59	69	66	0	0	0
10	27 6 4	27 7 5	27 7 9	66	68	65	4, 4	0	0
11	27 9 0	27 9 3	27 8 6	62	69	61	0	0	0
12	27 8 4	27 8 0	27 7 8	58	68	64	0	0	0
13	27 7 4	27 7 2	27 7 0	64	70	65	0	0	0
14	27 7 2	27 7 2	27 7 4	61	70	65	0	0	0
15	27 7 5	27 7 8	27 7 7	61	68	66	0	0	0
16	27 7 5	27 7 5	27 7 1	62	67	65	0	0	0
17	27 7 3	27 7 8	27 8 0	58	69	63	0	0	0
18	27 8 4	27 8 6	27 8 5	63	70	64	0	0	0
19	27 8 6	27 8 6	27 8 2	64	72	67	0	0	0
20	27 7 7	27 6 8	27 7 0	63	72	66	0	0	1, 7
21	27 6 7	27 6 6	27 7 2	63	71	66	0	0	0
22	27 6 6	27 5 9	27 4 5	63	67	64	0, 5	0	0
23	27 4 3	27 3 8	27 2 2	65	66	64	15, 8	0	3
24	27 2 0	27 1 9	27 4 4	65	67	64	1, 4	2, 3	0
25	27 5 5	27 6 0	27 6 8	64	70	65	0	0	0
26	27 7 1	27 7 2	27 8 0	66	71	66	0	0	0, 6
27	27 8 3	27 8 3	27 8 4	67	72	68	0	0	0
28	27 8 4	27 8 5	27 8 0	66	76	68	0	0	0
29	27 7 5	27 7 7	27 7 5	66	79	70	0	0	0
30	27 7 4	27 6 7	27 6 3	70	80	71	0	0	0

Rezultado de todo o mez.

	P. L. D.			Total da chuva.		
Maior elevaçaõ -	27 9 3	Maior calor - -	80	P.	L.	D.
Menor elevaçaõ	27 1 9	Menor calor -	58	3	9	1
Elevaçaõ media	27 7 0	Calor medio -	66			

SE-

SETEMBRO.

Ventos e eſtado do do Ceo.

Dias do mez.	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	N. nev. eſp. dep. Ceo cl.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl. dep. nev. alt.
2	N. O. nev. alt. dep. C. cl.	N. O. e O. nuv. ſolt.	N. O. C. cl. dep. nev. eſp.
3	N. nev. eſp. e hum.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.
4	N. Ceo cub. nuv. enter.	N. O. nuv. enter.	N. O. nev. alt. dep. S. O. Ceo cub.
5	S. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.	S. O. rij. dep. S. Ceo cub.
6	S. Ceo cub.	S. Ceo cub.	S. Ceo cub.
7	S. Ceo cub.	O. nuv. ſolt. dep. N. C. cl.	N. Ceo cl.
8	N. Ceo cl.	N. O. Ceo cl.	N. Ceo cl.
9	N. C. cl. dep. S. O. rij. C. cub.	S. O. rij. Ceo cub.	O. Ceo cub.
10	S. O. dep. O. Ceo cub.	O. Ceo cub.	N. O. dep. N. Ceo cl.
11	N. E. dep. O. nuv. ſolt.	N. E. nuv. ſolt.	N. E. Ceo cl. e lind.
12	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
13	N. E. dep. O. C. cl. e lind.	N. E. dep. N. nev. alt.	N. Ceo cub. nev. alt.
14	N. Ceo cl.	N. dep. N. O. nuv. ſolt.	N. E. Ceo cl. e lind.
15	N. nuv. ſolt.	N. Ceo cl.	N. E. Ceo cl. e lind.
16	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
17	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
18	N. nev. eſp. dep. C. cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
19	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
20	N. E. dep. O. nev. alt.	S. O. Ceo cub.	N. E. Ceo cl. e lind.
21	N. E. C. cl. dep. O. C. cub.	S. O. Ceo cub.	N. br. Ceo cl. e lind.
22	N. O. nev. eſp. dep. S. O. rij. Ceo cub.	S. O. rij. Ceo cub.	S. Ceo cub.
23	S. Ceo cub.	S. Ceo cub.	S. Ceo cub.
24	S. Ceo cub.	S. rij. de temp. Ceo cub.	S. Ceo cub.
25	S. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.	S. Ceo cub.
26	S. e S. E. Ceo cub.	S. Ceo cub.	S. Ceo cub. nev. eſp.
27	S. Ceo cub. nev. eſp.	S. Ceo cl. e lind.	S. E. Ceo cl. e lind.
28	E. Ceo cl. e lind.	O. muito br. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
29	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
30	N. E. junt. a ter. e N. O. alt.	O. Ceo cl.	O. br. Ceo cub.

Dias

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de torv.
13	6	1	0	0	0

OCTU-

OUTUBRO DE 1785.

Dias do mez.	BAROMETRO. Manhan P. L. D.	BAROMETRO. Tarde P. L. D.	BAROMETRO. Noite P. L. D.	THERMOMETRO. M. Grad. de Farenhei.	THERMOMETRO. T.	THERMOMETRO. N.	PLUVIMETRO. M. L. d.	PLUVIMETRO. T. L. d.	PLUVIMETRO. N. L. d.
1	27 6 4	27 6 4	27 6 5	68	74	67	0	0	0
2	27 7 0	27 7 0	27 7 3	65	70	66	0	0	0
3	27 7 5	27 7 3	27 7 4	64	69	55	0	0	0
4	27 7 6	27 7 4	27 7 5	61	67	57	0	0	0
5	27 7 8	27 7 6	27 7 9	59	66	61	0	0	0
6	27 7 9	27 7 8	27 9 2	58	67	64	0	0	0
7	27 9 0	27 8 7	27 8 0	59	67	62	0	0	0
8	27 7 9	27 7 6	27 7 5	62	68	63	0	0	0
9	27 7 5	27 7 4	27 7 6	62	77	64	0	0	0
10	27 7 6	27 7 4	27 7 5	58	67	61	0	0	0
11	27 7 5	27 7 4	27 7 6	59	70	64	0	0	0
12	27 8 0	27 8 2	27 9 2	62	69	66	0	0	0
13	27 9 3	27 9 3	27 9 2	62	71	67	0	0	0
14	27 9 7	27 9 0	27 8 2	65	75	67	0	0	0
15	27 8 0	27 7 5	27 6 7	65	75	70	0	0	0
16	27 6 4	27 6 3	27 6 4	64	76	71	0	0	0
17	27 6 5	27 6 0	27 6 4	65	73	71	0	0	4,3
18	27 6 9	27 6 8	27 6 3	62	67	64	0	0	0
19	27 6 6	27 6 7	27 6 8	60	68	65	0	0	0
20	27 6 9	27 6 7	27 6 2	64	68	64	0	0	0
21	27 6 8	27 6 9	27 7 2	56	67	64	0	0	0
22	27 7 8	27 7 8	27 7 7	55	64	60	0	0	0
23	27 7 4	27 6 6	27 4 1	56	65	60	0	0	0
24	27 4 4	27 4 1	27 4 6	60	65	61	5	0	0
25	27 5 0	27 4 8	27 4 7	62	68	66	0	0	10,5
26	27 4 8	27 4 8	27 6 3	62	67	60	0	0	0
27	27 6 6	27 7 1	27 8 3	57	60	56	0	0	0
28	27 8 4	27 8 4	27 8 5	48	58	56	0	0	0
29	27 8 7	27 8 7	27 8 8	50	58	55	0	0	0
30	27 8 6	27 8 5	27 8 6	51	63	60	0	0	0
31	27 8 0	27 7 1	27 6 7	53	63	54	0	0	0

Rezultado de todo o mez.

	P. L. D.			Total da chuva.
Maior elevação	27 9 7	Maior calor - -	77	P. L. D.
Menor elevação	27 4 1	Menor calor -	50	1 7 8
Elevação media	27 7 3	Calor medio -	63	

OUTU-

OUTUBRO.

Ventos, e eſtado do Ceo.

Dias do mez.	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	N. O. Ceo cub.	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.
2	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.	N. E. ceo cl.
3	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
4	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
5	N. E. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
6	N. Ceo cub. nuv. ſolt.	N. nuv. ſolt.	N. E. Ceo cl. e lind.
7	N. E. Ceo cl. e lind.	N. alg. nuv. ſolt.	N. Ceo cl. e lind.
8	N. Ceo cub.	N. Ceo cub.	N. Ceo cl. e lind.
9	N. Ceo cub. nev. alt.	N. alg. nuv. ſolt.	N. E. Ceo cl. e lind.
10	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl.	N. E. Ceo cl. e lind.
11	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.	N. E. Ceo cl. e lind.
12	N. E. Ceo cl. e lind.	O. nev. alt.	N. E. Ceo cl. e lind.
13	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.
14	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.
15	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.	S. E. Ceo cl. e lind.
16	S. E. e E. Ceo cl. e lind.	S. E. e S. rij. C. cl e lin.	S. Ceo cl.
17	E. rij. Ceo cub.	E. Ceo cub.	S. e N. O. C. cub. torv. rij.
18	S. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.	S. Ceo cub.
19	N. E. Ceo cub. nev. alt.	N. nuv. enter.	N. C. cl. e lind. dep. nev. eſp
20	N. Ceo cub. nev. alt.	N. Ceo cl. alg. nuv. ſolt.	N. Ceo cl. e lind.
21	N. E. Ceo cl. e lind.	N. O. dep. N. C. cl. e lind.	N. E. Ceo cl e lind.
22	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
23	N. O. Ceo cl.	N. O. Ceo cl.	N. O. dep. S. E. rij. C. cub.
24	S. E. rij. Ceo cub.	S. E. rij. Ceo cub.	S. E. Ceo cub.
25	S. E. rij. Ceo cub.	S. E. e S. rij. Ceo cub. torv. long.	S. E.. Ceo cub. nuv. car.
26	S. E. Ceo cub.	S. E. Ceo cub. dep. N. E.	N. Ceo cub.
27	N. Ceo cub. nev. alt.	N. Ceo cub. nev. alt.	N. e N. E. Ceo cl. e lind.
28	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
29	N. E. Ceo cl.	N. E. Ceo cl.	N. E. Ceo cl. e lind.
30	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
31	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.

Dias

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de torv.
16	2	1	0	1	2

NOVEMBRO DE 1785.

Dias do mez.	BAROMETRO. Manhan P. L. D.			Tarde P. L. D.			Noite P. L. D.			THERMOMETRO. Grad. de Farenhei. M.	T.	N.	PLUVIMETRO. M. L. d.	T. L. d.	N. L. d.
1	27	6	5	27	6	4	27	6	3	55	63	60	0	0	0
2	27	6	5	27	7	8	27	8	4	59	62	60	0	0	0
3	27	9	1	27	8	7	27	8	0	55	62	58	0	0	0
4	27	8	4	27	7	7	27	7	0	54	66	63	0	0	0
5	27	7	6	27	5	5	27	6	4	59	64	60	0	0	2
6	27	7	9	27	8	4	27	9	2	57	62	60	0	0	0
7	27	9	5	27	9	1	27	9	0	48	60	55	0	0	0
8	27	9	1	27	9	1	27	8	7	50	60	57	0	0	0
9	27	8	5	27	8	0	27	7	8	50	60	56	0	0	0
10	27	7	7	27	7	2	27	7	7	48	56	50	0	0	0
11	27	7	9	27	7	5	27	7	4	43	53	49	0	0	0
12	27	7	4	27	7	0	27	6	6	44	54	50	0	0	0
13	27	6	2	27	5	9	27	5	7	45	56	51	0	0	0
14	27	5	6	27	5	2	27	7	3	48	58	52	0	0	0
15	27	5	5	27	5	2	27	5	9	48	59	55	0	0	0
16	27	6	3	27	6	5	27	7	3	54	60	54	0	0	0
17	27	6	6	27	6	3	27	6	0	57	64	55	0	0	1,5
18	27	5	0	27	4	4	27	3	8	58	63	60	2	0	2
19	27	4	0	27	5	2	27	6	5	58	64	52	1,5	1,5	0
20	27	6	9	27	7	1	27	6	9	52	56	54	0	0	0
21	27	7	2	27	8	0	27	8	1	43	50	47	0	0	0
22	27	8	5	27	8	3	27	8	6	43	50	48	0	0	0
23	27	8	7	27	8	4	27	8	7	42	49	47	0	0	0
24	27	7	7	27	7	4	27	7	5	44	51	47	0	0	0
25	27	7	8	27	7	9	27	8	4	48	53	51	0	0	0
26	27	8	7	27	8	1	27	4	8	48	54	52	0	0	1,2
27	27	5	0	27	5	4	27	6	4	53	55	50	0,2	0,2	0,8
28	27	6	8	27	7	6	27	8	3	51	58	53	0	0	2,2
29	27	8	4	27	8	0	27	7	3	56	59	58	0	0	0
30	27	6	4	27	6	8	27	8	0	56	58	57	0,5	2,3	1,4

Rezultado de todo o mez.

	P.	L.	D.				Total da chuva.		
							P.	L.	D.
Maior elevação	27	9	5	Maior calor	64		1	7	3
Menor elevação	27	3	8	Menor calor	42				
Elevação media	27	7	3	Calor medio	54				

NO-

NOVEMBRO.

Ventos e eſtado do Ceo.

Dias do mez.	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	N. E. Ceo cl. e lind.	N. O. br. Ceo cl. e lind.	N. O. br. Ceo cl. e lind.
2	S. O. Ceo cub.	N. alg. nuv. ſolt.	N. E. Ceo cl. e lind.
3	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
4	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
5	S. O. Ceo cub.	S. rij. Ceo cub.	S. rij. Ceo cub. dep. N.
6	N. rij. Ceo cl.	N. rij. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
7	N. E. br. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
8	N. E. Ceo. cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
9	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
10	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
11	N. E. Ceo cl. e lind	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
12	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
13	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
14	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
15	N. E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.	S. E. nev. alt.
16	S. E. Ceo cub.	S. E. Ceo cub.	S. E. Ceo cub.
17	S. E. rij. Ceo cub.	S. E. rij. Ceo cub.	S. rij. Ceo cub.
18	S. Ceo cub.	S. Ceo cub.	S. Ceo cub.
19	S. O. Ceo cub.	O. Ceo cub. dep. N. O.	N. O. nuv. ſolt.
20	N. nuv. ſolt.	N. nuv. ſolt.	N. E. nuv.
21	N. E. rij. alg. nuv. ſolt.	N. E. rij. alg. nuv. ſolt.	N. E. rij. Ceo cl. e lind.
22	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
23	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
24	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
25	N. E. Ceo cub.	N. nuv. ſolt.	N. Ceo cl.
26	N. Ceo cl.	N. O. dep. O. nuv. ſolt.	O. dep. S. O. Ceo cub.
27	S. O. dep. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.	O. Ceo cub.
28	O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.
29	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.
30	O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.	N. nuv. ſolt.

Dias

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de torv.
26	5	0	0	0	0

DE-

DEZEMBRO DE 1785.

Dia do mez	BAROMETRO. Manhan P.	L.	D.	Tarde P.	L.	D.	Noite P.	L.	D.	THERMOMETRO. Grad. de Farenhei. M.	T.	N.	PLUVIMETRO. M. L. d.	T. L. d.	N. L. d.
1	27	8	9	27	8	6	27	9	4	50	53	51	0	0	0
2	27	9	3	27	9	2	27	8	5	48	56	54	0	0	2, 2
3	27	8	3	27	7	8	27	7	6	56	60	57	1, 4	0, 8	4, 3
4	27	8	9	27	9	0	27	9	8	54	55	53	0	0	0
5	27	9	1	27	8	7	27	6	0	50	55	54	0	0	0, 3
6	27	5	6	27	5	9	27	9	0	54	55	51	4, 3	0, 2	3
7	27	9	7	27	8	8	27	8	3	47	54	53	0, 2	0	2, 7
8	27	8	4	27	8	8	27	7	4	53	56	54	0, 3	0	5
9	27	7	1	27	6	4	27	4	8	53	54	53	0	0, 1	2, 3
10	27	4	3	27	4	1	27	2	4	49	53	51	0	0	1, 9
11	27	0	8	27	1	9	27	2	1	54	53	50	0	4, 1	1, 5
12	27	2	7	27	3	5	27	5	4	49	53	52	0, 2	0	1, 5
13	27	6	8	27	7	3	27	8	3	48	53	49	0	0	0
14	27	8	5	27	8	3	27	8	4	48	54	52	0	0	0
15	27	8	1	27	7	8	27	6	6	49	54	51	0	0	0
16	27	5	8	27	5	3	27	6	1	52	56	53	0	0, 5	5
17	27	6	8	27	7	5	27	7	8	50	53	49	0	0	0
18	27	7	5	27	7	4	27	7	0	44	52	48	0	0	0
19	27	6	7	27	6	2	27	6	1	43	53	51	0	0	0
20	27	5	9	27	5	9	27	4	8	48	55	52	0	0	0
21	27	4	0	27	3	4	27	2	7	50	58	54	0	0, 2	1, 2
22	27	1	6	27	0	7	26	11	1	52	54	52	0	1, 2	4, 4
23	26	11	7	26	11	8	27	0	6	53	54	52	0, 3	0	1, 3
24	26	11	0	27	0	2	27	2	2	50	54	52	0	0	1, 1
25	27	1	3	27	0	6	27	0	4	49	56	53	0	0	4, 6
26	27	2	0	27	2	1	26	9	6	50	54	50	0	0	11, 4
27	26	9	4	26	10	3	27	1	0	50	52	50	0	3, 2	0, 5
28	27	1	8	27	2	7	27	1	3	49	50	49	2, 4	1, 9	0
29	27	0	5	27	0	2	27	0	0	46	50	46	0	0	6
30	27	0	0	26	11	6	26	10	7	48	53	50	0	0	0
31	27	0	0	27	1	4	27	2	9	52	53	50	0, 2	0	0

Rezultado de todo o mez.

	P.	L.	D.					
Maior elevaçaõ	27	9	7	Maior calor	60	Total da chuva		
Menor elevaçaõ	26	9	4	Menor calor	43	P.	L.	D.
Elevaçaõ media	27	3	3	Calor medio	51	6	9	4

DE-

DEZEMBRO.

Ventos e eſtado do Ceo.

Dias do mez.	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	N. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.
2	N. E. Ceo cl.	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.
3	S. O. Ceo cub. nev. eſp.	S. O. Ceo cub. nev. eſp.	S. O. Ceo cub.
4	N. alg. nuv. ſolt.	N. alg. nuv. ſolt.	N. E. br. Ceo cl.
5	N. Ceo cub.	N. dep. O. e S. O.C. cub.	S. O. rij. Ceo cub.
6	S. O. rij.Ceo cub.nuv.car.	O. rij. Ceo cub.	O. rij. dep. N.
7	N. e N. E. Ceo cub.	N. dep. O. Ceo cub.	N. O. br. Ceo cub.
8	N. O. br. Ceo cub,	N. O. br. Ceo cub.	N. O. br. Ceo cub.
9	O Ceo cub.	N. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.
10	N. nev. alt. dep. N. O.	O. Ceo cub.	O. rij. dep. S. O. C. cub.
11	S. O. muito rij. Ceo cub.	S. O. muito rij. Ceo cub. dep. O.	O.rij.dep. S.O.nuv. enter.
12	O. e S. O. rij. Ceo cub.	O. muito rij. nuv. ſolt.	O. rij.nuv. ſolt.
13	O. rij. nuv. ſolt.	O. br. Ceo cl.	E. br. e baixo e O.br. alt
14	E. br. Ceo cl.	E. e O. br. Ceo cl.	O. br. Ceo. cl.
15	E. br. Ceo cl. e lind.	O. br. Ceo cl. e lind.	O. br. dep. S.O.Ceo cub.
16	S. O. br. Ceo cub.	O. br. dep. S.O. Ceo cub.	S. O. dep N.O. Ceo cub.
17	N. nuv. ſolt.	N. E. Ceo cl.	N. E. br. Ceo cl. e lind.
18	N. E. rij. Ceo cl. e lind.	N. E. rij. Ceo cl. e lind.	N. E. rij. Ceo cl. e lind.
19	N. E. rij. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl.	N. E. Ceo cl. e lind.
20	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	E. C. cub. nev. eſp. hum.
21	S. E. Ceo cub.	S. E. Ceo cub.	E. C. cub nev. eſp. hum.
22	S.E C.cub. nev.eſp. hum.	S.E. C.cub. nev.eſp. hum.	S. E.C. cub. nev eſp.hum
23	S. E. dep.O.Ceo cub. nev. eſp. hum.	S. O. Ceo cub. nev. eſp. hum.	O. Ceo cub. nev. eſp.
24	O. Ceo cub. nev. eſp.	S. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.
25	S. Ceo cub.	S. Ceo cub.	S. e N. O. torv. e temp.
26	S. Ceo cub.	S. Ceo cub.	S.muito rij.de temp.C.cub
27	S.muito rij.de temp.C.cub.	S. rij. Ceo cub.	S. dep. N. O. C. cub.
28	N. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.	S. dep. O. Ceo cub.
29	N. O. nuv. enter.	N. O. nuv. enter.	S. O. Ceo cub.
30	S. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.	S. O. muito rij. de temp. Ceo cub.
31	N. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.	N. O. rij. Ceo cub.

Dias

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de torv.
7	20	4	2	3	1

Rezultado de todo o Anno

BAROMETRO.	P.	L.	D.	THEMOMETRO		PLUVIMETRO.
Maior elevaçaõ	27	10	2	Maior calor - - -	84	Total da chuva
Menor elvaçaõ	26	9	6	Menor calor - -	35	P. L D
Elevaçaõ media	27	4	4	Calor medio - -	58	38 2 1

Dias

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de torv.
145	95	10	14	12	11

ESte anno foi geralmente fertil, e abundante: a producçaõ, e colheita dos grãos foi muito boa, principalmente a dos milhos: com tudo as fementeiras temporans do trigo, e as ferodias da fevada produziraõ mais, e melhor: houve baftante vinho, e muito azeite: as frutas do fedo foraõ em abundancia, as do tarde naõ vingaraõ taõ bem: a producçaõ do gado foi abundante, e a fua creaçaõ feliz.

Efte anno foi doentio mais que o paffado: além das moleftias ordinarias das eftações grafaraõ na Primavera humas diarreias epidemicas: principiavaõ com ameaços de vertigens, vomitos, meteorifmo do ventre, &c. a duraçaõ d'efta moleftia naõ paffava ordinariamente de finco dias, e cedia facilmente ao ufo dos abforventes, e diluentes, e ás fangrias, quando eraõ mais inflamatorias. No veraõ foi muito geral huma Ophtalmia: efta moleftia cedia bem ao ufo dos vitriolados, e agoa fria. No fim do veraõ, e por todo o Outono reináraõ com excеffo as febres intermitentes; mas cediaõ bem ao ufo dos emeticos, purgantes, fangrias, e quina: nos ultimos mezes d'efte anno tem havido baftantes bexigas.

AN-

ANNO DE 1785.

A Freguezia de Santo André d'esta Villa de Mafra, no destricto de pouco mais de huma legoa, consta de 648 fogos, nestes houve este anno o seguinte.

Pessoas de Communhaõ - - - -	2$122
Menores - - - - - - - - - - -	$182
Total - -	2$304
Nascêraõ	
Meninos - - - - - - - - - - - -	49
Meninas - - - - - - - - - - - -	40
Total - -	89
Morrêraõ	
Homens - - - - - - - - - - - -	23
Mulheres - - - - - - - - - - - -	16
Meninos - - - - - - - - - - - -	12
Meninas - - - - - - - - - - - -	11
Total - -	62
Cazamentos em todo o anno - - -	28

OBSER-

OBSERVAÇÕES METEOROLOGICAS

Feitas no Real Collegio de Mafra no anno de 1786.

POR D. JOAQUIM DA ASSUMPÇAÕ VELHO.

AS prefentes Obfervações foraõ feitas com os mefmos Inftrumentos, e do mefmo modo, que as do anno precedente.

JANEIRO DE 1786.

Dias do mez.	BAROMETRO. Manhan P. L. D.	Tarde P. L. D.	Noire P. L. D.	THERMOMETRO. M. Grad. de Farenhei.	T.	N.	PLUVIMETRO. M. L. d.	T. L. d.	N. L. d.
1	27 3 8	27 2 7	26 10 3	47	50	49	0	0	5,5
2	26 7 8	26 6 5	27 0 4	44	50	47	15,9	7,3	1,9
3	27 4 2	27 7 8	27 9 1	45	44	42	0	0	0
4	27 8 9	27 8 7	27 7 4	36	44	42	0	0	0
5	27 6 7	27 6 6	27 6 3	40	53	52	0	0	0
6	27 6 3	27 6 0	27 7 3	56	58	53	2,3	3	1,5
7	27 8 1	27 8 8	27 7 8	55	58	56	0,2	0,1	1,4
8	27 6 6	27 5 4	27 6 7	56	58	57	1,3	0	6,7
9	27 6 4	27 6 1	27 2 3	50	55	54	0	0	2,8
10	27 1 2	27 0 5	27 0 0	54	56	52	0	1	1,6
11	27 0 0	27 1 6	27 2 5	49	52	50	0,2		
12	27 3 4	27 5 3	27 5 7	46	54	47	1,6	0,4	1,7
13	27 4 9	27 4 7	27 4 6	47	52	50	1,3	0	2,4
14	27 4 2	27 3 7	27 3 0	54	55	54	0,5	1,8	3
15	27 3 5	27 5 2	27 7 0	54	56	53	0,5	0	0
16	27 7 0	27 6 7	27 1 0	49	52	50	0,8	0	2
17	27 4 0	27 4 4	27 4 4	53	52	50	0,6	0,4	1,4
18	27 3 3	27 1 9	27 0 0	48	52	48	1,6	0	3
19	27 2 1	27 4 5	27 7 0	50	53	50	0,5	0	0
20	27 7 4	27 7 8	27 9 0	45	51	49	0	0	0
21	27 9 5	27 9 7	27 10 8	49	55	53	0	0	0
22	27 11 3	27 10 7	27 11 2	40	56	53	0	0	0
23	27 10 6	27 10 0	27 8 1	49	55	53	0	0	0
24	27 7 3	27 6 5	27 7 4	50	55	53	0	0,6	1,2
25	27 8 0	27 8 3	27 9 0	47	51	49	0	0	0
26	27 9 3	27 9 6	27 10 5	46	56	53	0	0	0
27	27 11 4	27 11 1	27 11 1	47	56	54	0	0	0
28	27 11 7	27 11 0	27 10 8	50	56	53	0	0	0
29	27 10 3	27 10 2	27 10 1	49	58	54	0	0	0
30	27 10 5	27 10 1	27 10 4	49	58	55	0	0	0
31	27 11 1	27 10 9	27 11 1	47	56	50	0	0	0

Rezultado de todo o mez.

	P. L. D.					
Maior elevaçaõ	27 11 7	Maior calor - -	58	Toral da chuva.		
Menor elevaçaõ	26 6 5	Menor calor -	36	P.	L.	D.
Elevaçaõ media	27 3 2	Calor medio -	51	6	6	0

JANEIRO.

Ventos, e eſtado do Ceo.

Dias do mez.	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	N. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.	S. E. muito rij. de temp. Ceo cub.
2	S. E. muito rij. de temp. trov.	S. E. rij. Ceo cub. hum.	S. E.dep.N.O.muito rij.de temp.
3	N. O. muito rij. de temp.	N. E. rij. Ceo cl.	N. E. Ceo cl. e lind.
4	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. dep. E. C. cl. e lind.
5	E.C.cl. dep. S. E. C. cub.	S. E. Ceo cub.	S. E. dep. S.nev.eſp.hum.
6	S. O. rij. nev. eſp. grand. hum.	S. O. muito rij. nev. eſp. grand. hum.	S. O. muito rij. nev. eſp. grande hum.
7	S. O. br. nev. eſp. grand. hum.	S. O. br. nev. eſp. grand. hum.	S. O. br. nev. eſp. grande hum.
8	S.O.br.nev.eſp.grand.hum.	S.O.rij nev.eſp.grand.hum.	S. O. rij. dep. N. O.
9	N. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.	N.O.dep.S.O.rij.nev. eſp.
10	S. O. rij. Ceo cub. hum.	S.O. rij.N. O. trov.e min.	S.O.rij.C.cub.trov.ao log.
11	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.	N. O. e O. Ceo cub.
12	O. Ceo cub.	N. O. Nuv. enter.	N. nuv. enter.
13	S. E. rij. Ceo cub.	S. rij. Ceo cub.	S. rij. Ceo cub.
14	S. O. muito rij. de temp. hum.	S. O. muito rij. de temp.	S. O. muito rij. de temp. hum.
15	S.O.rij.C.cub.grand.hum.	S.O rij.C.cub.grand. hum.	N. O.Ceo cl. ſecco
16	O. br. Ceo cub.	O. br. Ceo cub.	O.br.dep. S. O. muito rij. grand. temp.
17	O. rij. Ceo cub.	O. dep. N. O. Ceo cub.	O. br. Ceo cub.
18	O. br. Ceo cub.	O. br. Ceo cub.	N. O. e dep.S.O.Ceo cub.
19	O. Ceo cub.	N. E. br. Ceo cl.	N. E. br. Ceo cl. e lind.
20	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.	E. junt. a ter. e S. O. alt.
21	E. Ceo cl.	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.
22	E. Ceo cl.	E. Ceo cl.	E. Ceo cl.
23	O. muito br. Ceo cl.	O. muito br. Ceo cl.	S. O. br. Ceo cub.
24	S. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.	S. O. C. cub.N. E. C. cl.
25	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. br. Ceo cl. e lind.	N. E. br. Ceo cl. e lind.
26	N. E. br. Ceo cl. e lind.	N. E. br. Ceo cl. e lind.	N. E. br. Ceo cl. e lind.
27	N. E. br. Ceo cl. e lind.	N. E. br. Ceo cl. e lind.	E. br. Ceo cl. e lind.
28	N. E. br. Ceo cl. e lind.	O. br.dep. N. O.br . C. cl.	E. br. Ceo cl. e lind.
29	E. br. Ceo cl. e lind.	E. br. dep. N. O. br. C. cl.	E. br. Ceo cl. e lind.
30	E. br. Ceo cl. e lind.	O. dep. N. O. da tr. N. E.	N. E. Ceo cl. e lind.
31	E. Ceo cl. e lind.	E. e N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. br. Ceo cl. e lind.

Dias

Clar.	de chuv.	de nev.	de grand. humid.	de vent.	temp. de trov.
4	14	15	3	6	5

FE-

FEVEREIRO DE 1786.

Dia do mez.	BAROMETRO. Manhan	Tarde	Noite	THERMOMETRO. M.	T.	N.	PLUVIMETRO. M.	T.	N.
	P. L. D.	P. L. D.	P. L. D.	Grad. de Farenhei.			L. d.	L. d.	L. d.
1	27 11 4	27 10 7	27 8 7	46	53	50	0	0	0
2	27 8 2	27 8 2	27 8 1	49	51	46	0	0	0
3	27 7 3	27 7 3	27 8 7	43	50	46	0	0,2	0
4	27 9 3	27 9 4	27 11 4	39	48	47	0	0	0
5	27 11 9	27 11 5	27 11 3	41	50	48	0	0	0
6	27 11 5	27 11 3	27 11 4	46	53	49	0	0	0
7	27 11 2	27 10 7	27 10 3	46	52	48	0	0	0
8	27 10 3	27 10 3	27 10 3	47	53	49	0	0	0
9	27 10 5	27 10 2	27 9 5	48	54	50	0	0	0
10	27 11 2	27 9 6	27 9 3	49	56	50	0	0	0
11	27 9 8	27 9 2	27 9 2	47	56	52	0	0	0
12	27 9 4	27 9 3	27 8 8	50	58	53	0	0	0
13	27 9 1	27 8 8	27 8 4	52	64	60	0	0	0
14	27 8 2	27 7 8	27 7 7	53	64	60	0	0	0
15	27 7 4	27 7 2	27 7 8	52	58	53	0	0	0
16	27 8 3	27 7 8	27 6 4	49	59	56	0	0	0
17	27 6 8	27 6 6	27 7 6	55	60	53	0	0	0
18	27 7 8	27 7 3	27 8 9	53	58	55	0	0	0
19	27 8 8	27 8 7	27 8 9	53	58	57	0	0	0
20	27 9 0	27 8 8	27 7 0	54	59	57	0	0	0
21	27 7 2	27 6 1	27 2 4	53	58	56	1,2	1,8	12,4
22	27 1 0	27 0 7	27 2 9	52	50	47	2	3,9	3,9
23	27 3 7	27 3 5	27 4 3	48	54	50	0,6	0,2	12,4
24	27 5 0	27 4 8	27 5 0	49	54	50	0	0	0
25	27 4 1	27 0 6	26 8 6	47	53	52	0	0	5,3
26	26 9 7	26 10 1	26 11 0	47	52	50	5	0,2	0
27	26 11 6	26 11 9	27 0 9	47	53	49	0,8	0,4	1,0
28	27 1 0	27 0 9	27 0 4	47	52	50	0,5	0,5	11,0

Rezultado de todo o mez.

	P. L. D.					
Maior elevaçaõ	27 11 9	Maior calor - - 64°	Total da chuva.			
Menor elevaçaõ	26 8 6	Menor calor - 39		P.	L.	D.
Elevaçaõ media	27 3 5	Calor medio - 52		5	3	3

FE-

FEVEREIRO.

Ventos, e eſtado do Ceo.

Dias do mez.	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	N. nev. alt.	N. N. E. nev. alt.	N. E. rij. nev. alt.
2	N. E. rij. nev alt.	N. rij. nev. alt.	N. E. rij. nev. alt.
3	N. E. rij. nev. alt.	Var. ent. N.E. e N. O.	N. E. Ceo cl. e lind.
4	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
5	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
6	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. e N. Ceo. cl. e lind.	N. nev. alt.
7	N. nev. alt.	N. e O. nev. alt.	N. e N. E. nev. eſp.
8	N. e N. E. nev. eſp. dep. Ceo cl.	N. e N. E. Ceo cl.	N. e N. E. Ceo cl.
9	N. nev. alt.	N. nev. alt.	N. nev. alt. Ceo. cub.
10	N. nev. alt.	N. nev. alt.	N. nev. alt. dep. N. eſp.
11	N. nev. eſp. dep. N.E.C.cl.	N. E. br. Ceo cl. e lind.	N. E. br. Ceo cl. e lind.
12	N. E. br. Ceo cl. e lind.	N. E. br. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.
13	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo. cl. e lind.	E. rij. Ceo cl. e lind.
14	E. rij. Ceo cl. e lind.	E. rij. Ceo emp.	E. e S.E. muito. rij. C. emp.
15	E. e S. E. rij. Ceo emp.	E. e S. E. rij. Ceo emp.	E. e S. E. rij. Ceo emp.
16	E. nev. alt.	E. nev. alt.	E. e S. E. nev. alt.
17	S. e S. O nuv. car.	S. e S. O. nuv. car.	S. e S. O. nuv. car.
18	S. e S. O. nuv. car.	S. e S. O. nuv. car.	S. e S. O. nuv. car.
19	E. e S. E. nuv. ſolt.	S. e S. O. nuv. car.	S. br. nev. eſp.
20	O. nuv. ſolt.	N. O. nuv. ſolt.	O. e N. O. nuv. car.
21	O. nuv. ſolt.	O. nuv. ſolt.	S. e S. O. nuv. car.
22	N. O. nuv. car.	N. e N. O. nuv. car.	N. O. nuv. car.
23	N. O. nuv. car.	N. O. nuv. car.	N. O. nuv. car.
24	O. nuv. enter.	O. nuv. enter.	E. Ceo cl.
25	S. E. Ceo. cub.	S. E. rij. Ceo cub.	S. E. e S. O. nuv. car.
26	S. O. rij. nuv. car.	S. O. nuv. car.	S. E. br. Ceo cl. e lind.
27	S. e S. E. Ceo cub.	S. e S. O. Ceo cub.	N. O. e S.E. trov. e chuv. de ped.
28	S. O. Ceo cub.	S.O. e O. C. cub. nuv. car.	N. O. e S. E. trov. e pedr.

Dias

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de trov.
7	7	2	0	0	2

MAR-

MARÇO DE 1786.

Dias do mez.	BAROMETRO. Manhan P. L. D.	Tarde P. L. D.	Noite P. L. D.	THERMOMETRO. M. Grad. de Farenhei.	T.	N.	PLUVIMETRO. M. L. d.	T. L. d.	N. L. d.
1	27 0 4	27 0 1	27 0 0	45	50	48	3	0	2, 8
2	27 0 8	27 1 1	26 11 4	46	52	49	0	0	4, 2
3	27 0 4	27 1 6	27 3 9	47	52	49	1, 3	0	10
4	27 4 1	27 2 9	27 0 7	48	55	53	0	2	2
5	26 11 0	26 9 2	26 11 1	55	56	53	5, 7	1, 3	1, 5
6	26 11 8	27 1 7	27 4 7	52	53	52	0, 4	0	0
7	27 4 8	27 4 3	27 2 1	49	55	52	0	2, 2	3, 1
8	27 3 6	27 4 0	27 2 9	48	56	52	0, 5	0	3, 7
9	27 2 5	27 2 0	27 1 4	55	58	54	0	0	2, 3
10	27 2 5	27 3 8	27 4 8	50	59	56	0	0	0
11	27 5 2	27 5 6	27 6 6	48	58	54	0	0	0
12	27 6 7	27 6 6	27 6 2	53	59	56	0	0	0
13	27 6 0	27 5 9	27 5 0	53	58	55	0	0, 7	0, 8
14	27 5 5	27 5 3	27 4 0	55	57	56	0	0	3, 6
15	27 4 5	27 4 6	27 3 4	51	58	56	0	0	0, 9
16	27 3 0	27 2 8	27 2 6	56	58	57	0, 6	0, 9	6, 7
17	27 1 4	27 2 8	27 3 8	56	58	55	1, 2	0, 2	0, 9
18	27 4 9	27 4 9	27 2 6	49	53	49	0	0	3, 5
19	27 2 0	27 4 0	27 5 1	45	52	48	0	0	6
20	27 6 0	27 6 6	27 7 4	50	55	54	1	0	3
21	27 7 7	27 7 5	27 7 9	52	56	53	0, 2	0, 2	0, 8
22	27 7 6	27 6 5	27 5 6	51	56	53	0	0	0
23	27 5 5	27 6 2	27 7 3	52	53	52	1, 2	2, 4	0
24	27 7 8	27 8 6	27 8 7	49	55	52	0	0	0
25	27 8 9	27 8 4	27 7 6	50	57	53	0	0	0
26	27 7 0	27 6 6	27 6 5	50	58	54	0	0	0
27	27 6 7	27 6 6	27 6 7	50	58	54	0	0	0
28	27 7 0	27 6 7	27 6 0	49	58	52	0	0	0
29	27 5 4	27 4 8	27 3 2	46	56	51	0	0	0
30	27 2 8	27 2 6	27 1 0	44	50	48	0	3, 6	4, 8
31	27 2 0	27 3 3	27 4 0	50	55	50	0, 4	0	0

Rezultado de todo o mez.

	P. L. D.			Total da chuva		
Maior elevaçaõ	27 8 9	Maior calor - -	59°	P.	L.	D.
Menor elevaçaõ	26 9 2	Menor calor -	44	6	7	6
Elevaçaõ media	27 4 2	Calor medio -	53			

MARÇO.

Ventos, e eſtado do Ceo.

Dias do mez.	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	S. O. Ceo cub. nuv. car.	S. O. e S. E. Ceo cub.	S. e S. O. Ceo cub.
2	S. E. nuv. enter.	S. O. nuv. enter.	E. e S. O. nuv. enter.
3	S. O. Ceo cub. nuv. car.	O. br. nuv. enter.	O. br. Ceo cl.
4	O br. Ceo cl. dep. S. E. cub.	S. E. Ceo cub.	S. E. dep. S. muito rij. C. cub.
5	S. O. muito rij. de temp. Ceo cub.	S. muito rij. de temp. Ceo cub. hum.	S. e O. muito rij. de temp. trov.
6	S. O. rij. de temp. C. cub.	O. rij. de temp. Ceo cub.	O. Ceo cub.
7	O. Ceo cub.	O. dep. S. O. Ceo cub.	S. O. br. Ceo cub.
8	S. E. br. Ceo cub.	S. E. br. Ceo cub.	S. e S. O. br. Ceo cub.
9	S. O. br. Ceo cub. nev. eſp. hum.	S. O. e S. Ceo cub.	S. e S. O. Ceo cub.
10	N. E. nev. eſp.	N. E. Ceo cl.	N. E. Ceo cl. e lind.
11	N. E. e E. nuv. enter.	N. E. e E. Ceo cl.	S. E. nev. alt.
12	S. E. e S. C. cub nev. alt.	O. Ceo cub. nev. alt.	O. nev. alt.
13	S. O. nev. alt.	S. O. nev. eſp. hum.	S. O. Ceo cub. hum.
14	S. O. nev. alt. hum.	S. O. nev. alt. hum.	S. O. dep. O. Ceo cub.
15	S. O. Ceo cub. dep. O.	S. O. e O. Ceo cub.	S. O. nev. eſp. hum.
16	S. O. Ceo cub. hum.	S. O. Ceo cub. hum.	S. O. muito rij. de temp. hum.
17	S. O. rij. de temp. hum.	S. O. rij. Ceo cub. hum.	O. rij. nuv. enter.
18	O. rij. nuv. enter.	O. nuv. enter.	S. O. e N. O. C. cub. trov.
19	S. O. rij. Ceo cub. trov.	S. O. e N. O. trov. e raios na Ig. $2\frac{3}{4}$	S. O e O. Ceo Cub.
20	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.
21	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.
22	O. Ceo cub.	O. e S. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.
23	S. O. e O. Ceo cub.	O. nuv. enter.	O. nuv. enter.
24	N. O. nuv. enter.	N. O. nuv. enter.	N. O e N. Ceo. cl.
25	N. dep. O. nuv. enter.	O. nuv. enter.	O. muito br. Ceo cl.
26	O. br. nuv. enter.	O. br. nuv. enter.	O. br. dep. N. nuv. enter.
27	N. nuv. enter.	N. nuv. enter.	N. nev. alt.
28	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. O. Ceo cl. e lind.
29	N. E. Ceo cl.	N. E. Ceo cub. nev. alt.	E. Ceo cub.
30	E. Ceo cub.	E. Ceo cub.	E. Ceo cub.
31	N Ceo cub.	N. e O. Ceo cub.	E. Ceo cub.

Dias

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de trov.
5	17	1	5	2	3

ABRIL

ABRIL DE 1786.

Dias do mez.	BAROMETRO.			THERMOMETRO.			PLUVIMETRO.		
	Manhan	Tarde	Noite	M.	T.	N.	M.	T.	N.
	P. L. D.	P. L. D.	P. L. D.	Grad. de Farenhei.			L. d.	L. d.	L. d.
1	27 4 0	27 3 6	27 1 3	49	54	50	0, 6	0	3, 8
2	27 0 0	26 11 3	26 10 2	50	53	52	1, 7	4, 5	3, 4
3	26 8 4	26 7 5	26 7 0	49	54	49	1, 8	9, 9	0, 7
4	26 7 2	26 11 0	27 1 5	50	53	52	4, 8	0, 9	2, 2
5	27 3 3	27 3 9	27 5 6	52	56	54	1, 3	0	0, 8
6	27 6 1	27 6 4	27 6 9	50	54	52	0, 2	0	0
7	27 7 0	27 6 4	27 5 6	50	55	54	0	0	4, 9
8	27 5 4	27 5 1	27 5 1	55	56	54	1, 9	0, 4	3
9	27 5 7	27 5 6	27 6 0	51	55	52	0	0	0
10	27 5 9	27 4 5	27 3 3	51	56	54	0	0	1, 8
11	27 3 7	27 5 6	27 6 8	52	57	54	1, 7	0	0
12	27 7 2	27 7 8	27 8 2	50	58	50	0	0	0
13	27 8 6	27 8 8	27 8 6	49	62	55	0	0	0
14	27 8 3	27 7 8	27 7 6	52	62	58	0	0	0
15	27 7 3	27 7 0	27 6 3	52	61	57	0	0	0
16	27 6 2	27 6 1	27 5 4	52	67	61	0	0	0
17	27 5 0	27 4 5	27 3 2	60	71	64	0	0	0
18	27 7 2	27 1 2	27 0 1	60	72	65	0	0	0
19	27 0 8	27 1 5	27 2 4	59	66	58	0	0	0
20	27 3 6	27 4 9	27 6 0	53	58	54	0	0	0
21	27 6 0	27 6 4	27 6 6	51	58	53	0	0	0
22	27 6 9	27 7 0	27 7 2	52	60	54	0	0	0
23	27 7 4	27 7 2	27 6 3	52	61	55	0	0	0
24	27 5 5	27 4 5	27 4 6	55	64	60	0	0	0
25	27 3 5	27 4 4	27 5 3	56	59	56	2, 3	4, 2	0
26	27 5 7	27 5 7	27 5 3	53	62	57	0	0, 8	0, 3
27	27 5 0	27 4 3	27 1 8	56	60	54	0, 5	0, 5	0, 4
28	27 0 4	26 11 3	26 11 2	56	60	55	2	0, 8	3, 2
29	26 11 6	26 11 1	26 10 7	53	58	52	0, 6	0, 7	6, 8
30	26 11 1	27 1 0	27 2 3	52	60	55	0	1, 2	0

Rezultado de todo o mez.

	P. L. D.					
Maior elevaçaõ	27 8 8	Maior calor	72°	Total da chuva.		
Menor elevaçaõ	26 7 0	Menor calor	49	P.	L.	D.
Elevaçaõ media	27 4 5	Calor medio	55	6	2	6

ABRIL.

Ventos, e estado do Ceo.

Dias do mez.	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	S. E. Ceo cub.	S. Ceo cub.	E. e S. O. trov. long.
2	E. dep. S. Ceo cub.	S. muito rij. de temp. C. cub.	S. rij. trov. muito ao long.
3	S. rij. Ceo cub.	S. muito rij. de temp. dep. S. O.	S. O. dep. S. muito rij. de temp.
4	S. O. muito rij. de temp.	S. O. dep. O. muito rij.	N. O. rij. Ceo cub.
5	N. O. rij. Ceo cub.	N. O. rij. Ceo cub.	O. rij. Ceo cub.
6	O. rij. nuv. solt. e car.	O. rij. nuv. solt. e car.	O. br. nuv. solt. e car.
7	O. nuv. car.	S. O. Ceo cub.	S. O. nev. esp. hum.
8	S. O. dep. O. nev. esp. hum.	O. nev. esp. hum.	O. Ceo cub.
9	O. rij. Ceo cub.	O. rij. Ceo cub.	O. Ceo cub.
10	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.
11	O. Ceo cub.	O. Ceo cub. dep. N.	N. nuv. solt.
12	N. nuv. solt.	N. nuv. solt.	N. e N. E. Ceo cl. e lind.
13	N. E. Ceo cl.	N. E. Ceo cl.	N. E. br. Ceo cl. e lind.
14	N. E. br. Ceo cl. e lind.	N. O. br. Ceo cl. e lind.	N. E. br. Ceo cl. e lind.
15	N. E. br. Ceo cl. e lind.	N. E. br. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
16	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.
17	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.
18	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	E. e S. Ceo cub.
19	N. E. e S. Ceo cub.	S. S. O. e O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.
20	N. Ceo cub.	N. Ceo cl.	N. E. Ceo cl. e lind.
21	N. E. e N. Ceo cub.	N. e N. O. Ceo cub.	N. E. Ceo. cl. e lind.
22	N. E. Ceo cub.	N. Ceo cub.	N. Ceo cl.
23	N. E. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl.	N. E. Ceo cl. e lind.
24	N. E. dep. S. E. Ceo cub.	O. Ceo cub.	S. E. br. Ceo cub.
25	S. E. dep. O. C. cub. e car.	O. Ceo cub.	N. O. Ceo cl.
26	N. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.	S. O. e S. Ceo cub.
27	S. Ceo cub.	S. Ceo cub.	S. Ceo cub.
28	S. E. Ceo cub. nuv. car.	S. Ceo cub. nuv. car. trov.	S. Ceo cub. nuv. car.
29	S. Ceo cub. nuv. car.	S. O. Ceo cub. nuv. car.	S. O. Ceo cub. nuv. car.
30	E. Ceo cub.	N. E. Ceo cub.	N. Ceo cl. dep. nev. alt.

Dias

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de trov.
8	14	2	2	2	3

MAI-

MAIO DE 1786.

Dias do mez.	BAROMETRO. Manhan P. L. D.			BAROMETRO. Tarde P. L. D.			BAROMETRO. Noite P. L. D.			THERMOMETRO M.	THERMOMETRO T.	THERMOMETRO N.	PLUVIMETRO. M. L. d.	PLUVIMETRO. T. L. d.	PLUVIMETRO. N. L. d.
	P.	L.	D.	P.	L.	D.	P.	L.	D.	Grad. de Farenhei.			L. d.	L. d.	L. d.
1	27	3	7	27	5	9	27	4	1	54	57	54	0	0	0
2	27	5	6	27	6	2	27	6	8	51	58	53	0	0	0
3	27	6	6	27	6	5	27	6	5	50	56	54	0	0	0
4	27	6	6	27	6	6	27	7	2	50	61	53	0	0	0
5	27	7	3	27	7	2	27	6	6	50	58	55	0	0	0
6	27	5	9	27	5	3	27	4	8	54	58	55	0	2,7	3,3
7	27	4	8	27	4	7	27	2	5	54	63	59	0	0,2	3
8	27	2	2	27	1	9	27	0	9	54	60	57	2,9	4,4	13,5
9	27	1	8	27	3	8	27	4	7	55	58	56	4,1	0	0,2
10	27	5	7	27	5	9	27	4	8	54	60	57	0	0	0
11	27	3	6	27	3	0	27	5	7	55	60	52	0	4,8	0,5
12	27	6	8	27	8	6	27	8	9	51	58	54	0,5	0	0
13	27	9	3	27	8	0	27	7	4	51	62	58	0	0	0
14	27	7	6	27	7	7	27	7	7	57	69	62	0	0	0
15	27	7	9	27	7	7	27	7	4	56	68	59	0	0	0
16	27	7	5	27	7	4	27	7	3	56	64	58	0	0	0
17	27	7	3	27	7	2	27	6	6	54	62	56	0	0	0
18	27	6	5	27	6	4	27	6	4	56	60	56	0	0	0
19	27	6	4	27	6	8	27	7	0	53	61	55	0	0	0
20	27	7	6	27	7	4	27	7	5	52	64	58	0	0	0
21	27	7	8	27	7	6	27	8	0	56	69	61	0	0	0
22	27	7	3	27	7	9	27	7	4	62	70	64	0	0	0
23	27	7	4	27	7	0	27	7	0	64	74	67	0	0	0
24	27	6	9	27	6	4	27	6	4	63	73	66	0	0	0,3
25	27	6	4	27	6	3	27	6	2	62	68	60	0	6,7	0
26	27	6	5	27	6	6	27	6	8	59	70	66	0	0	0
27	27	6	8	27	6	9	27	7	4	60	73	69	0	0	0
28	27	7	5	27	7	0	27	6	8	67	77	60	0	0	0
29	27	7	5	27	7	1	27	6	8	67	78	67	0	2,3	0
30	27	7	5	27	7	2	27	7	0	66	76	68	0	0	0
31	27	7	2	27	7	0	27	6	8	67	77	70	0	0	0

Rezultado de todo o mez.

	P. L. D.			
Maior elevaçaõ	27 9 3	Maior calor - - 78°	Total da chuva.	
Menor elevaçaõ	27 0 9	Menor calor - 50	P. L. D.	
Elevaçaõ media	27 6 4	Calor medio - 60	4 1 4	

MAIO.

Ventos, e estado do Ceo.

Dias do mez.	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	N. Ceo cub. nev. alt.	N. Ceo cub. nev. alt.	N. Ceo cub. nev. alt.
2	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
3	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
4	N. O e O. nev. alt.	N. O. e O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.
5	N. O. nev. alt.	O. Ceo cub.	O. e N. O. Ceo cub.
6	S. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub. nev. esp.	S. O. Ceo cub. nev. esp.
7	N. dep. O. Ceo cub.	O. nev. alt.	O. Ceo cub.
8	O. dep. S. O. rij. de temp. hum.	S. O. rij. nev. esp. hum.	S. O. nuv. car. hum.
9	S. O. rij. Ceo cub.	S. O. rij. Ceo cub.	S. O. rij. Ceo cub. trov. ao long.
10	S. O. muito rij. nuv. solt.	S. O. muito rij. nuv. solt.	S. O. dep. S. nuv. enter.
11	S. muito rij. de temp. C. cub.	S. e S. O. muito rij. de temp.	S. O. Ceo cub.
12	S. O. rij. Ceo cub.	O. nuv. enter.	N. E. br. Ceo cl. e lind.
13	N. E. br. Ceo emp.	N. E. br. Ceo emp.	N. E. e S. O. br. Ceo emp.
14	N. E. junt. a ter. e S. O. alt.	N. E. junt. a ter. e S. O. alt.	N. E. Ceo cl. e lind.
15	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
16	N. E. nev. esp.	N. E. Ceo cl.	N. E. Ceo cl.
17	N. E. dep. N. nev. esp.	muito var. nev. esp.	Var. ent. N. E. N. e N. O.
18	N. rij. Ceo cub.	N. rij. Ceo cub.	N. rij. Ceo cl.
19	N. rij. Ceo cl.	N. rij. Ceo cl.	N. Ceo cl. e lind.
20	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
21	N. E. e E. Ceo cl. e lind.	N. E. e N. Ceo cl. e lind.	N. E. e E. Ceo cl. e lind.
22	E. br. Ceo cl. e lind.	N. E. br. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
23	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.
24	E. dep. O. Ceo cl.	E. e N. O. trov. tod. a tar.	E. br. trov. até ás 10 hor.
25	O. e S. O. Ceo cub.	S. O. e N. trov. Ceo cub	N. O. Ceo cub.
26	N. e N. E. Ceo cub.	N. e N. E. C. cub. ar. de trov.	N. e N. E. Ceo cub.
27	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. ar. de trov.	N. E. Ceo cl. e lind.
28	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
29	N. E. e E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. dep. trov.	N. E. Ceo cl. e lind.
30	N. E. Ceo cl. e lind.	O. br. dep. N. E. C. cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
31	N. e N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.

Dias

Clar.	de chuv.	de nev.	de humid.	de temp.	de trov.
13	8	2	1	2	4

JU-

JUNHO DE 1786.

Dias do mez.	BAROMETRO. Manhan			Tarde			Noite			THERMOMETRO. M.	T.	N.	PLUVIMETRO. M.	T.	N.
	P.	L.	D.	P.	L.	D.	P.	L.	D.	Grad. de Farenhei.			L. d.	L. d.	L. d.
1	27	6	8	27	6	7	27	7	0	64	76	68	0	0	0
2	27	7	2	27	7	1	27	7	4	64	75	69	0	0	0
3	27	7	6	27	7	3	27	7	4	66	76	67	0	0	0
4	27	7	5	27	7	2	27	7	2	62	74	64	0	0	0
5	27	7	1	27	7	0	27	7	2	59	73	66	0	0	0
6	27	6	8	27	6	6	27	6	5	67	76	70	0	0	0, 4
7	27	6	6	27	6	5	27	6	3	68	72	66	0	1, 3	0
8	27	6	0	27	5	8	27	5	4	64	70	65	0	0	0
9	27	5	2	27	5	1	27	4	6	62	69	62	0	0	0
10	27	4	4	27	3	7	27	2	7	60	68	63	0	0	2, 5
11	27	3	7	27	4	9	27	5	7	62	64	60	2, 2	0	0
12	27	5	6	27	5	4	27	5	5	59	66	62	0	0, 5	1, 1
13	27	5	7	27	5	5	27	5	6	58	66	61	0	0, 4	0, 7
14	27	5	7	27	5	3	27	4	5	59	65	60	2, 7	0	2, 9
15	27	4	7	27	4	7	27	4	8	57	64	60	4, 3	0, 6	3, 7
16	27	5	0	27	5	4	27	4	2	57	66	60	0	0	5, 8
17	27	4	2	27	4	3	27	4	4	59	67	61	0, 6	0	0
18	27	5	1	27	5	1	27	5	3	60	65	60	0	0	0
19	27	6	2	27	5	7	27	6	2	59	66	59	0	0	6, 5
20	27	6	8	27	7	3	27	7	2	57	66	62	0, 5	0	1, 5
21	27	7	9	27	8	0	27	7	5	58	67	62	0, 6	0	0
22	27	7	4	27	7	6	27	8	5	58	66	63	1, 9	0	0
23	27	8	6	27	8	4	27	8	9	60	69	65	0	0	0
24	27	9	3	27	8	7	27	8	7	58	72	64	0	0	0
25	27	8	3	27	8	4	27	7	4	64	78	64	0	0	0
26	27	7	1	27	7	8	27	7	3	66	77	66	0	0	0
27	27	8	2	27	8	0	27	8	1	62	70	64	0	0	0
28	27	8	0	27	7	6	27	7	5	60	70	64	0	0	0
29	27	7	9	27	7	7	27	7	4	60	76	69	0	0	0
30	27	7	6	27	7	3	27	7	4	63	75	66	0	0	0

Rezultado de todo o mez.

	P.	L.	D.					
Maior elevaçaõ -	27	9	3	Maior calor - -	78°	Total da chuva.		
Menor elevaçaõ	27	2	7	Menor calor -	57	P.	L.	D.
Elevaçaõ media	27	6	5	Calor medio -	65	3	4	7

JU-

JUNHO.

Ventos, e eſtado do Ceo.

Dias do mez.	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	N.E.e N. O. C. cl. e lind.	N.O.dep.N.E.C.cl.e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
2	N. E. dep. O. C. cl e lind.	N. O. e N. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
3	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
4	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
5	N. e N. E. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. e N. E. Ceo cl. e lind.
6	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. trov. fort. e prox.	N. E. trov. fort. e prox.
7	N. E. trov. ao long.	N. E. e S.O.trov.ao long.	N. E. Ceo cl.
8	N. e N. O. Ceo cl.	O. e N. O. nev. alt.	N. O. dep. N. nev. alt.
9	N. O. nev. alt.	N. O. e O. nev. alt.	N. O. nev. alt.
10	N. O. Ceo cub. nev alt.	S. O. nev. alt. Ceo cub.	S. O. rij. Ceo cub.
11	S. O. rij. Ceo cub.	S. O. e O. Ceo cub.	S. O. e O. nuv. enter.
12	S. O. rij. Ceo cub.	S. O. e S. rij. nuv. car.	S. O. e S. rij. Ceo cub.
13	S. e S. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.	S. O. rij. Ceo cub.
14	S. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub. nuv. car.
15	S. O. Ceo cub. nuv. car.	S. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub. nuv. car.
16	S. O. Ceo cub.	S. O. nuv. enter.	S. O.e S.Ceo cub.nuv.car.
17	S. e S. O. Ceo cub.	S. O. e O. Ceo cub.	O. Ceo cub.
18	S. O. e O. nuv. enter.	O. nuv. enter.	O. e S. O. nuv. enter.
19	S. O. nuv. enter.	O. Ceo cl.	S. O. e O. nuv. car.
20	S. O. nuv. car.	O. br. Ceo cl.	S. O. nuv. car.
21	S. O. nuv. car.	O. nuv. enter.	O. br. Ceo cl.
22	S. O. nuv. car.	N. O. Ceo cl.	N. Ceo cl.
23	N. e N. O. Ceo cl.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.
24	N. e N. E. Ceo cl.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.
25	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.
26	N. e N. O. Ceo cl.	N. O. Ceo cl.	N. O. Ceo cl.
27	N. O. Ceo cub.	O. br. Ceo cl.	N. Ceo cl.
28	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.	N. E. Ceo cl. e liud.
29	N. E.br.nev.eſp.dep.C.cl.	N. E. br. Ceo cl. e lind.	N. E. br. Ceo cl. e lind.
30	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. rij. Ceo cl. e lind.

Dias

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de trov.
16	10	1	0	0	2

JU-

JULHO DE 1786.

Dias do mez.	BAROMETRO.			THERMOMETRO.			PLUVIMETRO.		
	Manhan	Tarde	Noite	M.	T.	N.	M.	T.	N.
	P. L. D.	P. L. D.	P. L. D.	Grad. de Farenhei.			L. d.	L. d.	L. d.
1	27 7 5	27 7 4	27 7 6	62	71	66	0	0	0
2	27 8 0	27 7 9	27 7 4	62	68	66	0	0	0
3	27 7 5	27 7 1	27 7 0	62	74	70	0	0	0
4	27 7 0	27 6 8	27 6 9	74	82	72	0	0	0
5	27 7 5	27 7 5	27 7 7	74	84	76	0	0	0
6	27 7 9	27 7 8	27 8 0	72	79	71	0	0	0
7	27 8 5	27 8 4	27 7 7	66	72	66	0	0	0
8	27 7 8	27 7 3	27 6 2	64	70	62	0	0	0
9	27 6 0	27 5 6	27 5 8	62	67	64	0	0	0
10	27 6 0	27 6 2	27 7 9	62	79	62	0	0	0
11	27 7 9	27 7 9	27 8 2	59	68	63	0	0	0
12	27 8 2	27 8 1	27 8 1	59	71	65	0	0	0
13	27 8 1	27 8 0	27 7 6	62	82	75	0	0	0
14	27 7 1	27 6 8	27 6 7	72	83	73	0	0	0
15	27 6 6	27 6 4	27 6 2	73	83	73	0	0	0
16	27 6 0	27 6 2	27 7 4	74	89	78	0	0	0
17	27 7 6	27 7 7	27 7 9	75	84	74	0	0	0
18	27 8 0	27 8 1	27 7 7	67	73	68	0	0	0
19	27 7 5	27 7 0	27 6 5	65	71	66	0	0	0
20	27 6 2	27 6 0	27 5 8	63	72	68	0	0	0
21	27 5 7	27 5 8	27 6 5	64	74	70	0	0	0
22	27 6 7	27 6 6	27 6 5	64	72	68	0	0	0
23	27 6 4	27 6 3	27 6 5	63	71	66	0	0,8	0
24	27 6 7	27 6 6	27 6 5	64	70	66	0	0	0
25	27 7 0	27 7 0	27 7 5	64	72	67	0	0	0
26	27 7 5	27 7 4	27 7 6	64	74	66	0	0	0
27	27 7 3	27 7 0	27 6 5	64	72	67	0	0	0
28	27 6 9	27 6 8	27 6 7	63	71	67	0	0	0
29	27 6 8	27 7 5	27 7 1	59	72	63	0	0	0
30	27 6 7	27 6 5	27 6 1	58	73	66	0	0	0
31	27 6 6	7 9 9	27 6 4	80	78	70	0	0	0

Rezultado de todo o mez.

	P. L. D.			Total da chuva.		
				P.	L.	D.
Maior elevaçaõ	27 8 5	Maior calor - -	83	0	0	8
Menor elevaçaõ	27 5 6	Menor calor -	59			
Elevaçaõ media	27 7 0	Calor medio -	45			

JULHO.

Ventos, e eſtado do Ceo.

Dias do mez.	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	N. E. rij. Ceo cl. e lind.	N. E. rij. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
2	N. e N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. rij. Ceo cl. e lind.	N. e N. E. nev. alt.
3	N. e N. E. Ceo cl. e lind.	N. e N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
4	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. e O. muito br. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
5	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
6	N. E. Ceo cl. e lind.	O. dep. N. E. C. cl. e lind.	N. E. nev. alt.
7	N. e N. E. nev. alt.	N. e N. E. nev. alt.	N. e O. nev. alt.
8	N. nev. alt.	N. nev. alt.	N. Ceo cl. e lind.
9	S. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.	N. O. nev. alt.
10	N. O. nev. alt.	N. nev. alt.	N. E. Ceo cl. e lind.
11	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
12	N. E. Ceo cl. e lind.	N. e N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
13	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
14	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
15	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. e E. Ceo cl. e lind.
16	N. E. e E. Ceo cl. e lind.	N. e N. E. Ceo cl. e lind.	E. Ceo cl. e lind.
17	E. e S. E. Ceo cl.	O. muito br. Ceo cl.	O. br. Ceo cl.
18	O. br. Ceo cl.	O. N. E. br. Ceo cub.	N. E. e N. Ceo cub.
19	N. Ceo cub.	N. Ceo cub.	N. Ceo cub.
20	N. e N. O. Ceo cub.	N. e N. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.
21	S. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.	S. O. br. Ceo cub.
22	S. O. br. Ceo cub.	S. O. br. Ceo cub.	S. O. br. relamp. e trov. ao long.
23	S. O. e N. E. Ceo cub.	N. E. e S. O. trov. ao long.	N. O. Ceo cub.
24	N. Ceo cub.	N. Ceo cub.	N. Ceo cub.
25	N. Ceo cub.	N. Ceo cub.	N. Ceo cub.
26	N. e N. E. Ceo. cl. e lind.	N. Ceo cub.	N. Ceo cub. nev. eſp.
27	N. Ceo cub. nev. eſp.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cub.
28	N. Ceo cl.	N. O. alg. nuv.	N. br. Ceo cub.
29	N. O. Ceo cl.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.
30	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.
31	N. Ceo cl.	N. E. Ceo cl.	N. Ceo cl.

Dias

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de trov.
19	1	1	0	0	2

AGOS-

AGOSTO DE 1786.

Dias do mez.	BAROMETRO. Manhan P. L. D.	Tarde P. L. D.	Noite P. L. D.	THERMOMETRO. M. Grad. de Farenhei.	T.	N.	PLUVIMETRO. M. L. d.	T. L. d.	N. L. d.
1	27 6 7	27 6 7	27 6 8	58	79	70	0	0	0
2	27 6 9	27 7 2	27 6 6	63	76	65	0	0	0
3	27 6 3	27 6 1	27 6 4	61	70	64	0	0	0
4	27 5 8	27 5 3	27 5 7	61	69	63	0	0	0
5	27 6 7	27 7 1	27 6 8	64	70	66	0	0	0
6	27 7 8	27 7 5	27 7 5	62	68	64	0	0	0
7	27 7 0	27 7 1	27 7 5	60	68	65	0	0	0
8	27 7 4	27 7 2	27 7 3	60	69	64	0	0	0
9	27 7 3	27 6 7	27 6 6	62	70	65	0	0	0
10	27 6 4	27 6 3	27 6 3	63	70	66	0	0	0
11	27 6 9	27 7 0	27 6 8	64	70	66	0	0	0
12	27 7 0	27 7 5	27 7 2	62	71	66	0	0	0
13	27 7 2	27 7 5	27 7 3	62	72	67	0	0	0
14	27 7 2	27 6 8	27 6 8	64	73	68	0	0	0
15	27 6 5	27 6 6	27 6 7	60	69	66	0	0	0
16	27 6 3	27 6 5	27 6 3	59	68	64	0	0	0
17	27 6 6	27 7 1	27 6 4	57	72	64	0	0	0
18	27 6 2	27 6 5	27 6 9	68	80	70	0	0	0
19	27 7 0	27 6 8	27 6 3	60	68	64	0	0	0
20	27 6 2	27 6 0	27 6 8	61	69	64	0	0	0
21	27 6 7	27 6 8	27 6 8	61	66	61	0	0	0
22	27 6 9	27 6 9	27 7 7	59	66	63	0	0	0
23	27 8 1	27 8 2	27 8 3	56	69	62	0	0	0
24	27 8 4	27 8 2	27 8 0	57	70	61	0	0	0
25	27 8 0	27 7 9	27 7 9	64	79	70	0	0	0
26	27 7 7	27 7 5	27 7 6	67	80	70	0	0	0
27	27 7 2	27 7 0	27 7 5	68	80	73	0	0	0
28	27 7 8	27 7 6	27 7 7	60	70	64	0	0	0
29	27 7 4	27 7 9	27 8 0	60	65	62	0	0	0
30	27 8 3	27 8 0	27 7 8	61	78	72	0	0	0
31	27 7 8	27 7 3	27 7 2	73	82	73	0	0	0

Rezultado de todo o mez.

	P. L. D.			Total da chuva P. L. D.
Maior elevaçaõ	27 8 4	Maior calor - -	80°	0 0 0
Menor elevaçaõ	27 5 3	Menor calor -	57	
Elevaçaõ media	27 7 1	Calor medio -	66	

AGOS-

AGOSTO.

Ventos, e eſtado do Ceo.

Dias do mez.	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
2	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
3	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.	N. O. Ceo cl.
4	N. O Ceo cl.	N. O. Ceo cl.	N. Ceo cl.
5	N. E. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl. e lind.
6	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl e lind.
7	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
8	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
9	N. E. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
10	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl. e lind.
11	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
12	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl. e lind.
13	N. nev. alt.	N. Ceo cl. dep. nev. alt.	N. O. nev. alt.
14	N. nev. alt.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.
15	N. nev. alt. dep. Ceo el.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.
16	N. Ceo cl.	N. rij. Ceo el.	N. Ceo cl.
17	N. E. br. Ceo cl. e lind.	N. rij. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
18	N. E. e E. br. Ceo cl.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
19	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl. e lind.
20	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.
21	N. nev. alt. dep. Ceo cl.	N. rij. Ceo cl.	N. Ceo cl.
22	N. nev. alr. dep. Ceo cl.	N. rij. dep. N. E. C. cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
23	N. E. rij. Ceo cl. e lind.	N. E. rij. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
24	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
25	N. E. e E. Ceo cl. e lind.	N. E. e E. Ceo cl. e lind.	N. E. e E. Ceo cl. e lind.
26	E. br. Ceo cl. e lind.	E. e N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
27	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. e N. nev. alr.
28	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. dep. nev. alr.	N. Ceo cub. nev alt.
29	N. Ceo cub. nev. alt.	N. e N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
30	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl.	N. E. Ceo cl. e lind.
31	N. E. Ceo cl.	N. E. Ceo cl.	N. E. e E. Ceo emp.

Dias

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de trov.
7	21	4	1	3	1

SE-

SETEMBRO DE 1786.

Dias do mez.	BAROMETRO. Manhan P. L. D.	Tarde P. L. D.	Noite P. L. D.	THERMOMETRO. M.	T.	N.	PLUVIMETRO. M. L. d.	T. L. d.	N. L. d.
				Grad. de Farenhei.					
1	27 7 1	27 7 0	27 7 6	68	76	72	0	0	0
2	27 7 8	27 8 0	27 8 1	63	68	62	0	0	0
3	27 8 4	27 8 4	27 7 8	60	66	63	0	0	0
4	27 7 5	27 7 7	27 7 7	63	67	61	0	0	0
5	27 7 6	27 7 5	27 7 4	56	66	61	0	0	0
6	27 7 4	27 7 2	27 7 0	63	72	64	0	0	0
7	27 7 2	27 7 0	27 7 4	58	68	62	0	0	0
8	27 7 5	27 7 5	27 7 6	59	67	60	0	0	0
9	27 7 7	27 7 6	27 7 7	58	69	65	0	0	0
10	27 7 8	27 7 6	27 7 9	60	75	66	0	0	0
11	27 7 6	27 7 8	27 8 2	60	70	63	0	0	0
12	27 8 3	27 8 0	27 7 8	60	66	64	0	0	0
13	27 7 6	27 7 4	27 7 7	60	68	60	0	0	1, 1
14	27 7 6	27 7 2	27 4 7	58	67	63	3, 4	0	0
15	27 5 0	27 6 0	27 7 2	64	64	59	0	0	0
16	27 7 6	27 7 8	27 8 6	54	62	58	0	0	0
17	27 8 7	27 8 6	27 8 9	56	72	67	0	0	0
18	27 8 3	27 8 3	27 7 8	64	80	73	0	0	0
19	27 7 8	27 7 4	27 6 5	74	82	76	3, 8	0	0
20	27 6 4	27 6 2	27 6 1	71	77	69	0	0	0
21	27 6 2	27 6 2	27 6 1	66	72	67	0	0	0
22	27 6 2	27 6 2	27 6 5	62	69	64	0	0	0
23	27 6 4	27 6 1	27 6 1	60	71	65	0	0	0
24	27 6 3	27 6 2	27 6 2	64	72	66	0	0	0
25	27 6 3	27 6 4	27 7 7	62	71	64	0	0	0
26	27 7 6	27 7 7	27 8 0	57	70	61	0	0	0
27	27 8 0	27 7 6	27 7 2	55	70	62	0	0	0
28	27 7 6	27 8 2	27 8 1	58	68	62	0	0	0
29	27 8 2	27 7 4	27 7 8	59	64	60	0	0	0
30	27 7 4	27 7 7	27 7 8	60	66	62	0	0	0

Rezultado de todo o mez.

	P. L. D.			Total da chuva.		
Maior elevação	27 8 9	Maior calor	77	P.	L.	D.
Menor elevação	27 4 7	Menor calor	54	0	8	3
Elevação media	27 6 0	Calor medio	65			

SETEMBRO.

Ventos, e eſtado do Ceo.

Dias do mez.	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	E. rij. Ceo cl.	E. e S.E. muito rij. C. cub.	S. E. e N.O. trov. ao long.
2	N. e N. E. Ceo cl.	N. E. Ceo cl.	N. E. Ceo cl.
3	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.	N. Ceo cub. nev. eſp.
4	N. nev. eſp. e hum.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
5	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
6	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
7	N. nev. eſp. dep. Ceo cl.	N. E. Ceo cl. dep. nev alt.	N. E. nev. eſp.
8	N. E. nev. alt. dep. C. cl.	N. e N. E. rij. Ceo cl.	N. E. Ceo cl. e lind.
9	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. nev. alt. dep. nev. eſp.
10	N. E. nev. eſp.	N. E. Ceo cl. e liud.	N. E. nev. alt.
11	N. e N. E. nev. eſp.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. nev. alt.
12	N. E. nev. alt. dep. C. cl.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cub. nev. alt.
13	N. e N. E. nev. alt. dep. C. cl.	N. Ceo cl.	N. nev. alt.
14	N. E. nev. alt.	N. Ceo cl.	N. dep. S. O. Ceo cub.
15	S. O. dep. N. O. e N. C. cub.	N. Ceo cl.	N. E. Ceo cl. e lind.
16	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
17	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
18	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl.	E. rij. Ceo cub.
19	E. rij. C. cub. trov. ao long.	N. E. Ceo cl.	E. br. Ceo emp.
20	E. Ceo cl.	S. nev. alt.	S. Ceo cub.
21	S. Ceo cub.	O. dep. S. O. e N. C. cub.	S. E. Ceo cub.
22	S. e S. E. Ceo cub.	O. e N. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.
23	N. Ceo cnb. nev. eſp.	N. Ceo cub.	N. E. Ceo cl. e lind.
24	N. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
25	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
26	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
27	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
28	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl.	N. nev. eſp.
29	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.
30	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.

Dias

Clar.	de chuv.	de nev.	de humid.	de temp.	de trov.
25	3	4	1	0	1

OUTU-

OUTUBRO DE 1786.

Dias do mez.	BAROMETRO. Manhan P. L. D.	Tarde P. L. D.	Noite P. L. D.	THERMOMETRO M. Grad. de Farenhei	T.	N.	PLUVIMETRO. M. L. d.	T. L. d.	N. L. d.
1	27 7 6	27 7 1	27 7 0	58	66	62	0	0	0
2	27 6 1	27 6 0	27 6 0	63	72	67	0	0	0
3	27 5 7	27 5 6	27 5 6	67	68	66	0	0	0
4	27 6 5	27 6 4	27 7 2	62	64	61	0	0	0
5	27 7 4	27 7 3	27 7 0	58	62	58	0	0	0
6	27 7 3	27 7 2	27 6 6	55	64	59	0	0	0
7	27 5 9	27 5 3	27 4 6	62	64	63	0, 2	2	9
8	27 3 6	27 3 0	27 3 0	62	63	56	4	1	0
9	27 3 8	27 4 2	27 5 5	55	61	58	0, 2	0	0
10	27 5 4	27 5 4	27 7 3	56	63	60	0	0	1, 6
11	27 7 3	27 7 3	27 8 4	58	63	60	0	0	0
12	27 8 4	27 8 4	27 8 2	56	61	57	0	0	0
13	27 7 9	27 7 6	27 7 8	52	63	58	0	0	0
14	27 7 8	27 7 5	27 7 3	57	68	64	0	0	0
15	27 7 3	27 7 0	27 6 5	61	70	64	0	0	0
16	27 6 9	27 6 8	27 6 8	62	68	64	0	0	0
17	27 7 0	27 6 8	27 7 0	58	64	60	0	0	0
18	27 7 1	27 6 8	27 6 2	58	63	59	0	0	0
19	27 6 0	27 5 0	27 4 3	55	64	60	0	0	0
20	27 3 8	27 3 3	27 2 8	58	62	60	0	0	0
21	27 2 6	27 2 3	27 2 2	58	61	60	0	5	13, 6
22	27 2 2	27 4 0	27 6 0	59	63	61	0	13	2, 8
23	27 7 0	27 7 2	27 6 8	58	64	60	3, 4	4	0
24	27 6 8	27 6 6	27 6 6	59	67	63	0	0	0
25	27 6 9	27 6 8	27 7 4	60	67	64	0	0	0
26	27 7 5	27 7 4	27 7 1	58	65	63	0	0	0
27	27 6 9	27 6 8	27 7 0	60	66	64	0	0	3, 3
28	27 7 7	27 7 6	27 7 7	59	63	61	0	0	0
29	27 7 8	27 7 7	27 7 1	57	62	60	0	0	0
30	27 7 2	27 7 0	27 6 6	58	58	56	2, 1	1	0
31	27 6 4	27 6 0	27 7 4	56	58	67	0	2	4, 2

Rezultado de todo o mez.

	P. L. D.			Total da chuva.		
				P.	L.	D.
Maior elevaçaõ	27 8 4	Maior calor - -	72°			
Menor elevaçaõ	27 2 2	Menor calor -	52			
Elevaçaõ media	27 6 5	Calor medio -	64	6	0	4

OUTU-

OUTUBRO.

Ventos, e eſtado do Ceo.

Dias do mez.	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
2	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl.
3	N. Ceo cub. nev. eſp.	O. Ceo cl.	N. Ceo cl. e lind.
4	N. Ceo cub. nev. alt.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl. e lind.
5	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
6	N. Ceo cl. e lind.	O. Ceo cl.	O. dep. S. O. Ceo cub.
7	S. O. Ceo cub.	S.O. rij. C. cub. nev. eſp. hum.	S. O. de temp. Ceo cub.
8	S. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.
9	S. O. e O. nuv. enter.	S.O. e O. nuv. enter. trov. ao long.	S. O. Ceo cl.
10	S. O. nuv. ſolt.	S. O. nuv. ſolt.	S. O. nuv. enter.
11	S. O. e O. Ceo cl.	S. O. e O. Ceo cl.	O. dep. N. O. C. cl. e lind.
12	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
13	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E Ceo cl. e lind.
14	E. Ceo cl.	S. E. e S. Ceo ennev.	S. E. Ceo cub.
15	E. e N. E. nev. alt	N. E. nev. alt.	N. E. Ceo empoado
16	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl.
17	N. Ceo cub. nev. alt.	N. E. Ceo cl.	N. E. Ceo cl. e lind.
18	N. Ceo cub. nev. alt.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.
19	N. Ceo cl.	S. Ceo cub.	S. e S. E. Ceo cub.
20	S. E. muito rij. Ceo cub.	S. E. muito rij. Ceo cub.	S.E. muito rij. trov. ao long.
21	S. E. muito rij. Ceo cub.	S. E e S. muito rij. C. cub.	S. E. rij. Ceo cub.
22	S. E. e S. rij. Ceo cub.	S. E. Ceo cub.	S. e O. br. Ceo cl.
23	S. O. br. Ceo cub.	O. e N. Ceo cub.	N. e N. E. Ceo cl.
24	E. e S. br. Ceo cub.	E. e S. Ceo cub.	E. Ceo cub.
25	E. Ceo cub. nev. alt.	E. Ceo cub. nev. alt.	N. E. e E. Ceo cl.
26	N. E. e E. Ceo cl.	E. Ceo cub. nev. alt.	E. Ceo cl.
27	E. Ceo cub.	S. E. e S. Ceo cub.	O. e N. O. Ceo cl.
28	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.	N. Ceo cl. e lind.
29	O. Ceo cub.	O. S. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.
30	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.
31	O. e S. O. Ceo cub.	O. Ceo cub.	N. Ceo cl.

Dias

Ciar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de trov.
13	10	1	0	2	1

NO-

NOVEMBRO DE 1786.

Dias do mez.	BAROMETRO. Manhan P. L. D.	BAROMETRO. Tarde P. L. D.	BAROMETRO. Noite P. L. D.	THERMOMETRO. M. Grad. de Farenhei.	THERMOMETRO. T.	THERMOMETRO. N.	PLUVIMETRO. M. L. d.	PLUVIMETRO. T. L. d.	PLUVIMETRO. N. L. d.
1	27 7 3	27 7 0	27 4 7	58	63	60	0	8,4	8,6
2	27 4 7	27 4 4	27 2 0	57	58	58	0,3	0	6,7
3	27 2 7	27 3 7	27 5 6	51	58	56	0	0	0
4	27 6 2	27 6 8	27 6 8	44	52	49	0	0	0
5	27 6 6	27 6 2	27 5 4	49	54	52	0	0	0
6	27 5 3	27 4 9	27 5 6	48	54	51	0	0	0
7	27 5 9	27 6 1	27 6 3	48	55	52	0	0	0
8	27 6 3	27 6 2	27 6 1	49	55	51	0	0	0
9	27 6 2	27 6 0	27 3 5	48	55	52	0	0	0
10	27 3 4	27 4 0	27 4 8	51	53	51	0,3	0,2	2,5
11	27 5 0	27 5 8	27 5 7	49	55	53	0	0	0
12	27 4 5	27 4 0	27 3 5	51	55	52	0	1,5	0,5
13	27 3 5	27 3 2	27 3 0	47	54	51	0	0	0
14	27 2 3	27 1 8	27 2 7	50	54	53	0	16,5	1
15	27 0 8	26 11 8	27 1 0	52	55	54	0,4	2	1,1
16	27 1 9	26 11 7	26 10 7	53	57	56	0,3	0,9	4,1
17	27 1 9	27 2 7	27 4 7	52	57	56	0,2	1	1,4
18	27 5 0	27 4 9	27 2 9	56	59	58	0,2	0,2	2,8
19	27 4 8	27 6 2	27 7 5	58	60	58	0,7	0	0
20	27 8 4	27 8 3	27 8 3	58	61	58	0	0	0
21	27 8 1	27 7 6	27 5 7	54	60	58	0	0	0
22	27 5 1	27 4 7	27 5 7	51	58	54	4,2	0	0
23	27 5 3	27 5 0	27 2 8	53	59	58	0	0	9,9
24	27 3 0	27 4 0	27 5 9	54	52	51	3,6	0,8	0
25	27 5 8	27 5 0	27 4 3	52	56	54	0	1	2,4
26	27 4 8	27 4 9	27 5 4	56	57	56	0	0	4,6
27	27 6 8	27 7 8	27 9 4	55	56	52	0	0	0
28	27 10 4	27 10 2	27 9 0	50	56	53	1,6	0	0
29	27 9 0	27 8 8	27 8 7	51	54	53	0	1,8	0,2
30	27 8 4	27 8 3	27 8 4	54	56	52	0	1. 1	0

Rezultado de todo o mez.

	P. L. D.				
Maior elevaçaõ	27 10 4	Maior calor	63	Total da chuva.	
Menor elevaçaõ	26 10 7	Menor calor	44	P. L. D.	
Elevaçaõ media	27 5 4	Calor medio	54	7 9 0	

NOVEMBRO.

Ventos, e eſtado do Ceo.

Dias do mez.	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	O. e S. O. Ceo cub.	O. e S. O. Ceo cub.	O. e S. O. Ceo cub.
2	O. e S. O. Ceo cub.	O. e S. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.
3	E. Ceo cl.	N. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
4	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
5	N. Ceo cl. e lind.	N. nev. alt.	N. e N. E. Ceo cl.
6	N. Ceo cub.	N. Ceo cub.	N. E. Ceo cl e lind.
7	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
8	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.	N. Ceo cl. e lind.
9	N. Ceo cl.	N. Ceo cl.	N. dep. S. E. Ceo cub.
10	S. E. Ceo cub.	E. e S. E. Ceo cub.	S. E. e E. Ceo cub.
11	E. Ceo cub.	N. E. e N. Ceo cub.	N. Ceo cub.
12	N. d p. S. Ceo cub.	S. e E. Ceo cub.	E. Ceo cub.
13	E. Ceo cub.	E. Ceo cub.	E. Ceo cub.
14	E. Ceo cub.	E. Ceo cub.	N. Ceo cub.
15	S. O. Ceo cub.	S. O. mu to rij. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.
16	O. rij. Ceo cub.	S. O. muito rij. Ceo cub.	S. O. muito rij. dep. O. br. Ceo cub.
17	O. rij. Ceo cub.	O. rij. Ceo cub.	S. O. br. Ceo cub.
18	S. O. Ceo cub.	S. O. C. cub. nev. eſp. hum.	S. O. rij. nev. eſp. hum.
19	S. O. e O. Ceo cub. hum.	O. Ceo cub.	O. e N. O. Ceo cl.
20	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.	O. Ceo cl.
21	O. Ceo cl.	S. br. dep. E. Ceo cl.	E. br. Ceo cl. e lind.
22	E. dep. S. Ceo cub.	S. dep. S. O. Ceo cub.	S. br. Ceo cub.
23	S. br. Ceo cub.	S. rij. Ceo cub.	S. rij. Ceo cub.
24	S. e O. Ceo cub.	O. e N. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cl.
25	O. Ceo cub.	O. e S O. Ceo cub.	O. e S. O. Ceo cub.
26	S. O. Ceo cub.	S. e S. O. Ceo cub.	O. e S. O. Ceo cub.
27	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.	N. E. br. Ceo cl. e lind.
28	N. br. Ceo cl.	N. e N. E. br. Ceo cl.	N. dep. S. O. br. Ceo cl
29	S. O. br. Ceo cub.	S. e S. O. Ceo cub.	S. e S. O. br. Ceo cl.
30	S. e S. O. br. nev. eſp.	S. e S. O. C. cub. nev. eſp.	S. e S. O. br. nev. eſp.

Dias

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de trov.
7	18	2	2	0	0

D E-

DEZEMBRO DE 1786.

Dias do mez.	BAROMETRO. Manhan P. L. D.	Tarde P. L. D.	Noite P. L. D.	THERMOMETRO. Grad. de Farenhei. M.	T.	N.	PLUVIMETRO. M. L. d.	T. L. d.	N. L. d.
1	27 8 5	27 8 3	27 8 4	54	56	54	0	0	0,8
2	27 8 6	27 8 5	27 8 0	57	59	56	0,2	0	0,5
3	27 7 9	27 7 4	27 7 0	55	57	53	0	0	3,1
4	27 5 8	27 4 7	27 6 4	50	59	54	0,8	3,7	1,9
5	27 6 2	27 5 0	27 1 1	52	57	54	0	0	9,5
6	27 0 1	27 0 2	27 2 3	52	57	53	2,5	0,6	0
7	27 3 8	27 4 8	27 6 3	50	56	52	0	1,3	0
8	27 6 9	27 6 5	27 7 1	50	55	53	0	0	4,8
9	27 7 9	27 8 4	27 9 5	52	56	52	0	0	0
10	27 9 0	27 8 0	27 5 0	49	55	53	0	0	9,6
11	27 6 5	27 7 5	27 9 0	48	53	49	1,3	0	0
12	27 9 6	27 10 0	27 11 2	49	56	54	0	0	1,6
13	27 11 8	27 11 4	27 11 1	52	57	54	0	0	0,7
14	27 10 9	27 10 8	27 10 5	54	56	54	0,6	0,3	0,9
15	27 10 0	27 9 8	27 9 5	53	56	53	0	0	0
16	27 10 0	27 9 1	27 8 0	48	52	49	0	0	0
17	27 7 1	27 6 2	27 4 9	50	53	52	0	0,5	1,6
18	27 3 9	27 3 2	27 2 5	54	58	57	0,6	0,8	9,7
19	27 2 4	27 2 8	27 3 7	50	53	50	0,2	0,2	0,5
20	27 3 9	27 4 0	27 4 5	45	48	45	0	0,9	2,6
21	27 4 7	27 4 9	27 3 5	40	46	44	0	0,3	0
22	27 1 9	26 11 0	26 7 4	41	43	41	0	0,5	1,9
23	27 6 6	27 7 6	27 0 0	48	49	47	2,8	3	0,5
24	27 1 9	27 3 2	27 2 4	44	48	45	0	0	0
25	27 0 4	27 0 0	27 1 8	43	47	46	0	0	4
26	27 2 3	27 2 4	27 6 5	44	46	44	0	0	0
27	27 7 4	27 7 6	27 8 8	46	50	49	0	0	0
28	27 9 5	27 9 4	27 9 3	48	52	48	0	0	0
29	27 10 0	27 9 5	27 9 2	46	52	48	0	0	0
30	27 9 3	27 9 7	27 9 8	44	51	50	0	0	0
31	27 9 8	27 10 0	27 9 9	44	53	50	0	0	0

Rezultado de todo o mez.

	P. L. D.				Total da chuva		
					P.	L.	D.
Maior elevaçaõ	27 11 8	Maior calor - -	59°		6	3	3
Menor elevaçaõ	26 7 4	Menor calor -	40				
Elevaçaõ media	27 6 4	Calor medio -	51				

DE-

DEZEMBRO.

Ventos, e eſtado do Ceo.

Dias do mez.	Manhan.	Tarde.	Noite.
1	S. O. Ceo cub.	O. br. Ceo cl.	O. br. Ceo cub. nev. eſp
2	O. br. nev. eſp.	O. br. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.
3	S. O. Ceo cub. nev. eſp.	S. O. Ceo cub.	S. O. dep. N. E. br.
4	N. E. dep. S. O. Ceo cub.	S. O. rij. Ceo cub.	S. O. dep. N. O. Ceo cub.
5	N. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.	S. O. rij. depN.O.C. cub.
6	S.O.e N.O.rij.trov.de paſ.	N. O. Ceo cub.	N. E. Ceo cub.
7	N. O. nuv. enter.	N. O. nuv. enter.	N. O. nuv. enter.
8	N. O. Ceo cub.	O. e S. O. Ceo cub.	S. O. dep. N. O. Ceo cub.
9	N. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.	N. O. br. Ceo cl.
10	N. O. dep. O. Ceo cub.	S. O. Ceo cub.	S.e S.O.muito rij.de temp.
11	N. Ceo cl. e lind.	N. O. Ceo cl.	N. O. e N. Ceo cl.
12	N. O. br. Ceo cl. e lind.	O. Ceo cub. nev. eſp.	N.O.dep. N. C. cl. e lind.
13	N. br. Ceo cl. dep. enev.	N. O. e N. Ceo enev.	N. br. nev. eſp.
14	N. br. nev. alt.	N. e N. O. nev. alt.	N. br. nev. eſp.
15	N. Ceo cub.	N. e N. O. Ceo cub.	N. Ceo cub.
16	N. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.
17	O. Ceo cub.	O. e S. O. Ceo cub.	O. e S. O. Ceo cub.
18	O. S. O. nev. eſp. hum.	O. e S. O. nev. eſp. hum.	S. O. dep. N. O.Ceo cub.
19	O. e N. O. Ceo cub.	O. e N. O. Ceo cub.	N. O. Ceo cub.
20	N. e O. Ceo cub.	O. e N. O. Ceo cub.	O. e N. O. Ceo cub.
21	O. Ceo cub.	O. Ceo cub.	N. dep. N. E. Ceo emp.
22	O. E. rij. Ceo cub.	N. E. rij. Ceo cub.	N. E. e S. E. muito rij. de temp.
23	N. E. e S. E. muito rij. de temp.	N. E. rij. Ceo cub.	N. E. Ceo cub.
24	N. E. Ceo cub.	N. e N. E. Ceo cub.	N. E. Ceo cub.
25	N. E. e E. Ceo cub.	N. E. Ceo cub.	N. E. Ceo cub.
26	N. E. Ceo cub.	N. E. Ceo cub.	N. E. Ceo cub.
27	N. e N. E. Ceo cl.	N. E. Ceo cl.	N. E. Ceo cl. e lind.
28	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
29	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
30	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.
31	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.	N. E. Ceo cl. e lind.

Dias

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de trov.
7	21	4	1	3	1

Re-

Resultado de todo o Anno

BAROMETRO.	P.	L.	D.	THERMOMETRO		PLUVIMETRO.		
						Total da chuva		
						P.	L.	D.
Maior elevaçaõ	27	11	9	Maior calor - - -	89	54	5	2
Menor elevaçaõ	26	6	5	Menor calor - -	36			
Elevaçaõ media	27	5	5	Calor medio - -	58			

Dias

Clar.	de chuv.	de nev.	de humidade.	de temp.	de trov.
164	125	23	18	16	23

A Esterilidade d'este anno foi muito geral: toda a natureza foi escassa nas suas producções: só em fructos de espinho foi abundante. O paõ, vinho, e azeite faltou inteiramente, e no gado houve grande mortandade. - - -

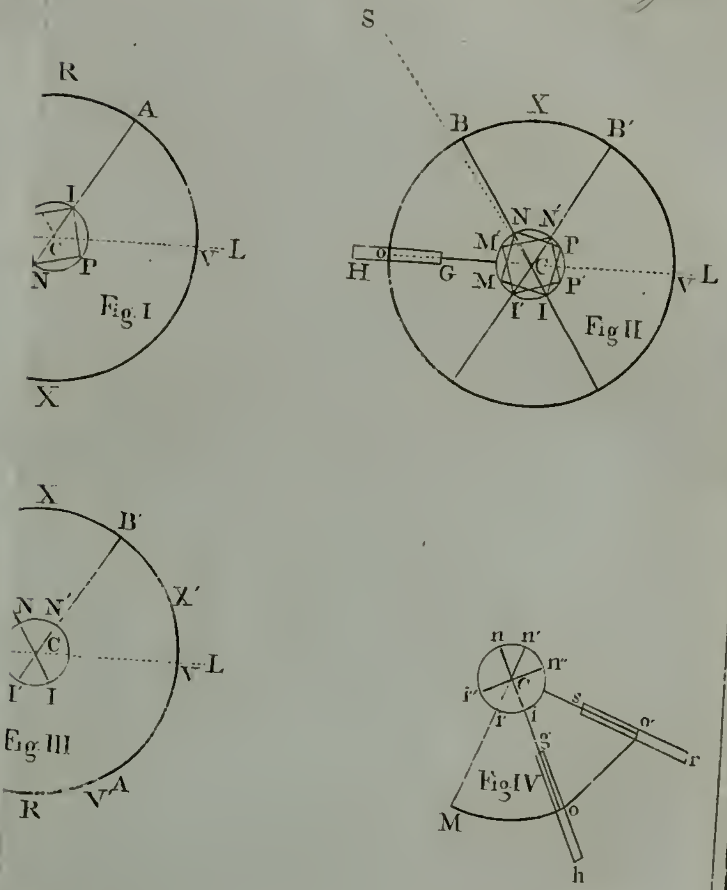
Este anno foi muito doentío: as febres intermitentes, e esquinencias reináraõ com mais ou menos força por todo o Veraõ e Outono: a molestia da esquinencia pareceu epidemica: nas crianças e pessoas de menos idade vinha acompanhada frequentemente de febre escarlatina: as Pessoas, que fôraõ soccorridas a tempo com sangrias, diluentes, e na declinaçaõ com catharticos, escapáraõ felizmente: nos Casaes e Aldeias, aonde estes soccoros naõ fôraõ promptos, nem administrados a tempo, morrêraõ muitas pessoas.

ANNO DE 1786.

A Freguezia de Santo André d'esta Villa de Mafra, no districto de pouco mais de huma legoa em quadro, consta de 653 fogos, nestes houve este anno

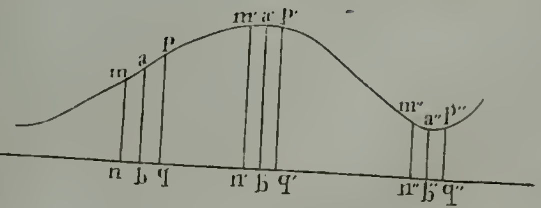
Pessoas de Communhaõ - - - -	2ↀ277
Menores - - - - - - - - - -	148
Total - -	2ↀ425
Baptizáraõ-se - - - - - - - - - -	88
Morrêraõ	
Homens - - - - - - - - - - - -	31
Mulheres - - - - - - - - - - - -	25
Meninos - - - - - - - - - - - -	20
Meninas - - - - - - - - - - - -	10
Total - - -	86
Casamentos em todo o anno - - -	22

Mem. pag. 153

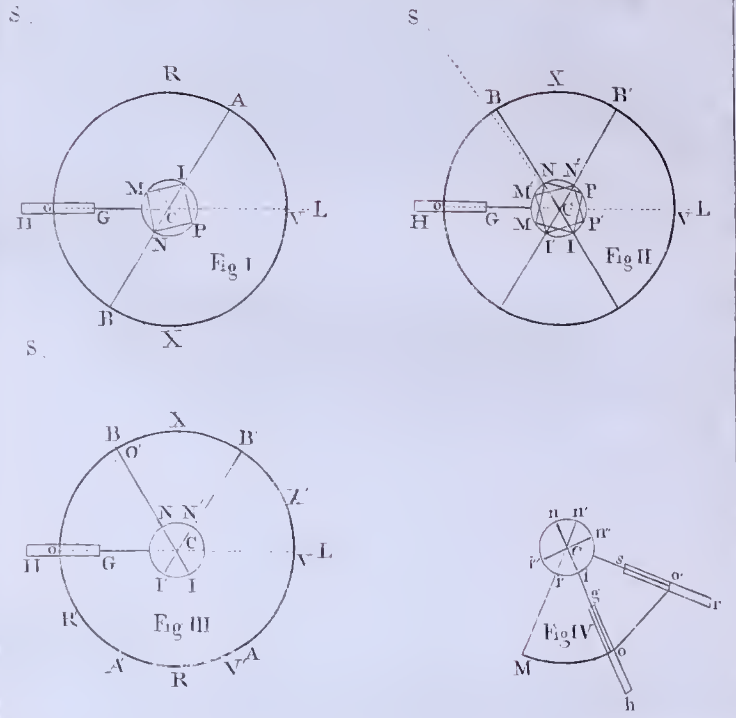


pag. 15

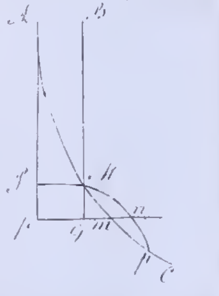
Mem. pag. 168.



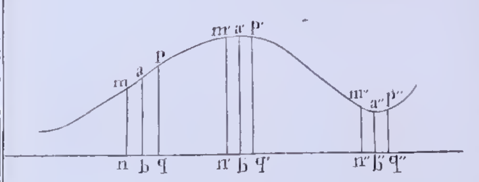
Mem. pag. 15.



Mem. [illegible] pag. 15



Mem. pag. 118.



MEMORIA

Sobre os instrumentos de Reflexaõ.

POR JOSÉ MARIA DANTAS PEREIRA.

L'esprit va toujours de proche en proche.
La Lande.

NINGUEM duvída, que os instrumentos de reflexaõ saõ os mais proprios para as observações maritimas: he tambem claro, que a maior exacçaõ d'estas depende da maior precisaõ, e simplicidade dos instrumentos, com os quaes se praticaõ: taes fôraõ os motivos, que me determináraõ a reflectir sobre os que até ao presente se tem inventado. Lida em 18 de Abril de 1792.

Vî, que entre os de Hadley, Smith, Fouchy, Mayer, e o do celebre Newton, seu primeiro inventor, merecia ser preferido o circular de Mayer; especialmente depois que aperfeiçoado pelo Cavalheiro de Bordá ficou tanto, e taõ evidentemente superior aos outros do mesmo genero: assim analysei-o com particularidade; e d'esta analyse resultou o novo instrumento, que passo a descrever com aquella confiança, que em pontos taes póde subministrar a theoria combinada com a prática pessoal dos referidos instrumentos.

Descripçaõ do novo Circular.

He hum circulo de metal OXVR (Fig. I.) dividido em 720°: o seu corpo construido por hum modo semelhante ao do Cavalheiro de Bordá, e elle em si dirigido ao mesmo fim de observar as distancias da Lua aos outros Astros nas determinações das Longitudes.

No centro tem hum espelho NI, parte estanhado, e parte transparente, que se faz girar por meio de huma alidade

dade AB, na qual anda fixo pela direcçaõ da linha de fé CA perpendicularmente ao plano OXVR.

A alidade CO gira tambem ároda do centro C: nella deve eſtar montado o óculo da meſma ſorte que o Cavalheiro de Bordá engenhoſa e perfeitamente o enſinou a collocar no ſeu circular, com a differença de fazer paſſar o ſeu eixo pelo centro do inſtrumento; coiſa de facil prática, e de facil verificaçaõ a bordo; por quanto póde marcar-ſe no eſpelho huma recta perpendicular ao plano OXVR, e que paſſe, ou pelo centro C, ou pela linha de fé da alidade do oculo; e logo quando a quella recta cortar os extremos oppoſtos dos fios parallelos, ou os angulos oppoſtos do reticulo, ſe eſte for romboide, julgaremos exacta a poſiçaõ do oculo; tal he hum dos meios, que ſe poderá empregar para obter a dita verificaçaõ.

Na parte circular da alidade haveraõ quatro fendas, IM, MN, NP, PI, que ſe cortem em angulo recto formando hum quadrado inſcripto no circulo IMNP; neſtas entraráõ os vidros córados á maneira de corrediças, quando forem neceſſarios para as obſervações. Em fim a principal differença entre o novo inſtrumento e o de M. de Bordá, conſiſte em ter hum ſó eſpelho; e como as mais alterações ſaõ conſequencias d'eſta, deixando de continuar com ellas, vou moſtrar o modo de uſar do novo circular.

Modo de obſervar as diſtancias angulares.

Todo eſte paragrafo deve reduzir-ſe a moſtrar como com hum dos novos inſtrumentos ſe póde medir qualquer angulo SCL, formado em hum ponto C pelos raios viſuaes tirados d'eſte ponto a dois objectos S, e L: ſupponhamos pois, que ſe queira effectivamente medir o angulo SCL: fixaremos a alidade do oculo em qualquer ponto O, e olhando para o objecto menos luminoſo L pela parte tranſparente do eſpelho, moveremos eſte por meio da ſua alidade até vêr o outro objecto S em contacto com L, por meio de huma re-

fl.xaõ

flexaõ ſimples feita na parte eſtanhada do meſmo eſpelho; entaõ o angulo BCO, dado pelas alidades, ſerá metade do que ſe pertendia conhecer; e como o circulo eſtá dividido em 720°, o numero de gráos de BO ſerá o valor do angulo LCS; iſto he claro, pois para que S pareça eſtar na linha LO, como o angulo de incidencia SCL deve ſer igual ao de reflexaõ BCO, e BCO=ACL, ſerá SCA=ACL, e por conſequencia ACL, ou BCO=$\frac{1}{2}$ LCS.

Imaginando agora, que o plano do inſtrumento gire á roda de LCO como eixo até completar huma ſemi-revoluçaõ, a alidade AB ficará na poſiçaõ AB (Fig. II.) e todas as mais partes d'elle ficaráõ tambem na poſiçaõ, em que as repreſenta a meſma Fig. II: logo andando com AB até chegar á poſiçaõ A′B′ directamente oppoſta á da Fig. I. tornaremos a vêr em contacto os objectos L, e S; e o angulo A′CO igual ao primeiro BCO marcará de novo a diſtancia angular dos meſmos objectos.

He manifeſto, que iſto deve ſucceder aſſim, naõ havendo defeito na poſiçaõ do eſpelho, por cuja cauſa o primeiro angulo BCO ſaia maior ou menor do que deve ſer; mas neſte caſo o ſegundo A′CO ſerá outro tanto menor ou maior; logo ametade da ſomma de ambos moſtrará ſempre a diſtancia angular LCS, e a ſemi-differença d'elles ſerá quanto o eſpelho ſe aparta da ſua poſiçaõ verdadeira; quantidade a quem por eſte motivo chamaremos: *Erro de poſiçaõ*.

A' combinaçaõ das duas obſervaçóes referidas daremos o nome de *obſervaçóes cruzadas*, por ſupprirem as d'eſta meſma denominaçaõ feitas com o circular de Mayer.

Reflexões.

I. Póde acontecer naõ ſerem parallelas as faces do eſpelho; ſendo aſſim deveremos recorrer ás maneiras actualmente praticadas para corrigir os defeitos d'eſte genero; advertindo com tudo, que nas obſervaçóes cruzadas quaſi nada influirá, como he facil moſtrar, e que em taes cir-

cunſtancias a ſemi-differença dos dois angulos BCO, A′CO, naõ repreſentará ſómente o erro de poſiçaõ, mas ſim eſte meſmo erro augmentado, ou diminuido do effeito produzido pela falta de parallelismo nas ſuas faces.

II. Fazendo as alidades de modo que as diſtancias entre os o dos ſeus nonios cheguem até 10°, ambas poderáõ girar no plano ſuperior e graduado do Circular, aliàs ſerá preciſo que huma d'ellas gire no plano, ou face inferior: a razaõ dos 10° facilmente ſerá deſcoberta entre o que formos dizendo.

III. Em lugar do diametro AB póde ſubſtituir-ſe o raio BC, pois entaõ teremos o valor do angulo $A'CO = 360° - BCO$: ora ſe neſta hypotheſe conſervamos o raio BC fixo durante a ſegunda obſervaçaõ, e fazemos girar o oculo á roda do centro C, ſem que o aſtro L ſaia do ſeu campo, e iſto até S tocar L, como ſe vê na Fig. III, o ſemi-ſupplemento a 360° do arco OCO′, ou o ſupplemento da ſua metade repreſentará o valor do angulo obſervado, e $\frac{BCO - A'CO}{2}$ o erro de poſiçaõ. Logo ſe continuarmos a obſervar d'eſte modo, fixando o oculo nas obſervaçóes impares, e fazendo-o mover nas pares, o ſupplemento do quociente, que reſultar dividindo o arco deſcripto pelo oculo pelo numero das obſervaçóes, deve ſer igual á grandeza da diſtancia angular dos dois objectos S, e L, correſpondente ao tempo medio das meſmas obſervaçóes: e eſte ſupplemento ſerá $<$ ou $>$ 180°, conforme o oculo tiver girado da direita para a eſquerda, ou pelo contrario.

Vantajens do novo Instrumento de Reflexaõ.

Os Circulares ordinarios comparados com os outros inſtrumentos de Reflexaõ ſaõ-lhes ſuperiores, por eſtarem menos ſogeitos aos erros da graduaçaõ; pela maior commodidade que a ſua figura offerece ao obſervador; e por naõ preciſarem da verificaçaõ do parallelismo dos eſpelhos: o novo Cir-

Circular participa da primeira ſuperioridade em gráo igual, pois em ambos ſe podem repetir as obſervações, uſando de qualquer parte do limbo; da ſegunda com preferencia por ſer mais ſimples; e da terceira com a maior vantagem por ter hum ſó eſpelho.

Demais vê-ſe nelle por meio de huma reflexaõ ſimples o meſmo que os outros moſtraõ por huma reflexaõ dupla, donde ſe ſegue augmento de luz, e diminuiçaõ de meios, cujos defeitos pelo menos ſaõ poſſiveis: viſto compôr-ſe de hum ſó eſpelho central, as correcções proprias do horizontal, e da concurrencia de ambos ficaõ aniquiladas; o que ſimplifica, e faz mais exactas as obſervações: Os raios de luz nunca atraveſſaõ duas vezes os vidros córados, como acontece nos de Bordá, quando a diſtancia obſervada he $>5°$ e $<34°$; e nunca os atraveſſaõ formando com elles angulos $<45°$; aſſim diminue-ſe a probabilidade de erro produzido pela falta de parallelismo nas faces dos ditos vidros: além d'iſto, como os raios de luz vindos de L penetraõ IP, formando com elle o meſmo angulo formado com IM pelos emanados de S, e IM tem a reſpeito do eſpelho poſiçaõ igual á de IP, a mencionada falta de parallelismo nas faces reſpectivas dos dois vidros deve por eſta cauſa ſer tambem de menor influencia, ſuppondo-a no meſmo ſentido: naõ devo eſquecer a facilidade de fazer as obſervações com o preſente Circular, pois que o obſervador leva já ſabido, que o raio BC deve ſer dirigido ao meio do Ceo comprehendido entre S, e L. M. de Fouchy queixava-ſe da multiplicidade de imagens, que ſe notaõ nos inſtrumentos de reflexaõ, ora he evidente, que metade d'ellas deve deſapparecer neſte Circular: em fim a exactidaõ das obſervações naõ depende da diſtancia dos objectos obſervados, antes póde meſmo ſer bem limitada.

A falta que lhe acho, conſiſte em naõ poder ſervir para angulos menores que $10°$, viſto naõ poder ſer $SCA>5°$ por cauſa da grande obliquidade dos raios de luz relativamente ao eſpelho; porém como as diſtancias, que ſe obſervaõ

para

para as longitudes, saõ quasi sempre > 30°, e nunca < 20°, a dita falta reduz-se a nada.

O novo Circular póde tambem ser empregado em medir as alturas dos Astros sobre o horizonte.

He evidente, que este Circular póde igualmente servir para observarmos as alturas dos Astros sobre o horizonte, como acontece ao do Cavalheiro de Bordá; com tanto que, em lugar da observaçaõ preparatoria do parallelismo dos espelhos, se determine o Erro de posiçaõ, afim de attendermos a elle: e ainda que neste cazo naõ seja possivel observar directamente as alturas <10°, fica o recurso da observaçaõ de revez; observaçaõ sim menos commoda, por ser preciso pôr a cabeça de maneira, que naõ corte os raios da luz vindos do Astro, mas que naõ admitte impossibilidade.

Conseguir-se-ha naõ ser necessario attender ao erro de posiçaõ, observando alturas cruzadas do mesmo modo, que as distancias; e se as alturas fôrem, ora do limbo superior, ora do inferior, escusaremos tambem a correcçaõ do semi-diametro do astro observado.

Reflexões.

Os novos instrumentos devem custar menos que os ordinarios, por serem mais simplices: por esta mesma causa dependem menos das luzes do Artista, que os construir; pois basta, que o seu limbo seja bem contornado, e forme hum plano perfeito; que as alidades girem parallelamente ao dito plano; e que o espelho, e eixo do oculo passem pelo centro: ora as tres primeiras condições saõ commuas a todos os instrumentos de reflexaõ; a quarta, que substitue as outras precisas aos mais instrumentos, he assaz facil de alcançar; por tanto combinando este instrumento com os actuaes do mesmo genero, parece-me que posso affirmar ter unido nelle

nelle o ſimples ao util; ao menos elle he o primeiro de quantos conheço, que moſtra os objectos do modo mais ſingelo, a ſaber, hum directamente, e o outro por huma ſimples reflexaõ.

Os principios expostos podem ser applicados a todos os instrumentos de Reflexaõ.

Agora que tenho concluido a deſcripçaõ geral do novo Circular, vou fazer vêr, que os outros inſtrumentos de Reflexaõ ſaõ tambem ſuſceptiveis de mudanças ſemelhantes, moſtrando, que meſmo com o Oitante ſe podem medir quaeſquer diſtancias, havendo neſte hum ſó eſpelho eſtanhado-tranſparente poſto no ſeu centro.

Seja MEO (Fig. IV) hum oitavo de circulo, cujo arco MO eſteja dividido em 90°, e NI hum eſpelho, meio eſtanhado e meio tranſparente, poſto no centro C, na direcçaõ CO, e fixo ſegundo o coſtume ſobre huma alidade perpendicularmente ao plano MEO; ſejaõ em fim HEO dois oculos fixos, cujos eixos concorraõ em C fazendo hum angulo de 45°, digo, que com hum inſtrumento d'eſtes podemos obſervar todas as diſtancias da Lua aos mais Aſtros deſde 10° até 180°, e todas as alturas dos Aſtros ſobre o horizonte. NI póde fazer com o eixo de GH todos angulos poſſiveis deſde 0° até 15°, e com o eixo de SR todos os angulos deſde 45° até 90°, pois que póde occupar todas as poſições diverſas comprehendidas entre NI e N'I'; logo podemos obſervar por GH todos os angulos deſde 10° até 90°, e por SR todos os comprehendidos entre 90° e 180°; ora ſe eſtes forem alturas, e $<10°$, conhecellos-hemos obſervando o ſeu ſupplemento pelo oculo RS: a razaõ dos 10° he evidente; logo tenho demonſtrado.

Notas.

I. Quando as alturas forem $>10°$, e $<90°$, ao meſmo tempo que ſaõ obſervadas directamente por GH, podemos

obſervar por SR os ſeus ſupplementos, e aſſim faremos, que os dois oculos verifiquem a meſma obſervaçaõ.

II. Sendo as obſervações bem feitas, e o inſtrumento ſem erro, ſe pela ſegunda naõ tivermos o ſupplemento da primeira, a ſemi-differença entre eſtas duas quantidades ſerá igual a $45^\circ \backsim$ OCO', e OCO' $>$ ou $<45^\circ$, conforme a ſegunda obſervaçaõ der menos, ou mais do que o ſupplemento da primeira: he pois facil conhecer o valor preciſo de OCO', para ſe ajuntar o ſeu dobro aos arcos dados pelo inſtrumento, quando ſe obſerva pelo oculo RS, a fim de ter o numero de gráos, e partes de gráo das diſtancias obſervadas.

III Em lugar dos dois oculos pode-ſe empregar hum, pondo-o nos lugares O, e O', conforme for neceſſario.

IV. Póde-ſe evitar a mudança do oculo, uſando de duas alidades, que girem independentes, huma na face ſuperior, e outra na inferior do inſtrumento; porque ſupponhamos ſer OC a ſuperior, ME a inferior, e que o oculo eſteja em O; movendo NI com OC até M poderemos obſervar por GH os angulos $>10^\circ$, e $<90^\circ$; chegado pois CO a ME traga-ſe CM ſó para OC, ſepare-ſe o eſpelho de OC, e una-ſe a ME, agora andando com ME até á ſua primeira poſiçaõ, o eſpelho girará deſde N'I' até N''I'' formando com o eixo de GH todos os angulos $>45^\circ$, e $<90^\circ$; logo poderemos aſſim medir as diſtancias angulares comprehendidas entre 90°, e 180°, que he quanto nos faltava. D'eſta ſorte naõ ſómente ſe evita a mudança do oculo, mas tambem toda a porçaõ OCO' do Oitante.

V. Se o apparelho central for ſuſceptivel de movimentos ſemelhantes aos que tenho viſto em alguns inſtrumentos de Reflexaõ enviados por Magalhaens á Real Academia dos Guardas da Marinha, poderemos tambem diſpenſar-nos de os fazer conſtruir com duas alidades; porque, apenas OC eſtiver ſobre ME, tira-ſe-lhe o apparelho, e deixando-o immovel na poſiçaõ N'I', faz-ſe voltar OC a O, onde ſe lhe reune o meſmo apparelho, com o qual póde OC tornar a CM, e logo NI de N I' para N'I'', que he quanto ſe pertende.

Iſto deve ſer extremamente facil, conſtruindo a parte circu-

circular da alidade de tal modo, que se possa fixar-lhe o espelho em direcções, que formem entre si angulos de 45°, e nunca em outras.

VI. sendo OCO′=45°, a semi-differença indicada em o n°. II deve representar o erro de posiçaõ, additivo no 1.° caso, e subtractivo no 2.°

VII. Quando o instrumento tem erro, e OCO′ >ou<45°, a dita correcçaõ deve corrigir o effeito simultaneo d'estas duas faltas: assim para as conhecer separadamente, determinaremos primeiro o erro, ou observando ao mesmo tempo augulos <90° com outro instrumento ja correcto, ou medindo os mesmos augulos por algum outro meio a fim de os conhecer exactamente, ou medindo angulos conhecidos &c. depois do que nenhuma duvida nos restará sobre este assumpto.

Sendo o arco do instrumento >90°, determinaremos o seu erro, observando por diante, e de revez hum angulo, cujo supplemento naõ exceda o mesmo arco.

VIII. Quando as faces do espelho naõ forem parallelas, calcular-se-haõ os effeitos d'esta falta segundo se costuma.

Poderia continuar a reflectir sobre estes objectos, mas temo ser longo, e muito mais cahir no defeito de pertender generalizar demaziadamente as minhas idéas.

RE-

REFLEXÕES

Sobre certas sommações successivas dos termos das Series arithmeticas, applicadas ás soluções de diversas questões algebricas.

POR

JOSÉ MARIA DANTAS PEREIRA.

Nec ulli nato post mile sæcula præcludetur occasio aliquid adhuc adjiciendi.

Seneca.

Lida em 8 de Jan. de 1794.

NA folução de varios Problemas da analyfe indeterminada, fomos muitas vezes conduzidos a expreſsões da forma $ax^{m}+bx^{m-1}+cx^{m-2}+$ &c. da qual fe requerem as differentes foluções em numeros, ou fimplesmente inteiros, ou inteiros e pofitivos, na hypothefe de fer tambem x hum numero inteiro e pofitivo: he clariffimo o grande incommodo, que deve caufar a fatisfacçaõ do que fe requer, quando efta depende de calcular os numeros a que a dita fórmula fe reduz nas hypothefes fucceffivas de $x=1, =2, =3$, &c.; e que efte incommodo augmentará tanto mais quanto maior for o expoente m, e mais compofto o valor de x: por efta razaõ fempre nos dirigimos primeiro a conhecer a lei das feries formadas pelas differentes foluções pedidas, a qual, depois de conhecida, nos offerece meios de as continuar com muito menos trabalho: até agora confiftia de ordinario a maneira da dita indagaçaõ (ao menos a que me confta) em achar fuc-

ſucceſſivamente as differenças primeiras, ſegundas, terceiras, e aſſim por diante até ás differenças do gráo m das primeiras $m+1$ ſoluções da fórmula propoſta, precedendo o cuidado de determinar os valores correſpondentes de x, taes que formem huma progreſſaõ arithmetica, e iſto na certeza de que as ditas differenças da ordem m devem ſahir conſtantes; pelo que retrogradando calculariamos todas as outras ſoluções pertendidas por meio de ſimples ſommas: eſte methodo carece de ſe calcularem primeiro $m+1$ ſoluções, para ſe conhecer a ſua lei, e poder depois achar facilmente as ſoluções reſtantes, e aſſim lévanos por hum caminho indirecto ao fim que procuramos; pois he mais proprio conhecer a lei á viſta da fórmula, e com eſta ir calcular depois as meſmas $m+1$ ſoluções primeiras: tal foi o motivo que me conduzio á compoſiçaõ da preſente Memoria, onde tudo he conſequencia da ſoluçaõ do ſeguinte

Problema fundamental.

Calcular por meio de ſimples sommas de progressões arithmeticas as quantidades, a que se reduz a fórmula $ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} +$ &c. *nas hypotheses successivas de* $x = 1, = 2, = 3,$ &c.; *sendo* a, b, c, &c. *ou cifra, ou quantidades reaes; positivas, ou negativas; inteiras, ou fraccionarias.*

Soluçaõ.

Repreſente p o primeiro termo, r a razaõ, e x o numero de termos de qualquer progreſſaõ arithmetica; ſuppondo que T, e $ſ$ ſejaõ reſpectivamente os termos geral, e ſommatorio da meſma progreſſaõ ſerá $T = p + r(x-1)$, e $ſ = \frac{r(x-1)x}{2} + px = r\left(\frac{x-1}{1} + \frac{(x-2)(x-1)}{1.2}\right) + px$: ſe a cada termo $ſ$ ajuntarmos qualquer quantidade b, re-

ſultará huma nova ſerie onde teremos o termo geral . .
$T' = r\left(\frac{x-1}{1} + \frac{(x-2)(x-1)}{1.2}\right) + px + b$; e chamando $ſ'$ o termo ſommatorio deſta nova ſerie ſerá
$ſ' = r\left(\frac{x-1}{1} + \frac{(x-2)(x-1)}{1.2} + \frac{(x-2)(x-1)x}{1.2.3}\right) + p\left(\frac{x}{1} + \frac{(x-1)x}{1.2}\right)$
$+ bx$: conſiderando agora $ſ' + i$ como termo geral de outra ſerie, e $ſ''$ como ſeu termo ſommatorio, ſerá

$$ſ'' = r\left(\frac{x-1}{1} + \frac{(x-2)(x-1)}{1.2} + \frac{(x-2)(x-1)x}{1.2.3} + \frac{(x-2)(x-1)x(x+1)}{1.2.3.4}\right)$$

$$+ p\left(\frac{x}{1} + \frac{(x-1)x}{1.2} + \frac{(x-1)x(x+1)}{1.2.3}\right) + b\left(\frac{x}{1} + \frac{(x-1)x}{1.2}\right) + ix \text{ , e}$$

aſſim por diante; donde ſe conclue, que ſe, ſommados os termos de huma progreſſaõ arithmetica dos quaes o primeiro for p e a razaõ r, augmentarmos a cada termo da ſomma a quantidade b; e feita huma nova ſomma, ſe ajunta a cada termo della a quantidade i; e ſommando depois outra vez, ſe augmenta a cada termo deſta outra ſomma a quantidade k, e aſſim por diante até completar hum certo numero $m-1$ de ſommas, cada termo da ſerie reſultante ſerá repreſentado em geral pela fórmula ſeguinte, (A), $r\left(\frac{x-1}{1} + \frac{(x-2)(x-1)}{1.2} + \frac{(x-2)(x-1)x}{1.2.3} + \right.$

$$\left.\frac{(x-2)(x-1)x(x+1)}{1.2.3.4} + \ldots \frac{(x-2)(x-1)x(x+1)\ldots(x+m-3)}{1.2.3.4\ \ldots\ m}\right) +$$

$$p\left(\frac{x}{1} + \frac{(x-1)x}{1.2} + \frac{(x-1)x(x+1)}{1.2.3} + \ldots \frac{(x-1)x\ldots(x+m-3)}{1.2.\ldots m-1}\right) +$$

$$b\left(\frac{x}{1} + \frac{(x-1)x}{1.2} + \frac{(x-1)x(x+1)}{1.2.3} + \ldots \frac{(x-1)x\ldots(x+m-4)}{1.2.\ldots m-2}\right) +$$

$$i\left(\frac{x}{1} + \frac{(x-1)x}{1.2} + \frac{(x-1)x(x+1)}{1.2.3} + \ldots \frac{(x-1)x\ldots(x+m-5)}{1.2.\ldots m-3}\right) +$$

$$k\left(\frac{x}{1} + \frac{(x-1)x}{1.2} + \frac{(x-1)x(x+1)}{1.2.3} + \ldots \frac{(x-1)x\ldots(x+m-6)}{1.2.\ldots m-4}\right) +$$

&c.

He

He evidente que esta fórmula desenvolvida, e ordenada a respeito de x dará sempre huma equaçaõ do gráo m, onde os coefficientes de x seraõ funcções das indeterminadas r, p, h, i &c., e que destas indeterminadas conterá a equaçaõ desenvolvida tantas, quantas forem as unidades de m, as quaes por consequencia seraõ sempre determinaveis pela igualaçaõ successiva dos coefficientes de huma mesma potencia de x nas duas fórmulas a proposta, e a desenvolvida; logo segue-se, que a expressaõ $ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} +$ &c. $+ nx$ he sempre resoluvel pela dita addicçaõ successiva das series arithmeticas; que para assim a resolver saõ precisas $m - 1$ de sommas; e que para determinar logo a primeira progressaõ arithmetica, a que chamaremos *base*, e as outras quantidades h, i, k, &c. que successivamente se devem hir ajuntando, deveremos desenvolver da fórmula superior a parte que fôr correspondente, conforme as unidades de que m constar, igualando depois entre si os coefficientes de huma mesma potencia da variavel, o que dará tantas equações como indeterminadas, das quaes será sempre facillimo tirar o valor destas indeterminadas. Q. E. D. et F.

Para maior clareza ajuntarei o seguinte

Exemplo.

Supponhamos que se pedem todas as soluções da fórmula $x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - x$ nas hypotheses successivas de ser $x = 1, = 2, = 3$ &c.

A parte da expressaõ geral sommatoria, que neste caso deverá desenvolver-se, he $r\Big(x - 1 + \frac{1}{2}(x-2)(x-1) + \frac{1}{6}(x-2)(x-1)x + \frac{1}{24}(x-2)(x-1)x(x+1) + \frac{1}{120}(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)\Big) + p\Big(x + \frac{1}{2}(x-1)x +$

$$\frac{1}{6}(x-1)x(x+1)+\frac{1}{24}(x-1)x(x+1)(x+2)\Big)+$$

$$h\left(x+\frac{1}{2}(x-1)x+\frac{1}{6}(x-1)x(x+1)\right)+i\left(x+\frac{1}{2}(x-1)x\right)+kx;$$

a qual reduzida, e ordenada a reſpeito de x, dá a ſeguinte expreſſaõ

$$x.^5\frac{r}{120}+x^4\left(\frac{5r}{120}+\frac{p}{24}\right)+x^3\left(\frac{5r}{120}+\frac{6p}{24}+\frac{h}{6}\right)+x^2\left(\frac{-5r}{120}+\frac{11p}{24}+\right.$$

$$\left.\frac{3h}{6}+\frac{i}{2}\right)+x\left(\frac{-6r}{120}+\frac{6p}{24}+\frac{2h}{6}+\frac{i}{2}+k\right);$$

igualando termo a termo com a fórmula propoſta temos,

$r=120$; $p=-144$; $h=180$; $i=-36$; $k=-1$;

com eſtes dados paſſaremos a formar as ſeries ſeguintes, e a ultima dellas moſtrará o que ſe quer

-144,	-24,	96,	216,	336,	&c.
-144,	-168,	-72,	144,	480,	&c., primeira ſomma
36,	12,	108,	324,	660,	&c.
36,	48,	156,	480,	1140,	&c., ſegunda ſomma
0,	12,	120,	444,	1104,	&c.
0,	12,	132,	576,	1680,	&c., terceira ſomma
-1,	11,	131,	575,	1679,	&c.
-1,	10,	141,	716,	2395,	&c., quarta ſomma,

que reſolve a queſtaõ: com effeito ſe, ex. gr., ſuppomos $x=4$, vêſe que a fórmula ſe reduz a $1024-256-64+16-4=716=$ ao quarto termo da ultima ſerie.

Nota.

Se a fórmula dada foſſe $ax^m+bx^{m-1}+\ldots H$, achada como aſſima a ſerie, que reſolveſſe $ax^m+bx^{m-1}+\ldots nx$, ajuntando a cada hum dos ſeus termos a quantidade H, teriamos a ſerie competente á fórmula propoſta.

Por exemplo, ſe em lugar da expreſſaõ que fica men-

mencionada se desse esta $x^5-x^4-x^3+x^2-x+8$, augmentando 8 a cada termo da ultima serie superior, teriamos esta

$$7, 18, 149, 724, 2403, \&c.$$

que satisfaz a questaõ.

Está pois resolvido plenamente o problema proposto; por tanto vamos tratar de algumas das suas applicações.

O que fica dito antes da soluçaõ precedente assás manifesta o grande uso della na analyse indeterminada, para conhecer as leis das series, que resolvem muitos dos seus problemas, e por isso he inutil a demora, que podia fazer sobre este assumpto; porém algumas vezes faz-se preciso usar antes de certas preparações a fim de evitar quebrados, as quaes saõ semelhantes ás de que necessita o problema immediato, que por esta causa resolveremos.

Exposiçaõ.

Achar tres numeros inteiros taes, que, se do triplo do quadrado do primeiro se tirar o segundo, o resto seja igual a oito vezes o terceiro; e que, se do cubo do primeiro se tirar o seu dobro, o resto seja igual ao segundo.

Soluçaõ.

Faça-se o primeiro $=x$, o segundo $=y$, o terceiro $=z$, e teremos $3x^2-y=8z$, $x^3-2x=y$, donde se tira $z=\frac{x(-x^2+3x+2)}{8}$: ora x, y, z devem ser inteiros, mas sendo x inteiro, y tambem o he, pois que temos $y=x^3-2x$; logo resta vêr quaes numeros inteiros pode ser x, para que z, ou $\frac{x(-x^2+3x+2)}{8}$, seja numero inteiro: ora x, relativamente ao divisor 8, ha-de ser hum numero comprehendido em alguma das fórmas seguintes,

$8n$; $8n+1$; $8n+2$; $8n+3$; $8n+4$; $8n+5$; $8n+6$; $8n+7$;

fendo x da fórma $8n$, z ferá evidentemente hum numero inteiro, pois que entaõ he $z = n(24n - 64n^2 + 2)$; fe x for da fórma $8n+1$, ferá $z = \frac{(8n+1)(-64n^2+8n+4)}{8}$, e logo naõ ferá inteiro; mas fe x fôr da fórma $8n+2$, z ferá igual a $(4n+1)(-16n^2-2n+1)$, e por confequencia inteiro: difcorrendo por diante da mefma maneira veriamos, que, para z fer numero inteiro, he neceffario que x feja hum numero inteiro pertencente a alguma das fórmas, $8n$, $8n+2$, $8n+4$, $8n+5$, $8n+6$; exprefsões que, fubftituidas por x no valôr de z, daõ 1.° $z = 24n^2 - 64n^3 + 2n$, 2.° $z = -64n^3 - 24n^2 + 2n + 1$, 3.° $z = -64n^3 - 72n^2 - 22n - 1$, 4.° $z = -64n^3 - 96n^2 - 43n - 5$, 5.° $z = -64n^3 - 120n^2 - 70n - 12$: cada hum deftes ultimos valores de z ferá o que fe deva calcular pelo noffo methodo, fuppondo fucceffivamente

$n = 0, = 1, = 2, = 3, = \&c.$, o que dará

nos primeiros $x = 0, = 8, = 16, = 24, = \&c.$
nos fegundos $x = 2, = 10, = 18, = 26, = \&c.$
nos terceiros $x = 4, = 12, = 20, = 28, = \&c.$
nos quartos $x = 5, = 13, = 21, = 29, = \&c.$, e ultimamente
nos quintos $x = 6, = 14, = 22, = 30, = \&c.$

calculados x e z, y fica facil.

Notas.

1.ª Se, além de fer z igual á expreffaõ fraccionaria $\frac{1}{8}(3x^2 - x^3 + 2x)$, tambem y foffe igual a outra expreffaõ fraccionaria, fariamos primeiro que o valor de y contiveffe fómente x de incognito, depois indagariamos, que fórmas devia ter x relativamente ao divifor do valor de y, da mefma forte que operamos para z; em fim as fórmas que fe achaffem para y multiplicadas duas a duas com as que tiveffemos determinado para z, dariaõ as novas fórmas, que x devia ter, para fatisfazer ambas as condi-

çóes

çóes ao mesmo tempo, tendo o cuidado de fazer entrar neste numero as fórmas primeiras, que se achassem communas aos dous valores: assim teriamos as expressões, que deveriaõ ser substituidas nos valores de x, e z, para depois os calcular pelo nosso methodo.

2.ª A nota precedente faz ao mesmo tempo conhecer o que se deve praticar quando as expressões fraccionarias forem mais de duas, por isso naõ continuaremos com estes casos.

3.ª Se no enunciado do problema dissessem que z, y, e x deviaõ ser inteiros, e positivos; entaõ, sobre as reflexões já feitas, deveriamos ver tambem, que fosse $x^2 < 3x + 2$, e $x^3 > 2x$, o que dá $x < 3,6$; e $x > 1,4$; ora estas condições combinadas com ser x de alguma das fórmas $8n$, $8n + 2$, &c., fazem ver, que o problema tem huma soluçaõ só em numeros inteiros, e positivos, que vem a ser $x = 2$, $y = 4$, $z = 1$.

4.ª Todas as preparações, e considerações feitas na soluçaõ do problema, e nas precedentes notas, saõ precisas a fim de naõ calcular hum só numero, que deixe de servir, pois aliás pode-se hir directamente achar todas as soluções da fórmula $\frac{-x^3+3x^2+2x}{8}$ assim como se fez para ter as de $x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - x$; para cujo fim desenvolvendo a parte competente da expressaõ geral sommatoria, e continuando as mais operações, achariamos $r = -\frac{6}{8}$; $p = \frac{6}{8}$; $b = -\frac{2}{8}$; com o que se formariaõ as seguintes series:

$$\div + \frac{6}{8},\ 0 \cdot -\frac{6}{8} : -\frac{12}{8} \cdot -\frac{18}{8} \cdot \&c.$$

$$\frac{6}{8},\ \frac{6}{8},\ 0,\ -\frac{12}{8},\ -\frac{30}{8},\ \&c.$$

$$\frac{4}{8},\ \frac{4}{8},\ -\frac{2}{8},\ -\frac{14}{8},\ -\frac{32}{8},\ \&c.$$

$$\frac{4}{8},\ 1,\ \frac{6}{8},\ -1,\ -5,\ \&c.$$

2

a ultima claramente moſtra, que ſó quando $x = 2$, ſahe $z = 1$, numero inteiro e poſitivo: ſe ſe continuaſſe moſtraria tambem, que z era inteiro, quando x foſſe hum dos numeros, 8, 16, 24 &c., 2, 10, 18 &c., 4, 12, 20 &c., 5, 13, 21 &c., 6, 14, 22 &c., que ſaõ juſtamente os numeros das fórmas aſſima expoſtas.

5.ª Naõ devo ommittir a ſeguinte vantagem do preſente methodo, vem a ſer poder-ſe calcular com facilidade huma ſoluçaõ independentemente das outras todas, e poder-ſe depois achar eſtas outras, já retrogradando, já continuando a reſpeito della. Supponhamos que ſe tenha reſolvido hum problema indeterminado, o qual nos conduza á ſeguinte equaçaõ $y = x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - x$, e que pertendamos partir da terceira ſoluçaõ; tendo achado como aſſima os valores de r, p, h, i &c., ſubſtituindo-os na parte deſenvolvida da expreſſaõ geral ſommatoria, teremos que eſta ſe reduzirá a

$$120\left(x-1+\frac{1}{2}(x-2)(x-1)+\frac{1}{6}(x-2)(x-1)x+\right.$$
$$\left.\frac{1}{24}(x-2)(x-1)x(x+1)+\frac{1}{120}(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)\right)-$$
$$144\left(x+\frac{1}{2}(x-1)x+\frac{1}{6}(x-1)x(x+1)+\frac{1}{24}(x-1)(x)(x+1)(x+2)\right)+$$
$$180\left(x+\frac{1}{2}(x-1)x+\frac{1}{6}(x-1)x(x+1)\right)-36\left(x+\frac{1}{2}(x-1)x\right)-x;$$

onde fazendo $x = 3$; virá

$120 \times 6 - 144 \times 15 + 180 \times 10 - 36 \times 6 - 3 = 141$ ſoluçaõ procurada.

Querendo agora por meio deſta achar todas as outras, hiriamos calcular os terceiros termos ſucceſſivos da baſe, e das outras ſeries; para o que notariamos, que a fórmula precedente em conſequencia da ſubſtituiçaõ reduz-ſe a

$$120(2+1+1+1+1)-144(3+3+4+5)+180(3+3+4)-36(3+3)$$
$$-1.3$$

e

e logo teremos

$120 . 2 - 144 = 96 =$ ao terceiro termo da baſe.

$120(2+1)-144.3=96+120-144.2=-72=$ 3.° termo da 2.ª ſerie.

$120(2+1)-144.3+180=-72+180=108=$ 3.° termo da 3.ª ſerie.

$120(2+1+1)-144(3+3)+180.3=108+120-3.144+2.180=156$ $=$ 3.° termo da 4.ª ſerie.

$120(2+1+1)-144(3+3)+180.3-36=156-36=120=$ 3.° termo da 5.ª ſerie.

$120(2+1+1+1)-144(3+3+4)+180(3+3)-36.3=132=$ 3.° termo da 6.ª ſerie.

$120(2+1+1+1)-144(3+3+4)+180(3+3)-36.3-1=131=$ 3.° termo da 7.ª ſerie.

ordenados agora eſtes terceiros termos verticalmente, viſto ſerem já conhecidas as quantidades r, p, h, i, k, e conhecer-ſe tambem o como ſe deve uſar dellas, fica facil continuar em qualquer ſentido a baſe, e cada huma das outras ſeries até á ultima. Q. E. F.

A razaõ do modo empregado em achar os terceiros termos todos ficará evidente, a-penas ſe pondére, que a expreſſaõ geral ſommatoria, logo que $r, p,$, &c. ſaõ determinados, deve repreſentar as differentes ſommas da progreſſaõ arithmetica, a quem r, e p competem, com as mais onde entraõ as quantidades h, i, &c., pela ſimples ſuppoſiçaõ de $m=2, =3, =4, =5$, &c.

Paſſemos agora a moſtrar como a ſoluçaõ do problema fundamental pode ſer applicada á reſoluçaõ das equaçóes numericas de todos os gráos.

As raizes das equaçóes numericas podem-ſe dividir em reaes, e imaginarias; as primeiras ſubdividem-ſe em racionaes, e irracionaes, poſitivas, ou negativas; e ultimamente, as raizes racionaes podem ſer ou numeros inteiros, ou fraccionarios: ora reſolver huma equaçaõ tal como por exemplo $ax^m+bx^{m-1}+\ldots h=0$, he achar para x valores que façaõ $ax^m+bx^{m-1}+\ldots\ldots=-h$; pelo noſſo me-

thodo podem calcular-ſe com facilidade os valores de $ax^m + bx^{m-1} +$ &c. , quando ſe ſuppoem x ſucceſſivamente $= 1, 2, 3$, &c. , logo

1.° Se as raizes da equaçaõ propoſta forem numeros inteiros, e poſitivos, na ſerie dos ditos valores deve forçoſamente achar-ſe $-h$, m de vezes.

2.° Se as meſmas raizes fôrem numeros poſitivos, e fraccionarios, deverá apparecer naõ $-h$, mas ſim numeros entre os quaes $-h$ ſe contenha, e entaõ ficará conhecida a parte inteira da raiz; em quanto á fracçaõ, que a deve acompanhar, abaixo diremos hum modo de a calcular, o qual ſervirá tambem para a approximaçaõ das raizes irracionaes.

3.° Sendo porém as raizes da equaçaõ propoſta, numeros negativos, inteiros, ou fraccionarios, racionaes, ou irracionaes, a ſerie mencionada nem conterá $-h$, nem moſtrará limites que o contenhaõ; convertidas porém na meſma equaçaõ as raizes poſitivas em negativas, e reciprocamente, teremos entaõ huma nova equaçaõ, cujas raizes ſeraõ numeros poſitivos, que determinaremos pelo modo aſſima dito.

4.° Se as raizes fôrem reaes, mas humas negativas, e outras poſitivas, calcularemos eſtas primeiro, e mudando depois os ſignaes ás potencias impares de x, paſſaremos a calcular as raizes poſitivas da nova equaçaõ, que ſeraõ as negativas da primeira.

5.° Quando a equaçaõ propoſta contiver raizes iguaes, inteiras, ou fraccionarias, he claro que nas ſeries ſim ſe achará $-h$, ou limites, que o contenhaõ, mas naõ tantas vezes quantas ſaõ as unidades de m; por quanto, ſuppondo c huma das raizes iguaes, as ſeries deveráõ moſtrar, que $ax^m + bx^{m-1} +$&c. ſe reduz a $-h$ quando $x = c$, mas de nenhuma ſorte podem fazer conhecer quantos factores $x - c$ ſe involvem na dita equaçaõ, de maneira que, ſuppondo haver n de raizes c, as ſeries ſó moſtraráõ $m - n + 1$ de raizes; e ſe a equaçaõ contiveſſe n de raizes

zes c, q de raizes d, r de raizes e, &c., as ſeries ſó nos fariaõ conhecer $m - n - q - r + 3$, &c. de raizes, o que he evidente; eſta falta tem o prompto remedio de ſe dividir a equaçaõ propoſta pelos factores correſpondentes ás raizes achadas, pois aſſim obteremos huma equaçaõ de menor gráo, que reſolvida como a precedente, nos dará o meſmo numero, e grandeza de raizes, ſe eſtas eraõ iguaes duas a duas; ou menos ſe entre ellas houverem algumas iguaes tres a tres, quatro a quatro, &c.: no primeiro caſo teremos achado todas as raizes pedidas, no ſegundo dividiremos a nova equaçaõ pelos factores ſimples, que ella nos der, e teremos outra, que tambem reſolveremos, continuando aſſim até achar as m raizes.

6.° Quando, formadas as ſeries para as raizes poſitivas, e negativas, naõ encontrarmos $-b$, nem limites que o comprehendaõ; ou quando o naõ encontrarmos tantas vezes quantas forem as unidades de m, e dividindo depois a equaçaõ propoſta pelos factores correſpondentes ás raizes achadas, a nova equaçaõ for tal que o ſeu ultimo termo, ou naõ ſe contenha nas ſeries que ſe fizerem para a reſolver, ou ſe contenha menos vezes do que ſaõ nella as unidades do maior expoente da incognita; e aſſim ſucceſſivamente, de maneira que por fim cheguemos a huma equaçaõ, cujo ultimo termo naõ entre nas ſeries; he manifeſto que ſe deve concluir, no primeiro caſo, que todas as raizes da equaçaõ propoſta ſaõ imaginarias; e no ſegundo, que ſaõ imaginarias as que reſtaõ a conhecer; porque viſto naõ entrarem nas ſeries naõ podem ſer numero algum, racional, ou irracional, poſitivo, ou negativo, e por conſequencia naõ podem ſer numero algum real.

Notas.

1.ª He neceſſario advertir, que de tres modos póde $-b$ ter limites que o comprehendaõ; ou ſendo hum dos termos das ſeries menor que $-b$, e o ſeu immediato maior

maior; ou ſendo ambos menores, ou maiores que $-b$; da meſma ſorte que ab póde exiſtir entre mn, e pq, ou ſendo $ab > mn$, e $< pq$, ou ſendo $a'b' > m'n'$, e $> p'q'$, ou ſendo $a''b'' < m''n''$, e $< p''q''$; por iſſo deve haver cuidado em decidir ſe $-b$ tem ou naõ limites que o comprehendaõ, e por tanto vamos a notar o como ſe deve proceder em ſemelhantes caſos: conhecer que $-b$ tem limites, quando he como $ab > mn$, e $< pq$ he couſa clariſſima; $-b$ terá lemites, ſendo maior que os termos da ſerie, quando fôr como $a'b' > m'n'$, e $> p'q'$, iſto he, quando a ſerie decreſcer de cada hum dos termos immediatamente menores do que $-b$ para os lados; em fim $-b$ terá limites ſendo menor do que dois termos conſecutivos da ſerie, quando deſtes para os lados a ſerie fôr augmentando.

2.ª A nota 5.ª do exemplo precedente faz obſervar, que eſte methodo tem a grande vantagem de principiar a ſerie dos valores no termo que ſe quizer, e por eſte motivo pode poupar muito trabalho principiando o calculo em hum termo, que pouco mais ou menos repreſente x na equaçaõ propoſta: para iſto poderemos ſervir-nos com toda a vantagem, ou das idéas relativas aos termos dominantes das equações, expoſtas por M. de Lagny nas Memorias de Pariz para o anno de 1706; ou das de M. de la Grange eſcritas nas Memorias de Berlin para o anno de 1767: onde, e nas de 1768, ſe acharáõ tambem couzas aſſás intereſſantes ſobre a reſoluçaõ geral das equações numericas de todos os gráos.

3.ª No uſo do methodo ſe conhecerá tambem ſer elle tal, que a meſma formaçaõ da ultima ſerie vai moſtrando ſe ha, ou naõ mais que eſperar della, circunſtancia que tambem poupa o trabalho inutil, a que muitas vezes obrigaõ aquelles methodos, que de longe naõ moſtraõ os limites onde ſe deve parar.

4.ª Note-ſe mais que a ſubſtituiçaõ Newtoniana de introduzir por x os numeros 1, 2, 3, &c. $-1, -2, -3$, &c. até

até ſe alcançar hum reſultado poſitivo, e outro negativo, tem o defeito notado por M. Bezout, de naõ ſatisfazer quando as raizes da equaçaõ ſaõ iguaes, defeito que ſe naõ encontra em o preſente; pois que as raizes da equaçaõ, ou devem ſer imaginarias, ou infallivelmente ſaõ dadas por elle; de ſorte que, naõ achar por eſte methodo algumas raizes, he ſignal certiſſimo de ellas ſerem imaginarias, e que por conſequencia deve a equaçaõ, que as contém, ſer decompoſta do modo competente.

5.ª Só póde objectar-ſe ao meu methodo trabalho inutil, quando as raizes fôrem todas imaginarias; mas he elle tal, que neſte caſo formadas as ſeries, logo desde os primeiros termos ſe conhece ſerem as raizes imaginarias, como deve ſer, e como ſe pode vêr reſolvendo, por exemplo, a equaçaõ $x^4 + 6x^3 + 26x^2 + 46x + 65 = 0$, cujas raizes ſaõ todas imaginarias; para o que deve primeiro notar-ſe, que, viſta a diſpoſiçaõ dos ſignaes, ſe as raizes foſſem reaes, naõ podiaõ ſer ſenaõ negativas.

Reſta agora dar o modo de calcular as raizes fraccionarias, e approximar as irracionaes; o que vou executar na ſoluçaõ do ſeguinte problema, que ſervirá de exemplo aos mais do meſmo genero.

Problema.

Achar as raizes da equaçaõ $x^3 - x^2 - 41x - 100 = 0$.

Soluçaõ.

A equaçaõ propoſta deve conter duas raizes poſitivas, e huma negativa; para determinar as primeiras formaremos as ſeguintes ſeries:

$\div - 2. \quad 4. \quad 10. \quad 16. \quad 22. \quad 28$, &c.
$-2, \quad 2, \quad 12, \quad 28, \quad 50, \quad 78$, &c.
$-41, -37, -27, -11, +11, +39$, &c.
$-41, -78, -105, -116, -105, -66$, &c.

a ultima bem patenteia, que as duas raizes positivas saõ fraccionarias, e que devem estar, a primeira entre 2, e 3, e a segunda entre 5, e 6; porque -100 cahe entre -78, e -105, e entre -105, e -66: tratêmos pois de hir approximar a raiz menor, e para isto supporemos que ella seja

$2+0,1.y$, ou $2+0,01.y$, ou $2+0,001.y$ &c.

conforme a quizermos approximadã até ás décimas, centessimas, millessimas, &c.; por agora faça-se $x=2+0,1.y$, este valor de x substituido na equaçaõ proposta a transformará nesta $y^3+50y^2-3300y+22000=0$, onde indagaremos o valor de y, assim como em a proposta se examinou o de x, o que nos dará $y>7, <8$, e logo a raiz até ás décimas será 2, 7. Querendo-a agora até ás centessimas, ou transformariamos a equaçaõ precedente nesta $y^3+500y^2-330000y+22000000=0$, a qual resolvida satisfaria a nossa pertençaõ, advertindo, que para evitar trabalho deveriamos calcular do termo 70 por diante, visto sabermos já que as décimas saõ 7; ou fariamos $y=7+0,1.z$, valor que substituido por y daria

$$z^3+710z^2-245300z+1693000=0,$$

equaçaõ onde facilmente determinariamos as centessimas da raiz: e continuando assim chegariamos em fim ao pertendido gráo de approximaçaõ. Q. E. F.

Notas.

1.ª He manifesto, que desta maneira approximariamos a raiz até onde quizessemos, se ella fosse irracional, mas que a ser racional achariamos huma dizima, ou finita, ou periodica, que seria sempre facil converter em quebrado.

2.ª

2.ª A equaçaõ em y deve ter tres raizes, cada huma das quaes junta a 2 formará huma das raizes da proposta; e logo conhecidas aquellas, estaraõ conhecidas estas.

3.ª Quando muitas raizes fôrem iguaes em quanto, ás unidades; ás unidades, e décimas; ás unidades, décimas, e centessimas; &c. o seu primeiro aspecto (por assim dizer) será ou de imaginarias, ou de absolutamente iguaes; porém á medida que formos resolvendo as equações em y, em z, &c. iremos formando o verdadeiro conceito das raizes, e determinando o seu exacto valor.

4.ª Este methodo de approximar he certo, e naõ obstante parecer algum tanto longo, com tùdo naõ o he quanto parece: todavia sempre satisfaz ao seu fim, que he mostrar o uso, que pode ter a soluçaõ do Problema fundamental na approximaçaõ das raizes das equações: dos methodos, que para isto mesmo tenho visto até agora, o mais breve foi exposto em 1774 á Real Academia das Sciencias de Pariz pelo Marquez de *Courtivron*, em huma elegante Memoria, no fim da qual mostra a identidade da sua ultima formula com a de *Euler*, que nesse tempo appareceu sem a respectiva demonstraçaõ; por isto, em quanto diz respeito ao presente assumpto, reporto-me absolutamente á dita Memoria, posto que ella necessite de algumas observações, as quaes deixo agora de fazer por naõ ser muito extenso.

Igual motivo me determina a omittir a applicaçaõ do meu methodo, aliás evidente, ás sommações successivas dos termos, e potencias dos termos das progressões arithmeticas; assim como tambem á determinaçaõ immediata das ballas contidas em pilhas de qualquer figura, contentando-nos com dar fim a esta Memoria mostrando, como o mesmo methodo nos conduz a determinar os coefficientes do binomio Newtoniano.

I

1	1	1	1	1	1	1	1	&c.
1	2	3	4	5	6	7	8	&c.
1	3	6	10	15	21	28	36	&c.
1	4	10	20	35	56	84	120	&c.
1	5	15	35	70	126	210	360	&c.
1	6	21	56	126	252	462	822	&c.
1	7	28	84	210	462	924	1746	&c.

Se, ordenando a ſerie de unidades repreſentada pela figura ſuperior, formos ſommando eſtas ſucceſſivamente comſigo meſmas, e achando por conſequencia os diverſos numeros naturaes, e figurados; e ſe depois conſiderarmos os numeros, que ficaõ diſtribuidos diagonalmente, a ſaber,

1.º 1, 1
2.º 1, 2, 1
3.º 1, 3, 3, 1
4.º 1, 4, 6, 4, 1
5.º 1, 5, 10, 10, 5, 1
&c.

conheceremos facilmente, que elles repreſentaõ os coefficientes das potencias ſucceſſivas de qualquer binomio ſimples; vê-ſe pois, que as expreſsões geraes dos meſmos coefficientes podem ſer achadas como corollarios do noſſo Problema fundamental, baſtando para iſto fazer as reflexões ſeguintes:

1.ª Que a baſe tem o primeiro termo igual a 1, e a razaõ igual a 0.

2.ª Que as quantidades h, i, &c. ſaõ tambem iguaes a cifra.

3.ª

3.ª Que ſendo μ o expoente da potencia á qual o binomio propoſto deva ſer elevado, o primeiro coefficiente he ſempre o primeiro termo da ſomma μ, ou o termo $\mu+1$ da primeira ſerie, ou da baſe, o qual vem a ſer 1.

4.ª Que o ſegundo coefficiente, he o ſegundo termo da ſomma $\mu-1$, ou o termo μ da ſerie ſegunda, que forma a primeira ſomma da baſe.

5.ª Que o terceiro coefficiente, he o terceiro termo da ſomma $\mu-2$, ou o termo $\mu-1$ da ſerie terceira, ſomma ſegunda da baſe.

6.ª Que o quarto coefficiente, he ſempre o quarto termo da ſomma $\mu-3$, ou o termo $\mu-2$ da ſerie quarta, ſomma terceira da baſe; e aſſim por diante: donde ſe conclue, que em geral o σ coefficiente he igual ao termo $\mu-\sigma+2$ da ſomma $\sigma-1$ da baſe dita.

Das precedentes obſervações reſulta

1.º Que da ſerie achada na ſoluçaõ do Problema fundamental, a parte que deve ſatisfazer eſtas queſtões, he,

$$x+\frac{1}{2}(x-1)x+\ldots\ldots\frac{(x-1)x\ldots\ldots(x+m-3)}{2\ldots\ldots m-1}$$

2.º Que neſta parte deve fazer-ſe $m=\sigma$, e $x=\mu-\sigma+2$, o que a faz transformar em a ſeguinte $\mu-\sigma+2+\frac{1}{2}(\mu-\sigma+1)(\mu-\sigma+2)+\frac{1}{6}(\mu-\sigma+1)(\mu-\sigma+2)(\mu-\sigma+3)+\ldots$

$$\frac{(\mu-\sigma+1)(\mu-\sigma+2)\ldots\ldots(\mu-1)}{1\,.\,2\quad\ldots\ldots(\sigma-1)}.$$

Agora baſtará fazer ſucceſſivamente $\sigma=2, 3, 4,$ &c. para obter as expreſsões geraes pertendidas, como ſe vê nos ſeguintes exemplos:

$$\sigma=2.$$

2.º Coefficiente $=\mu-2+2=\mu$

$$\sigma = 3.$$

3.° Coef. $= \mu - 1 + \frac{1}{2}(\mu - 2)(\mu - 1) = \mu . \frac{\mu - 1}{2}$

$$\sigma = 4.$$

4.° Coef. $= \mu - 2 + \frac{1}{2}(\mu - 3)(\mu - 2) + \frac{1}{6}(\mu - 3)(\mu - 2)(\mu - 1)$

$$= \mu . \frac{\mu - 1}{2} . \frac{\mu - 2}{3}.$$

&c.

Q. E. F. et D.

DES-

DESCRIPÇÃO

De hum Monſtro de eſpecie Humana, exiſtente na Cidade de S. Paulo na America Meridional.

POR BENTO SANCHES DORTA.

TOdos os dias admiramos a Natureza pela variedade das ſuas producções; e muitas vezes não he menos attendivel aos noſſos olhos, quando ella ſe aparta das ſuas mais conſtantes leis, e parece commetter alguns erros. O eſpirito do homem he baſtantemente agitado quando pertende deſcubrir o myſterio das ſuas operações. Feliz aquelle, a quem a meſma Natureza franquêa o ſeu ſanctuario, e deixa ver as cauſas finaes de ſeus trabalhos.

A geração dos Monſtros na eſpecie Humana não he Fenomeno totalmente raro; pois lêmos nas Collecções de Memorias das mais célebres Academias da Europa noticias d'eſta claſſe, que de tempos a tempos apparecem. Seguindo eu eſte exemplo, he que me animo a pôr na preſença da Academia a Deſcripção do Monſtro, que actualmente exiſte neſta Cidade. Eu me liſongêo, que nella ſe achará alguma couſa de raro, e extraordinario, que em outra parte ſe não encontra.

Tem-ſe tomado por ſyſtema até agora dividir os Monſtros, que pertencem á eſpecie Humana, em tres claſſes. Primeira claſſe: *Monſtros por exceſſo, ou augmento de membros.* Segunda claſſe: *Monſtros por falta, ou diminuiçaõ de membros.* Terceira claſſe: *Monſtros por mudança de membros.* Da ſegunda claſſe he o Monſtro, de que vou tratar.

Neſta Cidade exiſte huma rapariga de idade de quatorze annos, pouco mais, ou menos, chamada Anna Maria, que naſceo ſem nenhum dos braços, nem ſinal, ou creſcença donde pareceſſe quererem ſahir, e ſó tem em ſi-

ma

ma do hombro direito huma pequena prominencia, tendo de ambos os lados bem colocados, e conformes os ossos da espadua, ou a que chamamos escapula: o mais corpo he bem proporcionado, exceptuando a perna, e pé direito; pois a perna, começando do tronco, está torcida para a parte de fóra, e algum tanto mais grossa do que a esquerda, e muito mais curta, o que faz que manqueje quando anda: no mesmo torcimento continúa até ao metatarso: o pé fica quasi todo virado para fóra, tendo o dedo pollegar com alguma deformidade, e principalmente por estar muito separado dos outros dedos, e não poder unir-se-lhe.

Esta rapariga he filha de pais incognitos, porém sabe-se, que he filha de India já domestica; pois nascendo em huma das Aldêas de Indios, que aqui temos na distancia de sinco leguas, foi achada exposta n'hum campo por huma India, que a levou a baptizar, e a creou; sendo talvez abandonada por seus pais pela verem falta de membros, praticando ainda os seus antigos, crueis, e barbaros costumes de matarem, ou abandonarem seus filhos quando nascem com defeitos em seus membros.

O que a Natureza negou a esta creatura, não lhe dando braços, lhe avantajou na intelligencia, e habilidade, para usar de pés, e dentes para supprir todas as funções, em que os braços lhe erão precisos. Com o dedo pollegar do pé direito pega na colhér, e garfo, quando come; com os dous pés pega na vasilha d'agua, quando quer beber; com o pé direito pentêa o seu cabello da cabeça; com o mesmo pé faz sua costura, e enfia a agulha, &c. Faz renda de linhas, pegando com ambos os pés nos bilros, e mudando os alfinetes com o dedo pollegar do direito: da qual renda, que eu lhe vi trabalhar, ajunto aqui a amostra (*) de sete pollegadas de comprimento, parecendo-

(*) Esta amostra existe no Archivo da Academia juntamente com hum desenho, que figura o Monstro, de que se trata, e com o Instrumento de Justificação, que comprova a verdade do facto.

do-me, que he quanto basta para se admirar. Ella muitas vezes anda a cavallo, quando vai fóra da Cidade, o que faz com bastante desembaraço, pegando na redea, e guiando o cavallo com o pé direito, tendo o esquerdo no estribo. Em fim he muito digno de admiraçaõ este individuo, e muito mais sendo filha de pais selvagens.

Juntamente com esta breve Descripçaõ remetto o Instrumento de Justificação authentica, que aqui fiz tirar perante o Juiz Ordinario d'esta Cidade, em que fiz jurar as pessoas, que obsérvão, e vivem com a dita Anna Maria, para comprovar a verdade de quanto tenho exposto.

OBSERVAÇOES ASTRONOMICAS

Feitas na Cidade de S. Paulo na America Meridional

POR BENTO SANCHES D'ORTA.

Distancias verdadeiras do centro do Sol ao Zenith, ao tempo da sua passagem pelo Meridiano; para a determinação da altura do Polo da Cidade de S. Paulo, sendo observadas as suas alturas com hum Quadrante de hum pé de raio: feito em Londres por Sisson.

Anno de 1788.	Distancias verdadeiras do centro do Sol ao Zenith.	Declinaçaõ do Sol Austral.	Altura do Pólo Austral.
Novemb. 4	7° 49′ 11″	15° 43′ 57″	23° 33′ 8″
5	7 31 1	16 2 5	23 33 6
7	6 55 31	16 37 32	23 33 3
8	6 38 29	16 54 49	23 33 18
10	6 4 30	17 28 34	23 33 4
11	5 48 10	17 44 57	23 33 7
12	5 32 3	18 1 4	23 33 7
13	5 16 4	18 16 52	23 32 56
19	3 48 31	19 44 38	23 33 9
22	3 9 19	20 23 46	23 33 5
28	2 1 31	21 31 42	23 33 2
29	1 51 19	21 41 37	23 32 56
Dezemb. 3	1 16 11	22 17 4	23 33 15
5	1 0 51	22 32 13	23 33 4
6	0 54 2	22 39 6	23 33 8
7	0 47 32	22 45 36	23 33 8
9	0 35 52	22 57 11	23 33 3
18	0 6 32	23 26 33	23 33 5
19	0 5 33	23 27 29	23 33 2

Anno de 1789.	Distancias verdadeiras do centro do Sol ao Zenith.	Declinaçaõ do Sol Austral.	Altura do Pólo Austral.
Janeiro 3	0° 48′ 17″	22° 44′ 58″	23° 33′ 15″
8	1 25 23	22 7 52	23 33 15
10	1 44 22	21 48 41	23 33 3
12	2 2 37	21 30 24	23 33 1
19	3 23 44	20 9 23	23 33 7
Fever. 10	9 29 46	14 3 16	23 33 2
13	10 29 58	13 3 7	23 33 5
14	10 50 17	12 42 48	23 33 5
17	11 53 14	11 40 0	23 33 14
18	12 14 24	11 18 44	23 33 8
19	12 35 49	10 57 18	23 33 7
20	12 57 27	10 35 40	23 33 7

Resultado 23° 33′ 6″ 17‴

Advertencia.

As Declinações do Sol foraõ tiradas do *Conhecimento dos Tempos* dos annos respectivos, e calculadas para este Meridiano, na supposição de ser a differença do Meridiano de Paris 3ʰ 16′ 16″

Obser-

Observações dos Eclipses dos Satellites de Jupiter feitas na Cidade de S. Paulo, com hum Oculo achromatico de Dollon de 17 pollegadas de fóco.

Dias das observações. Anno 1788.	Satellites.	Calculadas para Pariz, extrahidas do *Conhecimento dos tempos.* Tempo verdadeiro.	Observações na Cidade de S. Paulo. Tempo verdadeiro.	Differença. Tempo verdadeiro.	Advertencias. O Tempo foi determinado na pendula, pelas alturas correspondentes, em tres dias consecutivos; antes do dia; no dia; e depois do dia das observações, e corrigido pela equaçaõ do meio dia.
Dezembro 19	1.°	10h 8′ 36″ Im.	12h 52′ 24″	—3h 16′ 12″	O Ceo ao tempo da Observaçaõ estava bem claro, as faxas do Planeta bem terminadas: o Oculo alguma couza tremia por causa do vento, que assoprava.
Anno 1789					
Fevereiro 28	3.°	12 54 30 Im.	9 35 32	—3 18 58	Ceo claro; Jupiter bem terminado, e as faxas bem visiveis.
.... 28	1.°	13 10 48 Em.	9 54 34	—3 16 14	O mesmo.
Março .. 9	1.°	9 36 21 Em.	6 20 8	—3 16 13	Ceo claro, porém muito crepusculo.
.... 16	2.°	14 21 51 Em.	11 5 26	—3 16 25	Ceo muito claro, o Planeta bem terminado, as faxas muito patentes.
.... 22	4.°	14 0 33 Im.	10 44 23	—3 16 10	Ceo claro.
.... 23	1.°	13 30 7 Em.	10 13 42	—3 16 25	Ceo muito claro, as faxas e Jupiter bem terminados.
Abril 1	1.°	9 56 27 Em.	6 40 20	—3 16 7	Ceo ennuvoado, e vento forte, que fazia tremer o Oculo.
.... 24	1°.	10 15 48 Em.	6 59 28	—3 16 20	Ceo muito claro, o Planeta bem terminado, as faxas bem patentes.
Maio 1	1.°	12 11 49 Em.	8 55 31	—3 16 18	Ceo bem sereno, porém a Lua muito clara, e bem proxima de Jupiter: as faxas bem visiveis.
.... 17	1.°	10 31 5 Em.	7 14 56	—3 16 9	Ceo muito claro, Jupiter e as suas faxas bem terminadas.
Junho ... 9	1.°	10 41 35 Em.	7 25 28	—3 16 7	Ceo pouco claro, o Planeta mal terminado, as faxas mal se percebiaõ.

Distan-

Diſtancias de algumas Eſtrellas ao Zenith, ao tempo da paſſagem d'eſtes Aſtros pelo Meridiano, para a determinação da altura do Polo na Cidade de S. Paulo, ſendo obſervadas as ſuas alturas com o meſmo Quadrante, com que obſervei as do Sol.

Annos de 1788, e 1789.	Diſtancias verdadeiras ao Zenith.	Declinação das Eſtrellas.	Altura do Pólo Auſtral.
Rigel.	15° 5′ 51″	8° 27′ 25″ Auſt.	23° 33′ 16″
δ Orion.	23 25 15	0 8 4 A.	23 33 19
β Navio.	45 17 53	68 51 7 A.	23 33 14
θ Navio.	39 44 19	63 17 36 A.	23 33 17
α Cruzeiro.	38 22 41	61 55 51 A.	23 33 10
Aldebaran.	39 37 36	16 4 28 Bor.	23 33 8
ε Leão.	48 17 20	24 44 10 B.	23 33 10
μ Leão.	50 32 53	26 59 31 B.	23 33 22
Regulus.	36 32 46	12 59 37 B.	23 33 9
ζ Leão.	48 0 57	24 27 40 B.	23 33 17
δ Leão.	45 13 57	21 40 42 B.	23 33 15
β Leão.	39 18 26	15 45 7 B.	23 33 19

Reſultado 23° 33′ 14″ 40‴

Advertencias.

As Declinações das Eſtrellas são tiradas do *Conhecimento dos Tempos*, e corrigidas para o mez de Março, em que tomei as ſuas alturas meridianas. As Eſtrellas Rigel, δ Orion, e Aldebaran tomei as ſuas alturas meridianas em Dezembro de 1788.

Eu verifiquei novamente o erro do meu Quadrante pelo meio de duas alturas meridianas de Eſtrellas; huma com declinação boreal, e outra auſtral, e quaſi da meſma altura, as quaes fôrão θ Navio, e Aldebaran; β Navio δ Leão; e com effeito achei augmentado o erro ſubtractivo do Inſtrumento: augmento que me parece proceder de ſer desarmado de todo para ſe limpar nas veſperas da minha ſahida do Rio de Janeiro.

Como as alturas meridianas do Sol fôrão tomadas antes da verificação do Quadrante, fôrão novamente corrigidas d'eſte augmento.

Não verifiquei o Quadrante antes das alturas do Sol, por não haver noite clara, que me deixaſſe tomar alturas de Eſtrellas com exactidão, pois ſempre fôrão naquelle tempo cubertas de todo, ou por intervallos.

Ecli-

Eclipse da Lua de 28 de Abril 1790. observado com hum Oculo Achromatico de Dollond de 17 pollegadas de foco.

Immersóes.	Tempo Verdadeiro. Hor.	Min.	Seg.	Emmersóes.	Tempo Verdadeiro. Hor.	Min.	Seg.
Principio do Eclipse . .	7	3	46	Principio da Emmersaõ da Lua	9	38	2
Grimaldus		7	24	Grimaldus		40	23
Ariſtarcus		9	47	Ariſtarcus		46	27
Keplerus		11	20	Keplerus		49	51
Mare Humorum começa.		16	16	Mare Humorum		51	31
Copernicus		20	20	Bullialdus		55	27
Mare Humorum acaba .		21	6	Copernicus		56	21
Mare Nubium principia.		22	42	Tycho	10	0	47
Plato		25	33	Plato		1	52
Mare Nubium finda . .		30	50	Mare Nubium. Duvidoſa.		3	25
Bullialdus		31	12	Mare Serenitatis começa. Duvidoſa		12	27
Mare Serenitatis principia.		31	32	Mare Serenitatis finda .		20	49
Tycho principia		34	9	Mare Tranquilitatis . . .		23	54
Tycho finda		35	27	Proclus		29	14
Mare Serenitatis finda .		40	1	Mare Criſium começa .		29	52
Proclus		49	20	Mare Criſium finda . . .		32	4
Mare Criſium principia .		50	2	Fim do Eclipse		34	52
Mare Criſium acaba . . .		54	54	Fim da Penumbra. . . .		37	23
Immersaõ total da Lua .	8	0	59				

ADVERTENCIAS

A Pendula foi regulada pelas alturas correſpondentes nos dias 26, 27, 28, e 29, corrigidas pela correcçaõ do meio dia.

O Ceó eſteve todo o tempo, que durou o Eclipse, clariſſimo e ſereno ſem haver o menor vento, que fizeſſe tremer o oculo.

A Lua todo o tempo, que eſteve immergida, parecia-ſe bem a hum ferro em braza; porém muito diminura a ſua côr para o limbo Occidental.

Em todo o tempo, que durou o Eclipse, ſuſtentou-ſe o Barometro n' altura de 25″ 10‴, 7: e o Thermometro de Farenneith em 60°.

Eclipses dos Satellites de Jupiter.

Mezes.	Satellites.	Tempo Verdadeiro.	Estado do Ceo.
Janeiro . . 7	1.°	14^h 1′ 55″ Im.	Pouco claro.
. . . . 19	2.°	12 27 50 Im.	Muito claro, as faxas de Jupiter muito visiveis.
. . . . 23	1.°	12 12 15 Im.	Muito sereno, Jupiter, e as suas faxas bem terminadas.
. . . . 26	2.°	15 1 16 Im.	Idem.
. . . . 30	1.°	14 4 40 Im.	Pouco claro.
Fevereiro. 1	1.°	8 32 16 Im.	Muito claro, o Planeta, e suas faxas bem terminados; muito luar.
. . . . 7	3.°	8 39 10 Im.	Claro.
. . . . 8	1.°	10 25 45 Im.	pouco claro.
. . . . 17	1.°	9 5 10 Em.	Muito claro na parte onde estava o Planeta, as faxas bem visiveis; o Satellite sahio muito junto de Jupiter.
Março . . . 10	2.°	9 30 40 Em.	Muito sereno, Jupiter e suas faxas bem terminados.
. . . . 10	1.°	14 51 18 Em.	Claro.
. . . . 17	2.°	12 9 33 Em.	Idem.
. . . . 19	1.°	11 16 52 Em.	Idem.
. . . . 26	1.°	13 13 23 Em.	Idem.
Abril 4	1.°	9 39 20 Em.	Idem.
. . . . 11	2.°	9 27 37 Em.	Idem.
. . . . 11	1.°	11 35 46 Em.	Muito claro.
. . . . 27	1.°	9 56 57 Em.	Idem.
Maio 6	1.°	6 21 20 Em.	Idem.
. . . . 6	2.°	6 43 39 Em.	Idem.
. . . . 13	1.°	8 16 11 Em.	Idem.
. . . . 29	1.°	6 33 2 Em.	Idem.
Junho . . . 7	2.°	6 30 10 Em.	Claro, o Planeta bem terminado.
. . . . 9	3.°	7 57 45 Em.	Idem.
. . . . 14	2.°	9 6 22 Em.	Idem.
. . . . 21	1.°	6 41 48 Em.	Idem.
Julho 9	2.°	6 10 50 Em.	Claro, as faxas de Jupiter bem terminadas.

NO-

NOTA

DE CUSTODIO GOMES DE VILAS BOAS

Resultado das Observações Comparadas com as minhas

Pelo principio do Eclipse da ☾	2^h	$32'$	$41''$
Pela macula Keplero	2	27	58
Por Mare humorum	2	32	23
Por Plataõ	2	29	2
Pelo começo da Im. de Tycho	2	30	17
Pelo fim da mesma	2	30	52
Pelo começo de Mare Crisium	2	29	39
Pelo fim da mesma	2	29	44
Pela Immersaõ total	2	30	31
Pelo principio da Emersaõ	2	29	48
Pela Emersaõ de Tycho	2	28	5
Pelo principio de Emers. de M. Crisium	2	27	49
Pelo fim da Emers. da mesma	2	29	36
Pelo fim do Eclipse	2	28	23
Resultado medio	2	29	46

As 6 observações mais concludentes, que saõ as duas de Tycho, as duas de Mare crisium, e as 2 da Immersaõ total e do começo da Emersaõ daõ 2^h $30'$ $9''$, resultado que me parece mais certo.

Entre as 27 observações dos Satelites naõ achei senaõ huma correspondente ás minhas, he a Emersaõ do 2.° Satellite de 7 de Junho, a qual dá a differença dos meridianos . . . . 2^h $19'$ $51''$
cujo meio entre este, e o resultado do Eclipse da Lua he 2 30 0
e por tanto a diff. de Long. entre Lisboa, e S. Paulo he de . . $37°$ $30'$
Donde se deduz a Long. de Saõ Paulo contada do primeiro meridiano $331°$ $31'$.

ME-

MEMORIA

Sobre as Equações de condiçaõ das Funcções Fluxionaes.

POR FRANCISCO DE BORJA GARÇAÕ STOCKLER.

SECÇAÕ I.

Das Equações de Condiçaõ das Funcções Fluxionaes, que saõ Fluxões exactas.

§. I.

Lida em 22 de Junho de 1791.

DEpois que M. de Condorcet deo ao público a sua excellente Obra sobre a Theorica Geral do Calculo Integral, ou Methodo inverso das Fluxões todos os Geometras sabem, que sendo V huma Funcçaõ Fluxional de qualquer ordem n, e de qualquer numero de variaveis x, y, &c. para que seja Fluxaõ exacta de huma Funcçaõ da ordem o será precizo que cada huma das series de coefficientes, que multiplicaõ as differentes fluxões de cada variavel primitiva na expressaõ.

$$dV = \frac{dV}{dx}dx + \frac{dV}{ddx}ddx + \frac{dV}{d^3x}d^3x + \ldots + \frac{dV}{d^{n+1}x}d^{n+1}x$$
$$+ \frac{dV}{dy}dy + \frac{dV}{ddy}ddy + \frac{dV}{d^3y}d^3y + \ldots + \frac{dV}{d^{n+1}y}d^{n+1}y$$
$$+ \&c.$$

que por maior simplicidade escrevo assim

$$dV = N^{1'}dx + N^{2'}dp + N^{3'}dp' + \ldots + N^{(n+1)'}dp^{(n-1)'}$$
$$+ P^{1'}dy + P^{2'}dq + P^{3'}dq' + \ldots + P^{(n+1)'}dq^{(n-1)'}$$
$$+ \&c.$$

sa-

ſatisfaçaõ (naõ ſuppondo Fluxaõ alguma conſtante) a hum numero n de Equações de condiçaõ, que ſaõ para os coefficientes das Fluxões da variavel x

$$N^{1\prime} - dN^{2\prime} + ddN^{3\prime} - d^3N^{4\prime} + d^4N^{5\prime} - d^5N^{6\prime} + \&c. = 0$$

$$N^{2\prime} - 2dN^{3\prime} + 3ddN^{4\prime} - 4d^3N^{5\prime} + 5d^4N^{6\prime} - \&c. = 0$$

$$N^{3\prime} - 3dN^{4\prime} + 6ddN^{5\prime} - 10d^3N^{6\prime} + \&c. = 0$$

$$N^{4\prime} - 4dN^{5\prime} + 10ddN^{6\prime} - \&c. = 0$$

\- -

\- -

$$N^{n\prime} - ndN^{(n+1)\prime} = 0$$

Para os coefficientes das Fluxões da variavel y

$$P^{1\prime} - dP^{2\prime} + ddP^{3\prime} - d^3P^{4\prime} + d^4P^{5\prime} - d^5P^{6\prime} + \&c. = 0$$

$$P^{2\prime} - 2dP^{3\prime} + 3ddP^{4\prime} - 4d^3P^{5\prime} + 5d^4P^{6\prime} - \&c. = 0$$

$$P^{3\prime} - 3dP^{4\prime} + 6ddP^{5\prime} - 10d^3P^{6\prime} + \&c. = 0.$$

$$P^{4\prime} - 4dP^{5\prime} + 10ddP^{6\prime} - \&c. = 0.$$

\- -

\- -

$$P^{n\prime} - ndP^{(n+1)\prime} = 0$$

e aſſim ſucceſſivamente a reſpeito de todas as outras variaveis primitivas, que entrarem na Funcçaõ propoſta.

§. II.

Igualmente ſe ſabe, que para V ſer Fluxaõ exacta de huma Funcçaõ Fluxional da primeira ordem, baſta que os coefficientes de dV ſatisfaçaõ a todas as Equações antecedentes menos a ultima de cada ſerie. Que para ſer Fluxaõ exacta de huma Funcçaõ Fluxional da ſegunda ordem, baſ-

ta que os coefficientes de dV ſatisfaçaõ a todas as Equações antecedentes menos as duas ultimas de cada ſerie. E finalmente que para ſer Fluxaõ exacta de huma Funcçaõ Fluxional da ordem immediatamente inferior, baſta que os coefficientes de dV ſatisfaçaõ a primeira Equaçaõ de cada ſerie: condiçaõ eſta que já ſe conhecia antes da publicaçaõ da Obra de M. de Condorcet, mas cuja demonſtraçaõ ſe ignorava; pois que o Celebre Leonardo Euler, a quem eſte Theorema he devido, o publicou ſem ella em os Commentarios da Academia Imperial de Petresburgo, exaltando-o porém como huma d'aquellas verdades, que deviaõ ter, e com effeito tem hum uſo admiravel no Calculo Integral.

§ III.

Ninguem porém até ao prezente (ao menos que eu ſaiba) tem ſimplificado eſtas condições deduzindo dos principios, de que ellas ſe derivaõ, ou de outros quaeſquer, condições mais ſimpleces em ſi, ou dependentes de menor numero de operações, e por conſequencia mais faceis de applicar á pratica; e por iſſo fiz d'eſta inveſtigaçaõ o objecto da prezente Memoria.

§. IV.

Reflectindo em os coefficientes numericos dos termos de cada Equaçaõ, das que compoem a ſerie de condições relativas a qualquer variavel, facilmente ſe vê, que os coefficientes da primeira formaõ a ſerie dos numeros conſtantes: os coefficientes da ſegunda a ſerie dos numeros naturaes: os coefficientes da terceira a ſerie dos numeros triangulares: os coefficientes da quarta a ſerie dos numeros piramidaes, e aſſim ſucceſſivamente os coefficientes de todas as outras as ſeries de todos os outros numeros figurados; de ſorte que em geral podemos dizer, que os coefficientes de qualquer das ſobreditas Equações, exceptuando a primeira,

conſti-

conſtituem huma ſerie formada pela addiçaõ ſucceſſiva dos coefficientes da precedente.

§. V.

Naõ he menos facil de ver, que o numero dos termos da ſerie formada pelos coefficientes da primeira Equaçaõ he $n+1$: o numero dos termos da ſerie formada pelos coefficientes da ſegunda he n : o numero dos termos da ſerie formada pelos coefficientes da terceira he $n-1$: o numero dos termos da ſerie formada pelos coefficientes da quarta he $n-2$: e que finalmente o numero dos termos da ſerie formada pelos coefficientes da ultima he 2 : donde ſe ſegue pela natureza das meſmas ſeries, que o ultimo termo da ſegunda he n : o ultimo termo da terceira he $\frac{n(n-1)}{1.2}$: o ultimo termo da quarta he $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.}$: o ultimo termo da quinta he $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4.}$: e aſſim ſucceſſivamente até a ultima, cujo ultimo termo deve ſer n ; pois que o ultimo termo de cada huma he igual á ſomma dos termos da precedente menos o ultimo. Diſcorrendo ſemelhantemente ſe verá, que o penultimo termo da ſegunda he $n-1$: o penultimo termo da terceira he $\frac{(n-1)(n-2)}{1.2.}$: o penultimo termo da quarta he $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}$: e aſſim progreſſivamente até a penultima, cujo penultimo termo deve por conſequencia ſer $n-1$; por ſer o penultimo termo de cada huma igual á ſomma dos termos da antecedente menos os dois ultimos. Do meſmo modo ſe acharaõ todos os termos intermedios de cada huma reprezentados por expreſsões geraes; e por tanto eſcrevendo as meſmas ſeries por ordem inverſa, iſto he, começando pela ultima, ſeraõ como ſe ſegue.

$1;\quad n$

$1;\ n-1;\ \frac{n(n-1)}{1.2.}.$

$1;\ n-2;\ \frac{(n-1)(n-2)}{1.2.};\ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.}.$

$1;\ n-3;\ \frac{(n-2)(n-3)}{1.2.};\ \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.};$
$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4.}.$

$1;\ n-4;\ \frac{(n-3)(n-4)}{1.2.};\ \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.};$
$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.};\ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5.}$

&c.

§. VI.

D'aqui ſe conclue, que invertendo tambem a ordem das Equações de condiçaõ dadas por M. de Condorcet, eſtas feraõ para a variavel x

$$N^{n,}-ndN^{(n+1),}=0$$

$$N^{(n-1),}-(n-1)dN^{n,}+\frac{n(n-1)}{1.2.}ddN^{(n+1),}=0$$

$$N^{(n-2),}-(n-2)dN^{(n-1),}+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2.}ddN^{n,}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.}d^3N^{(n+1),}=0$$

$$N^{(n-3),}-(n-3)dN^{(n-2),}+\frac{(n-2)(n-3)}{1.2.}ddN^{(n-1),}-$$
$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.}d^3N^{n,}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4.}d^4N^{(n+1),}=0$$

&c.

Para a variavel y

$P^{n,}$

$$P^{n\prime} - n\, d P^{(n+1)\prime} = 0$$

$$P^{(n-1)\prime} - (n-1)\, d P^{n\prime} + \frac{n(n-1)}{1.\,2.}\, d d P^{(n+1)\prime} = 0$$

$$P^{(n-2)\prime} - (n-2) dP^{(n-1)\prime} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.\,2.}\, ddP^{n\prime} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3.}\, d^3 P^{(n+1)\prime} = 0$$

$$P^{(n-3)\prime} - (n-3) dP^{(n-2)\prime} + \frac{(n-2)(n-3)}{1.\,2.}\, ddP^{(n-1)\prime} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\,2.\,3.}\, d^3 P^{n\prime}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\,2.\,3.\,4.}\, d^4 P^{(n+1)\prime} = 0$$

&c.

e ſemelhantemente para todas as outras variaveis.

§. VII.

Determinando as Fluxões ſucceſſivas da primeira Equação da ſerie relativa á variavel x teremos em geral

$$d^m N^{(n+1)\prime} = \frac{1}{n}\, d^{m-1} N^{n\prime}$$

primeira Equação Fluxional; e ſubſtituindo na ſegunda o valor de $d\,d\,N^{(n+1)\prime}$ tirado d'eſta Equação Fluxional teremos

$$N^{(n-1)\prime} - \frac{n-1}{2}\, d N^{n\prime} = 0$$

Equação de condição mais ſimples, e equivalente á ſegunda, todas as vezes que a primeira tiver lugar.

§. VIII.

Determinando as Fluxões ſucceſſivas d'eſta nova Equação acharemos em geral

$$d^m N^{n\prime} = \frac{2}{n-1}\, d^{m-1} N^{(n-1)\prime}$$

Segunda Equaçaõ Fluxional: e ſubſtituindo na terceira o valor de $d^3 N^{(n+1)\prime}$ tirado da primeira Equaçaõ Fluxional; e o valor de $d\,dN^{n\prime}$ tirado d'eſta ſegunda teremos a Equaçaõ de condiçaõ

$$N^{(n-2)\prime} - \frac{n-2}{3}\, d\, N^{(n-1)\prime} = 0$$

equivalente á meſma terceira todas as vezes que as duas primeiras tiverem lugar.

§. IX.

Se determinarmos as Fluxões ſucceſſivas d'eſta teremos em geral por terceira Equaçaõ Fluxional.

$$d^m N^{(n-1)\prime} = \frac{3}{n-2}\, d^{m-1} N^{(n-2)\prime}$$

e ſubſtituindo na quarta Equaçaõ de condiçaõ o valor de $d^4 N^{(n+1)\prime}$ tirado da primeira Fluxional: o valor de $d^3 N^{n\prime}$ tirado da ſegunda; e o valor de $d\,d\,N^{(n-1)\prime}$ tirado d'eſta terceira, teremos huma nova Equaçaõ de condiçaõ.

$$N^{(n-3)\prime} - \frac{n-3}{4}\, d\, N^{(n-2)\prime} = 0$$

equivalente á meſma quarta todas as vezes que as tres primeiras ſe verificarem.

§. X.

Continuando a praticar operações e ſubſtituições ſemelhantes em todas as outras, hiremos achando novas Equações de condiçaõ igualmente ſimpleces, e equivalentes ás do §. VI; e eſte proceſſo nos moſtrará por huma inducçaõ aſſaz clara, que ſendo V, como ſupozemos, huma Funcçaõ Fluxional da ordem n, para ſe conhecer ſe he Fluxaõ

xaõ exacta de huma Funcçaõ da ordem o, naõ he precizo examinar ſe os coefficientes de dV ſatisfazem a aquellas ſeries de Equações taõ complicadas e trabalhozas, mas taõ ſómente ſe os meſmos coefficientes ſatisfazem á ſerie de Equações.

$$N^{1\prime} - \frac{1}{n} \; dN^{2\prime} = 0$$

$$N^{2\prime} - \frac{2}{n-1} dN^{3\prime} = 0$$

$$N^{3\prime} - \frac{3}{n-2} dN^{4\prime} = 0$$

- - - - - - -

- - - - - - -

$$N^{(n-2)\prime} - \frac{n-2}{3} dN^{(n-1)\prime} = 0$$

$$N^{(n-1)\prime} - \frac{n-1}{2} dN^{n\prime} = 0$$

$$N^{n\prime} - \frac{n}{1} \; dN^{(n+1)\prime} = 0$$

relativa á variavel x; e a ſerie de Equações

$$P^{1\prime} - \frac{1}{n} \; dP^{2\prime} = 0$$

$$P^{2\prime} - \frac{2}{n-1} dP^{3\prime} = 0$$

$$P^{3\prime} - \frac{3}{n-2} dP^{4\prime} = 0$$

- - - - - - -

- - - - - - -

$$P^{(n-2)\prime} - \frac{n-2}{3} dP^{(n-1)\prime} = 0$$

$$P^{(n-1)\prime} - \frac{n-1}{2} dP^{n\prime} = 0$$

$$P^{n\prime} - \frac{n}{1} dP^{(n+1)\prime} = 0$$

relativa á variavel y, e a huma ſerie ſemelhante relativa a cada huma das outras variaveis primitivas, que entrarem em V.

§. XI.

He bem vizivel quanto eſtas ſeries de Equações de condiçaõ ſaõ mais ſimpleces que as do illuſtre Geometra citado, cujos trabalhos me deraõ occaziaõ a eſtas reflexões; com tudo naõ devo deſſimular, que ainda meſmo a verificaçaõ de todas ellas naõ ſó ſeria demaſiadamente trabalhoza em muitos e muitos cazos, mas que he abſolutamente deſneceſſaria em todas as Funcções Fluxionaes ſuperiores á primeira ordem, ainda ſem ſuppor Fluxaõ alguma conſtante: o que, ſegundo o meſmo Geometra adverte, nos diſpenſaria de verificar a ſerie de condições relativa á variavel primitiva, cuja primeira Fluxaõ ſe tiveſſe ſuppoſto conſtante; mas o methodo que me propuz ſeguir pede, que deixemos para ao diante a verificaçaõ da prezente aſſerçaõ.

§. XII.

Se a Funcçaõ Fluxional propoſta V naõ for Fluxaõ exacta de nenhuma Funcçaõ da ordem o; mas ao meſmo tempo for Fluxaõ exacta de outra Funcçaõ Fluxional da primeira ordem; os coefficientes de dV deveraõ ſatisfazer a todas as Equações do §. VI. menos a primeira de cada ſerie; pelo que, ſe preſcindindo d'eſta determinarmos as Fluxões ſucceſſivas da ſegunda, acharemos em geral.

$$d^{m} N^{(n+1)\prime} = \frac{2}{n} d^{m-1} N^{n\prime} - \frac{1.\,2.}{n(n-1)} d^{m-2} N^{(n-1)\prime}$$

pri-

primeira Equaçaõ Fluxional: e ſubſtituindo na terceira o valor de $d^3 N^{(n+1),}$ tirado d'eſta primeira Fluxional ella ſe converterá em

$$N^{(n-2),} - 2\frac{n-2}{3} dN^{(n-1),} + \frac{(n-1)(n-2)}{2.3.} ddN^{n,} = 0$$

Equaçaõ de condiçaõ equivalente á meſma terceira, todas as vezes que a ſegunda tiver lugar.

§. XIII.

Se determinarmos as ſuas Fluxões ſucceſſivas teremos em geral

$$d^m N^{n'} = \frac{4}{n-1} d^{m-1} N^{(n-1),} - \frac{2.3.}{(n-1)(n-2)} d^{m-2} N^{(n-2),}$$

Segunda Equaçaõ Fluxional: e ſe na quarta Equaçaõ de condiçaõ ſubſtituirmos o valor de $d^4 N^{(n+1),}$ tirado da primeira Fluxional, e o valor de $d^3 N^{n\prime}$ tirado d'eſta ſegunda, ella ſe converterá em

$$N^{(n-3),} - 2\frac{n-3}{4} dN^{(n-2),} + \frac{(n-2)(n-3)}{3.4.} ddN^{(n-1),} = 0$$

Equaçaõ de condiçaõ que lhe ſerá equivalente, todas as vezes que a ſegunda e terceira forem verdadeiras.

§. XIV.

Determinando as Fluxões ſucceſſivas d'eſta; ſubſtituindo na ſeguinte os valores de todas as Fluxões ſuperiores á ſegunda ordem tirados das Equações Fluxionaes precedentes; e continuando a proceder ſemelhantemente a reſpeito de todas as ſeguintes, ſe achará, que para V ſer Fluxaõ exacta de huma Funcçaõ Fluxional da primeira ordem

os coefficientes de dV deveraõ satisfazer á serie de Equaçõ̃es de condiçaõ

$$N^{1'} - 2\,\frac{1}{n}\,dN^{2'} + \frac{1.\,2.}{n\,(n-1)}\,ddN^{3'} = 0$$

$$N^{2'} - 2\,\frac{2}{n-1}\,dN^{3'} + \frac{2.\,3.}{(n-1)(n-2)}\,ddN^{4'} = 0$$

$$N^{3'} - 2\,\frac{3}{n-2}\,dN^{4'} + \frac{3.\,4.}{(n-2)(n-3)}\,ddN^{5'} = 0$$

\- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

\- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$N^{(n-3)'} - 2\,\frac{n-3}{4}\,dN^{(n-2)'} + \frac{(n-2)(n-3)}{3.\,4.}\,ddN^{(n-1)'} = 0$$

$$N^{(n-2)'} - 2\,\frac{n-2}{3}\,dN^{(n-1)'} + \frac{(n-1)(n-2)}{2.\,3.}\,ddN^{n'} = 0$$

$$N^{(n-1)'} - 2\,\frac{n-1}{2}\,dN^{n'} + \frac{n.\,(n-1)}{1.\,2.}\,ddN^{(n+1)'} = 0$$

relativa á variavel x, e á serie de Equações de condiçaõ

$$P^{1'} - 2\,\frac{1}{n}\,dP^{2'} + \frac{1.\,2.}{n\,(n-1)}\,ddP^{3'} = 0$$

$$P^{2'} - 2\,\frac{2}{n-1}\,dP^{3'} + \frac{2.\,3.}{(n-1)(n-2)}\,ddP^{4'} = 0$$

$$P^{3'} - 2\,\frac{3}{n-2}\,dP^{4'} + \frac{3.\,4.}{(n-2)(n-3)}\,ddP^{5'} = 0$$

\- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

\- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$P^{(n-3)'} - 2\,\frac{n-3}{4}\,dP^{(n-2)'} + \frac{(n-2)(n-3)}{3.\,4.}\,ddP^{(n-1)'} = 0$$

$$P^{(n-2)'} - 2\,\frac{n-2}{3}\,dP^{(n-1)'} + \frac{(n-1)(n-2)}{2.\,3.}\,ddP^{n'} = 0$$

$$P^{(n-1)'} - 2\,\frac{n-1}{2}\,dP^{n'} + \frac{n.\,(n-1)}{1.\,2.}\,ddP^{(n+1)'} = 0$$

re-

relativa á variavel y, e a huma ſerie ſemelhante relativa a cada huma das outras variaveis primitivas, que entrarem na Funcçaõ V

§. XV.

Sendo V Fluxaõ exacta de huma Funcçaõ Fluxional da ſegunda ordem, entaõ os coefficientes de dV deveráõ ſatisfazer a todas as Equaçóes do §. VI. menos as duas primeiras de cada ſerie; e por tanto determinando as Fluxões ſucceſſivas da terceira acharemos em geral

$$d^{m}N^{(n+1)\prime} = 3\,\frac{1}{n}\,d^{m-1}N^{n\prime} - 3\,\frac{1.\,2.}{n\,(n-1)}\,d^{m-2}N^{(n-1)\prime} + \frac{1.\,2.\,3.}{n\,(n-1)(n-2)}\,d^{m-3}N^{(n-2)\prime}$$

primeira Equaçaõ Fluxional: e ſubſtituindo na quarta, o valor $d^{4}N^{(n+1)\prime}$ tirado d'eſta, ella ſe converterá em

$$N^{(n-3)\prime} - 3\,\frac{n-3}{4}\,dN^{(n-2)\prime} + 3\,\frac{(n-2)(n-3)}{3.\,4.}\,ddN^{(n-1)\prime} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2.\,3.\,4.}\,d^{3}N^{n\prime} = 0$$

Equaçaõ de condiçaõ equivalente á meſma quarta todas as vezes que a terceira ſe verificar.

§. XVI.

Continuando a proceder por hum modo analogo ao que até agora temos praticado ſe achará, que para V ſer Fluxaõ exacta de huma Funcçaõ Fluxional da ſegunda ordem, os coefficientes de dV deveraõ ſatisfazer á ſerie de Equaçóes de condiçaõ

$N^{\prime\prime}$

$$N^{1'} - 3\,\frac{1}{n}\,dN^{2'} + 3\,\frac{1.\,2.}{n\,(n-1)}\,ddN^{3'} - \frac{1.\,2.\,3.}{n\,(n-1)(n-2)}\,d^3N^{4'} = 0$$

$$N^{2'} - 3\,\frac{2}{n-1}\,dN^{3'} + 3\,\frac{2.\,3.}{(n-1)(n-2)}\,ddN^{4'} - \frac{2.\,3.\,4.}{(n-1)(n-2)(n-3)}\,d^3N^{5'} = 0$$

$$N^{3'} - 3\,\frac{3}{n-2}\,dN^{4'} + 3\,\frac{3.\,4.}{(n-2)(n-3)}\,ddN^{5'} - \frac{3.\,4.\,5.}{(n-2)(n-3)(n-4)}\,d^3N^{6'} = 0$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$N^{(n-4)'} - 3\,\frac{n-4}{5}\,dN^{(n-3)'} + 3\,\frac{(n-3)(n-4)}{4.\,5.}\,ddN^{(n-2)'} - \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{3.\,4.\,5.}\,d^3N^{(n-1)'} = 0$$

$$N^{(n-3)'} - 3\,\frac{n-3}{4}\,dN^{(n-2)'} + 3\,\frac{(n-2)(n-3)}{3.\,4.}\,ddN^{(n-1)'} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2.\,3.\,4.}\,d^3N^{n'} = 0$$

$$N^{(n-2)'} - 3\,\frac{n-2}{3}\,dN^{(n-1)'} + 3\,\frac{(n-1)(n-2)}{2.\,3.}\,ddN^{n'} - \frac{n\,(n-1)(n-2)}{1.\,2.\,3.}\,d^3N^{(n+1)'} = 0$$

relativa á variavel x; e a ſerie de Equações de condiçaõ

$$P^{1'} - 3\,\frac{1}{n}\,dP^{2'} + 3\,\frac{1.\,2.}{n\,(n-1)}\,ddP^{3'} - \frac{1.\,2.\,3.}{n(n-1)(n-2.)}\,d^3P^{4'} = 0$$

$$P^{2'} - 3\,\frac{2}{n-1}\,dP^{3'} + 3\,\frac{2.\,3.}{(n-1)(n-2)}\,ddP^{4'} - \frac{2.\,3.\,4.}{(n-1)(n-2)(n-3)}\,d^3P^{5'} = 0$$

$$P^{3'} - 3\,\frac{3}{n-2}\,dP^{4'} + 3\,\frac{3.\,4.}{(n-2)(n-3)}\,ddP^{5'} - \frac{3.\,4.\,5.}{(n-2)(n-3)(n-4)}\,d^3P^{6'} = 0$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$P^{(n-4)'}$

$$P^{(n-4)\prime} - 3\,\frac{n-4}{5}\,dP^{(n-3)\prime} + 3\,\frac{(n-3)(n-4)}{4.5}\,ddP^{(n-2)\prime} - \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{3.4.5}\,d^3P^{(n-1)\prime} = 0$$

$$P^{(n-3)\prime} - 3\,\frac{n-3}{4}\,dP^{(n-2)\prime} + 3\,\frac{(n-2)(n-3)}{3.4}\,ddP^{(n-1)\prime} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4}\,d^3P^{n\prime} = 0$$

$$P^{(n-2)\prime} - 3\,\frac{n-2}{3}\,dP^{(n-1)\prime} + 3\,\frac{(n-1)(n-2)}{2.3}\,ddP^{n\prime} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\,d^3P^{(n+1)\prime} = 0$$

relativa á variavel y; e a huma ferie femelhante relativa a cada huma das outras variaveis primitivas.

§. XVII.

Do mefmo modo fe achará, que para V fer Fluxaõ exacta de huma Funcçaõ Fluxional da terceira ordem ferá precizo, que os coefficientes de dV fatisfaçaõ á ferie de Equações de condiçaõ

$$N^{1\prime} - 4\frac{1}{n}dN^{2\prime} + 6\,\frac{1.2}{n(n-1)}\,ddN^{3\prime} - 4\,\frac{1.2.3}{n(n-1)(n-2)}\,d^3N^{4\prime} + \frac{1.2.3.4}{n(n-1)(n-2)(n-3)}\,d^4N^{5\prime} = 0$$

$$N^{2\prime} - 4\,\frac{2}{n-1}\,dN^{3\prime} + 6\,\frac{2.3}{(n-1)(n-2)}\,ddN^{4\prime} - 4\,\frac{2.3.4}{(n-1)(n-2)(n-3)}\,d^3N^{5\prime} + \frac{2.3.4.5}{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}\,d^4N^{6\prime} = 0$$

$$N^{3\prime} - 4\,\frac{3}{n-2}\,dN^{4\prime} + 6\,\frac{3.4}{(n-2)(n-3)}\,ddN^{5\prime} - 4\,\frac{3.4.5}{(n-2)(n-3)(n-4)}\,d^3N^{6\prime} + \frac{3.4.5.6}{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}\,d^4N^{7\prime} = 0$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$N^{(n-5)'} - 4\frac{n-5}{6}\, dN^{(n-4)'} + 6\frac{(n-4)(n-5)}{5.\,6.}\, ddN^{(n-3)'} - 4\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{4.\,5.\,6.}\, d^3N^{(n-2)'} + \frac{(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{3.\,4.\,5.\,6.}\, d^4N^{(n-1)'} = 0$$

$$N^{(n-4)'} - 4\frac{n-4}{5}\, dN^{(n-3)'} + 6\frac{(n-3)(n-4)}{4.\,5.}\, ddN^{(n-2)'} - 4\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{3.\,4.\,5.}\, d^3N^{(n-1)'} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2.\,3.\,4.\,5.}\, d^4N^{n'} = 0$$

$$N^{(n-3)'} - 4\frac{n-3}{4}\, dN^{(n-2)'} + 6\frac{(n-2)(n-3)}{3.\,4.}\, ddN^{(n-1)'} - 4\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2.\,3.\,4.}\, d^3N^{n'} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\,2.\,3.\,4.}\, d^4N^{(n+1)'} = 0$$

relativa á variavel x, e a huma ferie femelhante a refpeito de cada huma das outras variaveis primitivas, que entrarem em V: e que geralmente falando para que V feja Fluxaõ exacta de huma Funcçaõ Fluxicnal da ordem $m-1$, naõ fendo $m > n$ os coefficientes de dV fatisfaçaõ á ferie de Equações de condiçaõ

$$N^{1'} - \frac{m}{n}\, dN^{2'} + \frac{m(m-1)}{n(n-1)}\, ddN^{3'} - \frac{m(m-1)(m-2)}{n(n-1)(n-2)}\, d^3N^{4'} + \&c. = 0$$

$$N^{2'} - 2\frac{m}{n-1}\, dN^{3'} + 3\frac{m(m-1)}{(n-1)(n-2)}\, ddN^{4'} - 4\frac{m(m-1)(m-2)}{(n-1)(n-2)(n-3)}\, d^3N^{5'} + \&c. = 0$$

$$N^{3'} - 3\frac{m}{n-2}\, dN^{4'} + 6\frac{m(m-1)}{(n-2)(n-3)}\, ddN^{5'} - 10\frac{m(m-1)(m-2)}{(n-2)(n-3)(n-4)}\, d^3N^{6'} + \&c. = 0$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$N^{(n-m-1)'} - \frac{(n-m-1)}{1}\cdot\frac{m}{m+2}\, dN^{(n-m)'} + \frac{(n-m-1)(n-m)}{1.\,2.}$$

m

$$\frac{m(m-1)}{(m+2)(m+1)} ddN^{(n-m+1)'} - \frac{(n-m-1)(n-m)(n-m+1)}{1.2.3.}$$

$$\frac{(m-1)(m-2)}{(m+2)(m+1)} d^3 N^{(n-m+2)'} + \&c. = 0$$

$$N^{(n-m)'} - \frac{(n-m)}{1} \cdot \frac{m}{m+1} dN^{(n-m+1)'} + \frac{(n-m)(n-m+1)}{1.2.}$$

$$\frac{m-1}{(m+1)} ddN^{(n-m+2)'} - \frac{(n-m)(n-m+1)(n-m+2)}{1.2.3.}$$

$$\frac{m-2}{m+1} d^3 N^{(n-m+3)'} + \&c. = 0$$

$$N^{(n-m+1)'} - \frac{n-m+1}{1} dN^{(n-m+2)'} + \frac{(n-m+1)(n-m+2)}{1.2.} ddN^{(n-m+3)'}$$

$$- \frac{(n-m+1)(n-m+2)(n-m+3)}{1.2.3.} d^3 N^{(n-m+4)'} + \&c. = 0$$

relativa á variavel x, e a outra ſerie ſemelhante pelo que pertence a cada huma das outras variaveis primitivas.

§. XVIII.

As leis de todas eſtas ſeries de Equações de condiçaõ, as quaes ſaõ aſſaz faceis de notar, comparadas entre ſi nos moſtraõ claramente, que todas as ditas ſeries de Equações ſe podem contrahir em huma ſó expreſſaõ geral

$$N^{(n-k)'} - m\frac{(n-k)}{(k+1)} dN^{(n-k+1)'} + \frac{m(m-1)}{1.2.} \frac{(n-k)(n-k+1)}{(k+1)k} ddN^{(n-k+2)'}$$

$$- \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3.} \frac{(n-k)(n-k+1)(n-k+2)}{(k+1)k(k-1)} d^3 N^{(n-k+3)'} +$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4.} \frac{(n-k)(n-k+1)(n-k+2)(n-k+3)}{(k+1)k(k-1)(k-2)} d^4 N^{(n-k+4)'}$$

—

$$-\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}\frac{(n-k)\ (n-k+1)\ (n-k+2)}{(k+1)\ k\ (k-1)}$$
$$\frac{(n-k+3)\ (n-k+4)}{(k-2)\ (k-3)}d^5N^{(n-k+5)'} + \&c.$$

da qual facilmente ſe derivaõ ſubſtituindo por m o expoente da ordem de que V deve ſer Fluxaõ exacta augmentado de huma unidade, e por k todos os numeros inteiros desde $n-1$ até $m-1$; iſto he, pelo que pertence á variavel x; mas querendo-ſe as Equações de condiçaõ relativas á variavel y ſe eſcreverá P em lugar de N; e ſemelhantemente ſe procederá querendo-ſe as Equações de condiçaõ relativas a outra qualquer variavel.

SECÇAÕ II.

Comparaçaõ das Equações de condiçaõ achadas pelo prezente Methodo com as de Euler *e* Fontaine, *e conſequencias que d'aqui rezultaõ.*

§. XIX.

GEralmente fallando pode dizerſe, que á proporçaõ que hum methodo analytico he mais univerſal, creſcem os incommodos da ſua applicaçaõ aos cazos particulares; e que por conſequencia ſemelhantes methodos ſaõ mais proprios para d'elles ſe deduzirem outros mais particulares, do que para ſe praticarem com preferencia a eſtes. O que acabo de expor, para ſe reconhecer ſe as Funcções Fluxionaes, de qualquer ordem que ſejaõ, ſaõ Fluxões exactas de outras Funcções de alguma ordem inferior, he huma prova d'eſta verdade. Elle conduz em todos os cazos particulares a Equações ſuperabundantes, já porque ſe achem incluidas em algumas das outras das differentes ſeries de condições, que elle meſmo nos dá; já porque ſejaõ conſequencias neceſſarias de algumas d'ellas. Com tudo como os Geometras, que tratáraõ eſte genero de queſ-

tões

tões por methodos particulares, naõ paſſaraõ de dar as condiçóes relativas ás Funcçóes Fluxionaes da primeira ordem, qualquer que ſeja o numero das variaveis nellas incluidas, e as que pertencem ás da ſegunda, quando eſtas naõ involvem mais que duas variaveis, naõ he eſte hum d'aquelles methodos geraes, que facilmente ſe poſſaõ ſupprir por meio dos particulares, ao menos até ao prezente; e por tanto toda a ſimplificaçaõ, que ſe lhe poder dar, ſe deve julgar de baſtante importancia na ordem dos trabalhos analyticos.

§. XX.

A comparaçaõ d'eſte Methodo com os dos celebres Geometras *Leonardo Euler*, e *Fontaine*, ou por melhor dizer a applicaçaõ d'eſte methodo ás fórmulas geraes das Funcçóes das differentes ordens Fluxionaes, que elles conſideráraõ, ou podiaõ conſiderar ſegundo os ſeus, nos pode conduzir a ſimplificalo baſtantemente; e por tanto, ainda que poſſa haver outros meios mais proprios para eſte fim, em quanto naõ ſaõ conhecidos, naõ devemos deſpenſarnos de indicar eſte, moſtrando aqui como as Equaçóes de condiçaõ, que aquelles Geometras acharaõ por differentes caminhos, ſe deduzem das que acabamos de demonſtrar, e como por meio d'eſta comparaçaõ ou deducçaõ ſe reconheſſe a ſuperabundancia de algumas d'eſtas.

§. XXI.

Se a Funcçaõ Fluxional propoſta V for da primeira ordem, e naõ involver mais que duas variaveis primitivas x, e y: fazendo $n = 1$ em as Equaçóes do §. X, ou $m = n = 1$ em á Equaçaõ generaliſſima do §. XVIII as noſſas Equaçóes de condiçaõ neceſſarias, para que V ſeja Fluxaõ exacta, ſeráõ

$$N^{1'} - dN^{2'} = 0$$

$$P^{1'} - dP^{2'} = 0$$

Mas nesta supposiçaõ será

$$V = A\,dx + B\,dy$$

e segundo os mencionados Geometras para que V seja Fluxaõ exacta, deverá ser

$$\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$$

Determinando a Fluxaõ de V, ou de $Ap + Bq$ se tem

$$dV = A\,dp + B\,dq + \left(\frac{dA}{dx}p + \frac{dB}{dx}q\right)dx + \left(\frac{dA}{dy}p + \frac{dB}{dy}q\right)dy$$

e por consequencia tornando a substituir dx em lugar de p, e dy em lugar de q

$$N^{1'} = \frac{dA}{dx}dx + \frac{dB}{dx}dy$$

$$N^{2'} = A$$

$$P^{1'} = \frac{dA}{dy}dx + \frac{dB}{dy}dy$$

$$P^{2'} = B$$

valores que substituidos em as nossas duas Equações de condiçaõ convertem a primeira em

$$\left(\frac{dB}{dx} - \frac{dA}{dy}\right)dy = 0$$

e a segunda em

$$\left(\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dy}\right)dx = 0$$

as

as quaes ambas nos moſtraõ, que para V ſer Fluxaõ exacta deve com effeito ſer

$$\frac{dA}{dy}=\frac{dB}{dx}$$

§. XXII.

Suppondo $V=Adx+Bdy+Cdz$, e procedendo pelo meſmo modo acharemos, que as noſſas Equações de condiçaõ

$$\overset{1'}{N}-d\overset{2'}{N}=0$$

$$\overset{1'}{P}-d\overset{2'}{P}=0$$

$$\overset{1'}{Q}-d\overset{2'}{Q}=0$$

ſe convertem em

$$\left(\frac{dB}{dx}-\frac{dA}{dy}\right)dy+\left(\frac{dC}{dx}-\frac{dA}{dz}\right)dz=0$$

$$\left(\frac{dA}{dy}-\frac{dB}{dx}\right)dx+\left(\frac{dC}{dy}-\frac{dB}{dz}\right)dz=0$$

$$\left(\frac{dA}{dz}-\frac{dC}{dx}\right)dx+\left(\frac{dB}{dz}-\frac{dC}{dy}\right)dy=0$$

Equações das quaes, por iſſo que devem ſer identicas, e as Fluxões dx, dy, dz naõ entraõ em nenhuma das expreſsões comprehendidas entre os parenthezes, ſe deduzem as ſeguintes Equações de condiçaõ

$$\frac{dA}{dy}=\frac{dB}{dx}\ ;\qquad \frac{dA}{dz}=\frac{dC}{dx}\ ;\qquad \frac{dB}{dz}=\frac{dC}{dy}.$$

que ſaõ as meſmas dos ſobreditos Geometras. N'uma palavra, ſuppondo que V contenha hum numero qualquer de variaveis, e procedendo pelo modo indicado, ſe concluirá

o

o Theorema Geral de *Fontaine*: a ſaber „ Que tomando ar-„ bitrariamente quaeſquer dois termos de V, por exemplo „ $K\,du$, e $M\,dx$ ſe terá ſempre „

$$\frac{dK}{dx} = \frac{dM}{du}$$

donde ſe ſegue, que ſendo λ o numero das variaveis, o numero das Equações de condiçaõ abſolutamente neceſſarias, para que V ſeja Fluxaõ exacta, ſerá $\frac{\lambda\,(\lambda - 1)}{1.\,2.}$.

§. XXIII.

Se determinarmos as Fluxões ſucceſſivas de $A\,dx + B\,dy + C\,dz +$ &c. ſem ſuppor Fluxaõ alguma conſtante veremos, que em qualquer ordem n, a que chegarmos, os coefficientes de $d^n x$; $d^n y$; $d^n z$; &c. ſeraõ as meſmas quantidades A, B, C, &c, e que os coefficientes de todos os outros termos ſeraõ Fluxões parciaes, ou multiplos de Fluxões parciaes das meſmas quantidades A, B, C &c: donde concluo, que o numero das Equações de condiçaõ abſolutamente neceſſarias, para que huma Funcçaõ Fluxional de qualquer ordem n ſeja Fluxaõ exacta de outra Funcçaõ da ordem o, he, ſendo k o numero dos ſeus termos, $k + \frac{\lambda\,(\lambda - 3)}{2}$; e que tirando as Equações de condiçaõ $\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}$ relativas aos coefficientes de $d^n x$; $d^n y$; $d^n z$; &c. as outras $k - \lambda$ equações relativas aos outros coefficientes devem ſer expreſſadas naõ ſimpleſmente por Fluxões parciaes dos meſmos coefficientes, como ſaõ aquellas, mas ſim pelos meſmos coefficientes, e por differentes Fluxões parciaes dos primeiros A; B; C; &c.

§. XXIV.

Se reflectirmos porém, que determinando as quantida-
des

des $N^{1'}$; $P^{1'}$; $Q^{1'}$ &c. devemos ter em os coefficientes dos ſeus termos todas as Fluxões parciaes de A; B; C; &c. Que determinando as quantidades $N^{2'}$; $P^{2'}$; $Q^{2'}$; &c. os coefficientes dos ſeus termos devem ſer os meſmos que os coefficientes de todos os termos de V, em que ſe achar dx, dy; dz; &c. e que por conſequencia eſtes meſmos coefficientes ſe devem achar em $dN^{2'}$; $dP^{2'}$; $dQ^{2'}$; &c. Que ſemelhantemente em $dN^{3'}$; $dP^{3'}$; $dQ^{3'}$; &c. ſe devem achar todos os coefficientes dos termos de V, em que entrar ddx; ddy; ddz &c. &c.; e ſe ao meſmo tempo attendermos a que, procedendo d'eſte modo, ou ſeja $n = 2m - 2$, ou $n = 2m - 1$, em chegando ás quantidades $dN^{m'}$; $dP^{m'}$; $dQ^{m'}$&c. naõ haverá em V mais coefficiente algum, além dos coefficientes das fluxões da ordem n, que ſe naõ ache em as expreſsões de $dN^{2'}$; $dN^{3'}$; $dN^{4'}$.... $dN^{m'}$; $dP^{2'}$; $dP^{3'}$; $dP^{4'}$.... $dP^{m'}$; $dQ^{2'}$; $dQ^{3'}$; $dQ^{4'}$.... $dQ^{m'}$; &c. facilmente ſe verá, que para V ſer Fluxaõ exacta de huma Funcçaõ da ordem o, baſta que os ſeus coefficientes ſatisfaçaõ a metade das Equações de cada ſerie do §. X., ſendo n numero par, e a metade de todas menos huma, ſendo n numero impar > 1; donde ſe ſegue, que todas as outras nos daraõ condições ſuperabundantes ou repetidas: inconveniente de que, ainda depois d'eſta ſimplificaçaõ, ſenaõ fica inteiramente izento.

§. XXV.

Para maior illuſtraçaõ de tudo quanto digo em o §. antecedente continuemos a comparar o noſſo methodo com o de *Euler*, viſto que *Fontaine* naõ paſſou de dar as Equações de condiçaõ das Funcções Fluxionaes da primeira ordem, que com muito artificio eſtendeo ás ordens ſuperiores, e ſupponhamos que V ſeja huma Funcçaõ Fluxional da ſegunda, a qual involva ſómente duas variaveis primitivas x, e y. Neſte cazo a fórma geral de V he

$$Addx + Bddy + Cdx^2 + Ddy^2 + Edxdy$$

As noſſas Equações de condiçaõ para que V ſeja Fluxaõ exacta de huma Funcçaõ da ordem o, ſaõ

$$\overset{1\prime}{N} - \frac{1}{2} d \overset{2\prime}{N} = 0$$

$$\overset{1\prime}{P} - \frac{1}{2} d \overset{2\prime}{P} = 0$$

e ſegundo Euler (*Instit. Calc. Diff. Pars prior Cap.* 8.) devem ſer

$$\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}\,; \quad C = \frac{dA}{dx}\,; \quad D = \frac{dB}{dy}\,; \quad E = 2\frac{dA}{dy} = 2\frac{dB}{dx}.$$

Determinando a Fluxaõ de V, que reprezentaremos d'eſta forma

$$V = Ap' + Bq' + Cp^2 + Dq^2 + Epq$$

teremos

$$dV = \left(\frac{dA}{dx}p' + \frac{dB}{dx}q' + \frac{dC}{dx}p^2 + \frac{dD}{dx}q^2 + \frac{dE}{dx}pq\right)dx +$$

$$(2Cp + Eq)\,ddx + Ad^3x$$

$$+ \left(\frac{dA}{dy}p' + \frac{dB}{dy}q' + \frac{dC}{dy}p^2 + \frac{dD}{dy}q^2 + \frac{dE}{dy}pq\right)dy +$$

$$(2Dq + Ep)\,ddy + Bd^3y$$

donde ſe tira

$$\overset{1\prime}{N} = \frac{dA}{dx}ddx + \frac{dB}{dx}ddy + \frac{dC}{dx}dx^2 + \frac{dD}{dx}dy^2 + \frac{dE}{dx}dxdy$$

$$\overset{2\prime}{N} = 2Cdx + Edy$$

$$\overset{1\prime}{P} = \frac{dA}{dy}ddx + \frac{dB}{dy}ddy + \frac{dC}{dy}dx^2 + \frac{dD}{dy}dy^2 + \frac{dE}{dy}dxdy$$

$$\overset{2\prime}{P} = 2Ddy + Edx$$

valores que ſubſtituidos em as noſſas Equações reduzem a primeira a

$\left(\frac{dA}{dx}\right.$

$$\left(\frac{dA}{dx} - C\right) ddx + \left(\frac{dB}{dx} - \frac{1}{2}E\right) ddy + \left(\frac{dD}{dx} - \frac{1}{2}\frac{dE}{dy}\right) dy^2 +$$

$$\left(\frac{1}{2}\frac{dE}{dx} - \frac{dC}{dy}\right) dx\, dy = 0$$

e a ſegunda a

$$\left(\frac{dA}{dy} - \frac{1}{2}E\right) ddx + \left(\frac{dB}{dy} - D\right) ddy + \left(\frac{dC}{dy} - \frac{1}{2}\frac{dE}{dx}\right) dy^2 +$$

$$\left(\frac{1}{2}\frac{dE}{dy} - \frac{dD}{dx}\right) dx\, dy = 0.$$

Ora cada huma d'eſtas Equações deve ſer identica, e como naõ entra Fluxaõ alguma em as quantidades comprehendidas entre os parenthezes, a condiçaõ da identidade exige, que ſeja

$$C = \frac{dA}{dx}; \quad \frac{dB}{dx} = \frac{1}{2}E; \quad \frac{dA}{dy} = \frac{1}{2}E; \quad \frac{dB}{dy} = D$$

$$\frac{dD}{dx} = \frac{1}{2}\frac{dE}{dy}; \quad \frac{dC}{dy} = \frac{1}{2}\frac{dE}{dx}.$$

A primeira d'eſtas ſeis Equações de condiçaõ he a ſegunda de Euler. A ſegunda, e a terceira combinadas entre ſi moſtraõ ſer

$$\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}; \text{ e } E = 2\frac{dA}{dy} = 2\frac{dB}{dx}.$$

que ſaõ a primeira e quarta condições de Euler: e a quarta he juſtamente a terceira do meſmo Autor. A quinta, e a ſexta ſaõ ſimplices conſequencias das outras quatro, como he facil de ver; e por tanto naõ ſe podem conſiderar como expreſſando condições deſtinctas das primeiras.

§. XXVI.

§. XXVI.

Se quizermos, ſegundo os principios de Euler expoſtos em o Capitulo citado, determinar as Equações de condiçaõ, a que devem ſatisfazer os coefficientes de dV, ſendo V huma Funcçaõ Fluxional da terceira ordem, que involva ſómente duas variaveis x, e y, devemos determinar a Fluxaõ da Formula geral das Funcções Fluxionaes da ſegunda ordem, que involvem o meſmo numero de variaveis, ou a Fluxaõ de

$$M\,ddx + N\,ddy + P\,dx^2 + G\,dy^2 + R\,dx\,dy$$

ſubſtituir em lugar de P, Q, e R os ſeus valores tirados das Equações de condiçaõ da meſma Formula geral, e comparar termo por termo a expreſſaõ da ſua Fluxaõ com a Formula geral das Funcções Fluxionaes da terceira ordem, quando contem ſómente duas Fluentes, a qual he

$$A\,d^3x + B\,d^3y + C\,dx\,ddx + D\,dy\,ddy + E\,dy\,ddx + F\,dx\,ddy + G\,dx^3 + H\,dy^3 + I\,dx^2\,dy + L\,dx\,dy^2$$

e por meio d'eſta comparaçaõ acharemos, que para V ſer Fluxaõ exacta de huma Funcçaõ Fluxional da ordem o deverá ſer

$$\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}\,;\; C = 3\frac{dA}{dx}\,;\;\; D = 3\frac{dB}{dy}\,; E = 3\frac{dA}{dy}\,; F = 3\frac{dB}{dx}\,;$$

$$G = \frac{ddA}{dxdx}\,;\; H = \frac{ddB}{dydy}\,;\; I = 3\frac{ddA}{dxdy}\,;\;\; L = 3\,\frac{ddB}{dxdy}.$$

§. XXVII.

Segundo o noſſo methodo as condições a que V deve ſatisfazer ſaõ

$\overset{\prime\prime}{N} =$

$$\overset{1\prime}{N} - \frac{1}{3}\, d\overset{2\prime}{N} = 0$$

$$\overset{1\prime}{P} - \frac{1}{3}\, d\overset{2\prime}{P} = 0$$

nas quaes, para ſe reconhecer a ſua conformidade com as nove achadas em o §. antecedente, ſe deve ſubſtituir por $\overset{1\prime}{N}$; $\overset{2\prime}{N}$; $\overset{1\prime}{P}$; $\overset{2\prime}{P}$: os ſeus valores tirados da Formula geral das Funcções da ordem propoſta. Para eſte effeito determinaremos a ſua Fluxaõ, e naõ paſſando dos termos, em que ſe conſideraõ como Fluentes as Fluxões dx, e dy, teremos

$$dV = \Big(\frac{dA}{dx}p'' + \frac{dB}{dx}q'' + \frac{dC}{dx}pp' + \frac{dD}{dx}qq' + \frac{dE}{dx}qp' + \frac{dF}{dx}pq'$$
$$+ \frac{dG}{dx}p^3 + \frac{dH}{dx}q^3 + \frac{dI}{dx}p^2q + \frac{dL}{dx}pq^2\Big)dx + \Big(Cp' + Fq'$$
$$+ 3Gp^2 + 2Ipq + Lq^2\Big)ddx + \&c.$$
$$+ \Big(\frac{dA}{dy}p'' + \frac{dB}{dy}q'' + \frac{dC}{dy}pp' + \frac{dD}{dy}qq' + \frac{dE}{dy}qp' + \frac{dF}{dy}pq'$$
$$+ \frac{dG}{dy}p^3 + \frac{dH}{dy}q^3 + \frac{dI}{dy}p^2q + \frac{dL}{dy}pq^2\Big)dy + \Big(Dq' + Ep'$$
$$+ 3Hq^2 + Ip^2 + 2Lpq\Big)ddy + \&c.$$

donde ſe tira

$$\overset{1\prime}{N} = \frac{dA}{dx}d^3x + \frac{dB}{dx}d^3y + \frac{dC}{dx}dx\,ddx + \frac{dD}{dx}dy\,ddy$$
$$+ \frac{dE}{dx}dy\,ddx + \frac{dF}{dx}dx\,ddy + \frac{dG}{dx}dx^3 + \frac{dH}{dx}dy^3$$
$$+ \frac{dI}{dx}dx^2dy + \frac{dL}{dx}dx\,dy^2.$$

 $\overset{2\prime}{N} =$

$$\overset{2\prime}{N} = C\,d\,d\,x + F\,d\,d\,y + 3\,G\,d\,x^2 + 2\,I\,d\,x\,d\,y + L\,d\,y^2.$$

$$\overset{\prime\prime}{P} = \frac{dA}{dy} d^3 x + \frac{dB}{dy} d^3 y + \frac{dC}{dy} d\,x\,d\,d\,x + \frac{dD}{dy} d\,y\,d\,d\,y$$

$$+ \frac{dE}{dy} d\,y\,d\,d\,x + \frac{dF}{dy} d\,x\,d\,d\,y + \frac{dG}{dy} d\,x^3 + \frac{dH}{dy} d\,y^3$$

$$+ \frac{dI}{dy} d\,x^2\,d\,y + \frac{dL}{dy} d\,x\,d\,y^2.$$

$$\overset{2\prime}{P} = D\,d\,d\,y + E\,d\,d\,x + 3\,H\,d\,y^2 + I\,d\,x^2 + 2\,L\,d\,x\,d\,y.$$

valores que ſubſtituidos em as noſſas Equações convertem a primeira em

$$\left(\frac{dA}{dx} - \frac{1}{3} C\right) d^3 x + \left(\frac{dB}{dx} - \frac{1}{3} F\right) d^3 y + \left(\frac{2}{3}\frac{dC}{dx} - 2\,G\right) dx\,ddx$$

$$+ \left(\frac{dD}{dx} - \frac{1}{3}\frac{dF}{dy} - \frac{2}{3} L\right) dy\,ddy + \left(\frac{dE}{dx} - \frac{1}{3}\frac{dC}{dy} - \frac{2}{3} I\right) dy\,ddx$$

$$+ \left(\frac{2}{3}\frac{dF}{dx} - \frac{2}{3} I\right) d\,x\,d\,d\,y + \left(\frac{dH}{dx} - \frac{1}{3}\frac{dL}{dy}\right) d\,y^3 +$$

$$\left(\frac{1}{3}\frac{dI}{dx} - \frac{dG}{dy}\right) d\,x^2 d\,y + \left(\frac{2}{3}\frac{dL}{dx} - \frac{2}{3}\frac{dI}{dy}\right) d\,x\,d\,y^2 = 0$$

e a ſegunda em

$$\left(\frac{dA}{dy} - \frac{1}{3} E\right) d^3 x + \left(\frac{dB}{dy} - \frac{1}{3} D\right) d^3 y + \left(\frac{dC}{dy} - \frac{1}{3}\frac{dE}{dx} - \frac{2}{3} I\right) dx\,ddx$$

$$+ \left(\frac{2}{3}\frac{dD}{dy} - 2\,H\right) d\,y\,d\,d\,y + \left(\frac{2}{3}\frac{dE}{dy} - \frac{2}{3} L\right) d\,y\,d\,d\,x$$

$$+ \left(\frac{dF}{dy} - \frac{1}{3}\frac{dD}{dx} - \frac{2}{3} L\right) dx\,d\,d\,y + \left(\frac{dG}{dy} - \frac{1}{3}\frac{dI}{dx}\right) d\,x^3 +$$

$$\left(\frac{2}{3}\frac{dI}{dy} - \frac{2}{3}\frac{dL}{dx}\right) dx^2\,dy + \left(\frac{1}{3}\frac{dL}{dy} - \frac{dH}{dx}\right) d\,x\,d\,y^2 = 0$$

Donde ſe deduzem as ſeguintes Equações

$$C = 3\,\frac{dA}{dx}\,;\quad D = 3\,\frac{dB}{dy}\,;\quad E = 3\,\frac{dA}{dy}\,;\quad F = 3\,\frac{dB}{dx}\,;$$

$$G = \frac{1}{3}\,\frac{dC}{dx} = \frac{ddA}{dx^2}.\,;\quad H = \frac{1}{3}\,\frac{dD}{dy} = \frac{ddB}{dy^2}\,;\quad I = \frac{dF}{dx} = 3\,\frac{ddB}{dx^2}\,;$$

$$I = \frac{3}{2}\,\frac{dE}{dx} - \frac{1}{2}\,\frac{dC}{dy} = 3\,\frac{ddA}{dxdy}\,;\; I = \frac{3}{2}\,\frac{dC}{dy} - \frac{1}{2}\,\frac{dE}{dx} = 3\,\frac{ddA}{dxdy}\,;$$

$$L = \frac{3}{2}\,\frac{dD}{dx} - \frac{1}{2}\,\frac{dF}{dy} = 3\,\frac{ddB}{dxdy}\,;\quad L = \frac{dE}{dy} = 3\,\frac{ddA}{dy^2}\,;$$

$$L = \frac{3}{2}\,\frac{dF}{dy} - \frac{1}{2}\,\frac{dD}{dx} = 3\,\frac{ddB}{dxdy}\,;\; \frac{dI}{dx} = 3\,\frac{dG}{dy}\,;\; \frac{dL}{dx} = \frac{dI}{dy}\,;$$

$$\frac{dL}{dy} = 3\,\frac{dH}{dx}\,.$$

Das quaes as primeiras ſete, e a decima ſaõ juſtamente a 2.ª; 3.ª; 4.ª; 5.ª; 6.ª; 7.ª; 8.ª; e 9.ª das do §. antecedente. Reſta moſtrarmos como as Equações $\frac{dC}{dy} = \frac{dE}{dx} = \frac{dF}{dx}$, que rezultaõ das tres expreſſões de I, e as Equações $\frac{dD}{dx} = \frac{dE}{dy} = \frac{dF}{dy}$, que rezultaõ das tres expreſſões de L ſaõ equivalentes á Equaçaõ $\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$, ou como eſta ſe deduz d'ellas, e das outras antecedentes.

§. XXVIII.

Se multiplicarmos a primeira d'ellas por dx, e a terceira por dy ſommandoas teremos

$$dA = \frac{1}{3}\,C\,dx + \frac{1}{3}\,E\,dy$$

e ſe multiplicarmos a ſegunda por dy, e a quarta por dx, e as ſommarmos, teremos tambem

$dB =$

$$dB = \frac{1}{3} D\,dy + \frac{1}{3} F\,dx.$$

Pelo Methodo inverſo das Fluxões ſerá

$$A = \frac{1}{3}\int\left(C\,dx + E\,dy\right);\ \text{e}\ \ B = \int\left(D\,dy + F\,dx\right);$$

porém ſe determinarmos a Fluxaõ parcial de A ſuppondo ſómente y fluente, e a dividirmos por dy; e ſe determinarmos a Fluxaõ parcial de B ſuppondo ſómente x fluente, e a dividirmos por dx, teremos

$$\frac{dA}{dy} = \frac{1}{3}\int\left(\frac{dC}{dy}dx + \frac{dE}{dy}dy\right);\ \text{e}\ \ \frac{dB}{dx} = \frac{1}{3}\int\left(\frac{dD}{dx}dy + \frac{dF}{dx}dx\right);$$

mas he $\frac{dD}{dx} = \frac{dE}{dy}$; e $\frac{dF}{dx} = \frac{dC}{dy}$; logo $\frac{dB}{dx} = \frac{1}{3}\int\left(\frac{dC}{dy}dx + \frac{dE}{dy}dy\right)$;

e por conſequencia

$$\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}.$$

As ultimas tres expreſſões achadas pelas noſſas Formulas ſaõ conſequencias neceſſarias das precedentes; e por tanto naõ ſe podem conſiderar como condições deſtinctas d'ellas.

§. XXIX.

Seguindo os veſtigios de Euler, da meſma ſorte que em o §. XXVI, acharemos, que ſendo V huma Funcçaõ Fluxional da quarta ordem, e involvendo ſómente duas Fluentes primitivas x, e y, iſto he, ſendo

$$V = A\,d^4x + B\,d^4y + C\,dx\,d^3x + D\,dy\,d^3y + E\,dy\,d^3x$$
$$+ F\,dx\,d^3y + G\,ddx^2 + H\,ddy^2 + I\,dx^2\,ddx + L\,dy^2\,ddy$$
$$+ M\,dx\,dy\,ddx + N\,dx\,dy\,ddy + O\,ddx\,ddy$$

+

$$+ P\,dy^2 ddx + Q\,dx^2 ddy + R\,dx^4 + S\,dy^4 + T\,dy\,dx^3$$
$$+ U\,dx\,dy^3 + X\,dx^2 dy^2$$

para ſer Fluxaõ exacta de outra Funcçaõ da ordem o ſerá percizo, que os ſeus coefficientes ſatisfaçaõ ás ſeguintes Equações

$$\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx};\quad C = 4\frac{dA}{dx};\quad D = 4\frac{dB}{dy};\quad E = 4\frac{dA}{dy};\quad F = 4\frac{dB}{dx};$$

$$G = 3\frac{dA}{dx};\quad H = 3\frac{dB}{dy};\quad I = 6\frac{ddA}{dxdx};\quad L = 6\frac{ddB}{dydy};$$

$$M = 12\frac{ddA}{dxdy};\quad N = 12\frac{ddB}{dxdy};\quad O = 6\frac{dA}{dy};\quad P = 6\frac{ddA}{dydy};$$

$$Q = 6\frac{ddB}{dxdx};\quad R = \frac{d^3A}{dx^3};\quad S = \frac{d^3B}{dy^3};\quad T = 4\frac{d^3A}{dx^2dy};$$

$$U = 4\frac{d^3B}{dxdy^2};\quad X = 6\frac{d^3A}{dxdy^2}.$$

§. XXX.

Segundo porém o noſſo methodo as Equações, a que os coefficientes de dV devem ſatisfazer, ſaõ

$$N^{1\prime} - \frac{1}{4}dN^{2\prime} = 0$$

$$N^{2\prime} - \frac{2}{3}dN^{3\prime} = 0$$

$$P^{1\prime} - \frac{1}{4}dP^{2\prime} = 0$$

$$P^{2\prime} - \frac{2}{3}dP^{3\prime} = 0$$

e ſubſtituindo por $N^{1\prime}; N^{2\prime}; N^{3\prime}; P^{1\prime}; P^{2\prime}; P^{3\prime}$ os ſeus valores

tirados da Formula geral propofta, a primeira fe converterá em

$$\left(\frac{dA}{dx}-\frac{1}{4}C\right)d^4x+\left(\frac{dB}{dx}-\frac{1}{4}F\right)d^4y+\left(\frac{3}{4}\frac{dC}{dx}-\frac{1}{2}I\right)dxd^3x$$

$$+\left(\frac{dD}{dx}-\frac{1}{4}\frac{dF}{dy}-\frac{1}{4}N\right)dy\,d^3y+\left(\frac{dE}{dx}-\frac{1}{4}\frac{dC}{dy}-\frac{1}{4}M\right)dyd^3x$$

$$+\left(\frac{3}{4}\frac{dF}{dx}-\frac{1}{2}Q\right)dxd^3y+\left(\frac{dG}{dx}-\frac{1}{2}I\right)ddx^2+\left(\frac{dH}{dx}-\frac{1}{4}N\right)ddy^2$$

$$+\left(\frac{1}{2}\frac{dI}{dx}-3R\right)dx^2ddx+\left(\frac{dL}{dx}-\frac{1}{4}\frac{dN}{dy}-\frac{3}{4}U\right)dy^2ddy$$

$$+\left(\frac{3}{4}\frac{dM}{dx}-\frac{1}{2}\frac{dI}{dy}-\frac{3}{2}T\right)dxdyddx+\left(\frac{3}{4}\frac{dN}{dx}-\frac{1}{2}\frac{dQ}{dy}-X\right)dxdyddy$$

$$+\left(\frac{dO}{dx}-\frac{1}{4}M-\frac{1}{2}Q\right)ddxddy+\left(\frac{dP}{dx}-\frac{1}{4}\frac{dM}{dy}-\frac{1}{2}X\right)dy^2ddx$$

$$+\left(\frac{1}{2}\frac{dQ}{dx}-\frac{3}{4}T\right)dx^2ddy+\left(\frac{dS}{dx}-\frac{1}{4}\frac{dU}{dy}\right)dy^4+\left(\frac{1}{4}\frac{dT}{dx}-\frac{dR}{dy}\right)dydx^3$$

$$+\left(\frac{3}{4}\frac{dU}{dx}-\frac{1}{2}\frac{dX}{dy}\right)dxdy^3+\left(\frac{1}{2}\frac{dX}{dx}-\frac{3}{4}\frac{dT}{dy}\right)dx^2dy^2=0$$

a fegunda em

$$\left(C-\frac{4}{3}G\right)d^3x+\left(F-\frac{2}{3}O\right)d^3y+\left(\frac{2}{3}I-\frac{4}{3}\frac{dG}{dx}\right)dxddx$$

$$+\left(N-\frac{4}{3}P-\frac{2}{3}\frac{dO}{dy}\right)dyddy+\left(2Q-\frac{2}{3}M-\frac{2}{3}\frac{dO}{dx}\right)dxddy$$

$$+\left(\frac{1}{3}M-\frac{4}{3}\frac{dG}{dy}\right)dyddx+\left(4R-\frac{2}{3}\frac{dI}{dx}\right)dx^3+\left(U-\frac{2}{3}\frac{dP}{dy}\right)dy^3$$

$$+\left(3T-\frac{2}{3}\frac{dI}{dy}-\frac{2}{3}\frac{dM}{dx}\right)dx^2dy+\left(2X-\frac{2}{3}\frac{dP}{dx}-\frac{2}{3}\frac{dM}{dy}\right)dxdy^2=0$$

a terceira em

$\Big(\frac{dA}{dy}$

$$\left(\frac{dA}{dy}-\frac{1}{4}E\right)d^4x+\left(\frac{dB}{dy}-\frac{1}{4}D\right)d^4y+\left(\frac{3}{4}\frac{dD}{dy}-\frac{1}{2}L\right)dy\,d^3y$$

$$+\left(\frac{dC}{dy}-\frac{1}{4}\frac{dE}{dx}-\frac{1}{4}M\right)dx\,d^3x+\left(\frac{dF}{dy}-\frac{1}{4}\frac{dD}{dx}-\frac{1}{4}N\right)dx\,d^3y$$

$$+\left(\frac{3}{4}\frac{dE}{dy}-\frac{1}{2}P\right)dy\,d^3x+\left(\frac{dG}{dy}-\frac{1}{4}M\right)ddx^2+\left(\frac{dH}{dy}-\frac{1}{2}L\right)ddy^2$$

$$+\left(\frac{dI}{dy}-\frac{1}{4}\frac{dM}{dx}-\frac{3}{4}T\right)dx^2ddx+\left(\frac{1}{2}\frac{dL}{dy}-3S\right)dy^2ddy$$

$$+\left(\frac{3}{4}\frac{dM}{dy}-\frac{1}{2}\frac{dP}{dx}-X\right)dxdyddx+\left(\frac{3}{4}\frac{dN}{dy}-\frac{1}{2}\frac{dL}{dx}-\frac{3}{2}U\right)dxdyddy$$

$$+\left(\frac{dO}{dy}-\frac{1}{4}N-\frac{1}{2}P\right)ddxddy+\left(\frac{dQ}{dy}-\frac{1}{4}\frac{dN}{dx}-\frac{1}{2}X\right)dx^2ddy$$

$$+\left(\frac{1}{2}\frac{dP}{dy}-\frac{3}{4}U\right)dy^2ddx+\left(\frac{dR}{dy}-\frac{1}{4}\frac{dT}{dx}\right)dx^4+\left(\frac{3}{4}\frac{dT}{dy}-\frac{1}{2}\frac{dX}{dx}\right)dydx^3$$

$$+\left(\frac{1}{4}\frac{dU}{dy}-\frac{dS}{dx}\right)dx\,dy^3+\left(\frac{1}{2}\frac{dX}{dy}-\frac{3}{4}\frac{dU}{dx}\right)dxdy^2=0$$

E a quarta em

$$\left(D-\frac{4}{3}H\right)d^3y+\left(E-\frac{2}{3}O\right)d^3x+\left(\frac{2}{3}L-\frac{4}{3}\frac{dH}{dy}\right)dy\,ddy$$

$$+\left(M-\frac{4}{3}Q-\frac{2}{3}\frac{dO}{dx}\right)dx\,ddx+\left(2P-\frac{2}{3}N-\frac{2}{3}\frac{dO}{dy}\right)dy\,ddx$$

$$+\left(\frac{1}{3}N-\frac{4}{3}\frac{dH}{dx}\right)dx\,ddy+\left(4S-\frac{2}{3}\frac{dL}{dy}\right)dy^3+\left(T-\frac{2}{3}\frac{dQ}{dx}\right)dx^3$$

$$+\left(3U-\frac{2}{3}\frac{dL}{dx}-\frac{2}{3}\frac{dN}{dy}\right)dxdy^2+\left(2X-\frac{2}{3}\frac{dN}{dx}-\frac{2}{3}\frac{dC}{dy}\right)dx^2dy=0$$

Das quaes ſe deduzem com ſumma facilidade todas as do §. XXIX ; mas que ao meſmo tempo daõ muitas outras ſuperabundantes.

§. XXXI.

§. XXXI.

Se continuaſſemos a confrontar as Equações de condiçaõ, a que o noſſo methodo conduz, com as que o methodo de *Euler* dá para as Formulas das outras ordens, continuariamos a encontrar a meſma conformidade entre os rezultados de hum e outro; mas tambem continuariamos a obſervar, que quanto maior for o expoente da ordem fluxional, tanto maior ſerá o numero das Equações ſuperabundantes, a que pelo noſſo ſeremos conduzidos: o que de algum modo autoriza a ſuſpeita, de que elle poſſa ainda admittir baſtante ſimplificaçaõ.

§. XXXII.

Se reflectirmos, que o numero das Equações particulares, em que ſe rezolvem as noſſas

$$N'' - \frac{1}{n} dN^{2\prime} = 0$$

$$P'' - \frac{1}{n} dP^{2\prime} = 0$$

&c.

he ſempre maior que $k + \frac{\lambda(\lambda - 3)}{1 \cdot 2}$, e que nellas entraõ todas as Fluxões parciaes primeiras de todos os coefficientes de V, e aſſim meſmo todos os coefficientes dos termos da meſma Funcçaõ, em que ha Fluxões primeiras de qualquer fluente primitiva, facilmente comprehenderemos, que d'ellas ſe podem ſempre deduzir, ou ſeja immediatamente, ou ſeja por meio de eliminações, e do Methodo inverſo das Fluxões, todas as Equações de condiçaõ, a que ſeriamos conduzidos ſeguindo os principios de Euler, ſem que ſeja neceſſario conhecer primeiro as Equações relativas aos gráos precedentes.

§. XXXIII.

§. XXXIII.

Querendo por exemplo as Equações de condiçaõ relativas ás Fluxões da quarta ordem das Funcções que involvem sómente duas fluentes, substituindo em as Equações

$$N^{1'} - \frac{1}{n} dN^{2'} = 0$$

$$P^{1'} - \frac{1}{n} dP^{2'} = 0$$

os valores de $N^{1'}$; $N^{2'}$; $P^{1'}$; e $P^{2'}$; tirados da fórmula geral das Fluxões da dita ordem acharemos a primeira e terceira das quatro Equações do §. XXX, das quaes procedendo segundo a ordem alfabetica, e fazendo as substituições convenientes tiraremos immediatamente as seguintes Equações

$$C = 4\frac{dA}{dx};\ D = 4\frac{dB}{dy};\ E = 4\frac{dA}{dy};\ F = 4\frac{dB}{dx};\ I = 6\frac{ddA}{dx^2};$$

$$I = 2\frac{dG}{dy};\ L = 6\frac{ddB}{dy^2};\ L = 2\frac{dH}{dy};\ M = 12\frac{ddA}{dxdy};\ M = 4\frac{dG}{dy};$$

$$N = 12\frac{ddB}{dxdy};\ N = 4\frac{dH}{dx};\ P = 6\frac{ddA}{dy^2};\ P = 2\frac{dO}{dy} - 6\frac{ddB'}{dxdy};$$

$$Q = 6\frac{ddB}{dx^2};\ Q = 2\frac{dO}{dx} - 6\frac{ddA}{dxdy};\ R = \frac{d^3A}{dx^3};\ S = \frac{d^3B}{dy^3};$$

$$T = 4\frac{d^3B}{dx^3};\ T = 4\frac{d^3A}{dx^2dy};\ U = 4\frac{d^3B}{dxdy^2};\ U = 4\frac{d^3A}{dy^3};\ X = 6\frac{d^3B}{dx^2dy};$$

$$X = 6\frac{d^3A}{dxdy^2}.$$

Nas quaes se achaõ incluidas todas as do §. XXIX menos a 1ª, a 6ª, a 7ª, e a 12ª; porém igualando os dois valores de X, os dois de U, e os dois de T, teremos

$$\frac{d^3A}{dxdy^2}=\frac{d^3B}{dx^2dy};\quad \frac{d^3A}{dy^3}=\frac{d^3B}{dxdy^2};\quad \frac{d^3A}{dx^2dy}=\frac{d^3B}{dx^3};$$

multiplicando a primeira d'eftas Equações por dx, a fegunda por dy, fomando-as, e applicando-lhe o Methodo inverfo das Fluxões teremos

$$\frac{ddA}{dy^2}=\frac{ddB}{dxdy},$$

e multiplicando a primeira por dy, e a terceira por dx fommando-as, e applicando-lhe o Methodo inverfo das Fluxões teremos

$$\frac{ddA}{dxdy}=\frac{ddB}{dx^2}.$$

Se multiplicarmos a primeira d'eftas duas novas Equações por dy, e a fegunda por dx, e as fommarmos, e lhe applicarmos o Methodo Inverfo das Fluxões teremos por ultimo rezultado

$$\frac{dA}{dy}=\frac{dB}{dx}.$$

Igualando os dois valores de Q, e os dois valores de P, teremos

$$\frac{dO}{dx}=3\frac{ddA}{dxdy}+3\frac{ddB}{dx^2}=6\frac{ddA}{dxdy}$$

$$\frac{dO}{dy}=3\frac{ddA}{dy^2}+3\frac{ddB}{dydx}=6\frac{ddA}{dy^2}$$

Equações das quaes fe deduz $dO=6d\frac{dA}{dy}$; e por confequencia uzando do Methodo inverfo das Fluxões

$$O=6\frac{dA}{dy}=6\frac{dB}{dx}$$

Da

Da mesma sorte igualando os dois valores de N, e os dois valores de L, e procedendo por hum modo analogo se achará

$$H = 3 \frac{dB}{dy}.$$

Assim como tambem igualando os dois valores de M, e os dois valores de I, e procedendo da mesma maneira se achará

$$G = 3 \frac{dA}{dx},$$

que saõ justamente as Equações que faltavaõ para completar as do §. XXIX.

§. XXXIV.

D'aqui podemos concluir, que uzando sómente da primeira Equaçaõ de cada serie das do §. X podemos em todos os cazos verificar se a Funcçaõ Fluxional proposta V he ou naõ Fluxaõ exacta de alguma Funcçaõ da ordem o: porém esta indagaçaõ por semelhante modo pede de ordinario na prática, sendo $n > 3$, tanta attençaõ, e tantas combinações, que a simplificaçaõ exposta em o §. XXIV, me parece preferivel, e por tanto julgo desnecessario entrar aqui em maior explicaçaõ a este respeito.

§. XXXV.

Até aqui naõ temos supposto, que na Funcçaõ proposta V houvesse Fluxaõ alguma constante; mas havendo-a, nesse cazo para reconhecer se a dita Funcçaõ he ou naõ Fluxaõ exacta de alguma Funcçaõ da ordem o, basta, como adverte M. de Condorcet, que os coefficientes de dV satisfaçaõ ás series de Equações de condiçaõ do §. X relativas ás variaveis primitivas, cujas Fluxões forem tambem Fluentes.

O

O ſobredito Geometra deduz eſta propoſiçaõ como huma conſequencia immediata da analyſe dos quatro primeiros Problemas do ſeu *Calculo Integral* ; mas baſta por ventura ſeguir a dita analyſe para ſe conhecer demonſtrativamente a verdade da dita propoſiçaõ? O fim a que por aquella analyſe ſe caminha em o Problema quarto he, ſe naõ me engano, buſcar as relações, que neceſſariamente devem ligar entre ſi as quantidades N''; $N^{2\prime}$; $N^{3\prime}$; &c. P''; $P^{2\prime}$; $P^{3\prime}$; &c. &c. no cazo de ſer V Fluxaõ exacta de huma Funcçaõ da ordem o ; mas a ſuppoſiçaõ de huma Fluxaõ primeira conſtante, por exemplo dy, naõ faz que eſta Fluxaõ naõ exiſta em V, como exiſtiria ſe naõ foſſe conſtante, e ſendo $P^{2\prime} = \frac{dV}{ddy}$ he bem viſivel, que de ſer $ddy = o$ ſe naõ ſegue ſer $P^{2\prime} = o$. Ora nós temos demonſtrado, que ſendo V Fluxaõ exacta de huma Funcçaõ da ordem o, $P^{2\prime}$ deve ter com P'' a relaçaõ, que exprime a Equaçaõ $P'' - \frac{1}{n} dP^{2\prime} = o$; logo parece, que quando ſe determina a Fluxaõ de V com o fim de extrahir d'ella os valores de N''; $N^{2\prime}$; $N^{3\prime}$; &c. ſe deve proceder a eſte calculo de maneira, que da expreſſaõ de dV ſe poſſaõ tambem extrahir P''; e $P^{2\prime}$: iſto he; parece, que neſte calculo ſenaõ deve reputar dy como conſtante; mas ſim taõ ſómente na expreſſaõ de $P^{2\prime}$, fazendo $ddy = o$; pois que de outra maneira ſe omitiria aquella Equaçaõ $P'' - \frac{1}{n} dP^{2\prime} = o$, á qual V deve inconteſtavelmente ſatisfazer, ſe for Fluxaõ exacta de alguma Funcçaõ da ordem o. E moſtra por ventura evidentemente a analyſe de M. de Condorcet a ſuperabundancia d'eſta Equaçaõ?

§. XXXVI.

Ainda que ella naõ ſeja de abſoluta neceſſidade no ca-

cazo de que se trata, com tudo he igualmente verdadeira, e servirá sempre para abreviar, e simplificar a sobredita indagaçaõ; pois huma vez admitida, em vez de precizarmos verificar todas as Equaçóes de condiçaõ relativas a cada huma das outras Fluentes primitivas, bastará que verifiquemos metade, sendo n numero par, e metade de todas menos huma, sendo n numero impar. A demonstraçaõ d'esta Proposiçaõ se deriva dos mesmos principios expostos em os §§. XXIII, e XXIV; mas para maior clareza, circunstancia que dezejára naõ faltasse jámais em meus escritos, e de que parece que alguns Geometras fugiraõ de proposito, juntarei hum exemplo, em que procederei por dois differentes caminhos á indagaçaõ, de que se trata.

§. XXXVII.

Seja por exemplo V huma Funcçaõ Fluxional da quarta ordem, que involva sómente duas variaveis, e em que dy seja constante. A sua fórmula geral naõ defirirá da fórmula geral transcrita em o §. XXIX senaõ em naõ ter nenhum dos termos, em que entraõ ddy, d^3y, e d^4y; por tanto será

$$V = Ad^4x + Cdxd^3x + Edyd^3x + Gddx^2 + Idx^2ddx + Mdxdyddx$$
$$+ Pdy^2ddx + Rdx^4 + Sdy^4 + Tdydx^3 + Udxdy^3 + Xdx^2dy^2.$$

e as condiçóes, que determinaõ os coefficientes aqui expressos, seraõ as mesmas do §. XXIX, com a differença de serem todas expressadas em Fluxóes parciaes de A; o que se conseguirá substituindo $\int \frac{dA}{dy} dx$ em lugar de B. Por este modo teremos, que as condiçóes necessarias no prezente cazo, para que V seja Fluxaõ exacta de huma Funcçaõ da ordem o, seraõ

$$C = 4\frac{dA}{dx};\ E = 4\frac{dA}{dy};\ G = 3\frac{dA}{dx};\ I = 6\frac{ddA}{dxdx};\ M = 12\frac{ddA}{dxdy};$$

 $P = 6$

$$P = 6\frac{ddA}{dydy};\ R = \frac{d^3A}{dx^3};\ T = 4\frac{d^3A}{dydx^2};\ U = 4\frac{d^3A}{dy^3};\ X = 6\frac{d^3A}{dxdy^2};$$

$$S = \int \frac{d^4A}{dy^4} dx;\ \text{ou}\ \frac{dS}{dx} = \frac{d^4A}{dy^4}$$

§. XXXVIII.

Segundo a regra expofta (§. XXXIII.) as noffas Equações de condiçaõ faõ

$$\overset{1'}{N} - \frac{1}{4} d\overset{2'}{N} = 0$$

$$\overset{2'}{N} - \frac{2}{3} d\overset{3'}{N} = 0$$

$$\overset{1'}{P} - \frac{1}{4} d\overset{2'}{P} = 0$$

as quaes, fubftituindo por $\overset{1'}{N}$; $\overset{2'}{N}$; $\overset{3'}{N}$; $\overset{1'}{P}$; e $\overset{2'}{P}$; os feus valores tirados de dV, fe converteraõ a primeira em

$$\left(\frac{dA}{dx} - \frac{1}{4}C\right)d^4x + \left(\frac{3}{4}\frac{dC}{dx} - \frac{1}{2}I\right)dxd^3x + \left(\frac{dE}{dx} - \frac{1}{4}\frac{dC}{dy} - \frac{1}{4}M\right)dyd^3x$$

$$+\left(\frac{dG}{dx} - \frac{1}{2}I\right)ddx^2 + \left(\frac{1}{2}\frac{dI}{dx} - 3R\right)dx^2ddx + \left(\frac{dP}{dx} - \frac{1}{4}\frac{dM}{dy} - \frac{1}{2}X\right)dy^2ddx$$

$$+\left(\frac{3}{4}\frac{dM}{dx} - \frac{1}{2}\frac{dI}{dy} - \frac{3}{2}T\right)dxdyddx + \left(\frac{dS}{dx} - \frac{1}{4}\frac{dU}{dy}\right)dy^4 +$$

$$\left(\frac{1}{4}\frac{dT}{dx} - \frac{dR}{dy}\right)dydx^3 + \left(\frac{3}{4}\frac{dU}{dx} - \frac{1}{2}\frac{dX}{dy}\right)dxdy^3 + \left(\frac{1}{2}\frac{dX}{dx} - \frac{3}{4}\frac{dT}{dy}\right)dx^2dy^2 = 0$$

A fegunda em

$$\left(C - \frac{4}{3}G\right)d^3x + \left(\frac{2}{3}I - \frac{4}{3}\frac{dG}{dx}\right)dxddx + \left(\frac{1}{3}M - \frac{4}{3}\frac{dG}{dy}\right)dyddx$$

$$+\left(3T - \frac{2}{3}\frac{dI}{dy} - \frac{2}{3}\frac{dM}{dx}\right)dx^2dy + \left(2X - \frac{2}{3}\frac{dP}{dx} - \frac{2}{3}\frac{dM}{dy}\right)dxdy^2$$

$$+\left(4R - \frac{2}{3}\frac{dI}{dx}\right)dx^3 + \left(U - \frac{2}{3}\frac{dP}{dy}\right)dy^3 = 0$$

a terceira em

$$\left(\frac{dA}{dy}-\frac{1}{4}E\right)d^4x+\left(\frac{3}{4}\frac{dE}{dy}-\frac{1}{2}P\right)dyd^3x+\left(\frac{dC}{dy}-\frac{1dE}{4dx}-\frac{1}{4}M\right)dxd^3x$$

$$+\left(\frac{dG}{dy}-\frac{1}{4}M\right)ddx^2+\left(\frac{1dP}{2dy}-\frac{3}{4}U\right)dy^2ddx+\left(\frac{dI}{dy}-\frac{1dM}{4dx}-\frac{3}{4}T\right)dx^2ddx$$

$$+\left(\frac{dR}{dy}-\frac{1dT}{4dx}\right)dx^4+\left(\frac{3}{4}\frac{dM}{dy}-\frac{1dP}{2dx}-X\right)dxdyddx+\left(\frac{1dU}{4dy}-\frac{dS}{dx}\right)dxdy^3$$

$$+\left(\frac{3}{4}\frac{dT}{dy}-\frac{1}{2}\frac{dX}{dx}\right)dydx^3+\left(\frac{1}{2}\frac{dX}{dy}-\frac{3}{4}\frac{dU}{dx}\right)dx^2dy^2=0$$

Equações de que ſe tiraõ, como he viſivel, com ſumma facilidade todas as que acima determinamos: advertindo que pela regra de M. de Condorcet ſeria precizo empregarmos todas as Equações relativas á variavel x; e poſto que no prezente cazo eſta ventagem ſeja pouco notavel, ella o ſerá tanto mais quanto maior for o numero das variaveis, que entrarem em V, e quanto mais alto for o expoente da ſua ordem Fluxional,

§. XXXIX.

O Theorema geral reprezentado pelas formulas geraes do §. XVII. abrange em toda a ſua extençaõ a Theorica das Equações de condiçaõ das Funcções Fluxionaes, que ſaõ Fluxões exactas de outra alguma Funcçaõ de qualquer ordem inferior; porém como ha muitas, que naõ o ſendo ſe tornaõ taes logo que ſejaõ multiplicadas por factores convenientes para eſſe effeito, para completar a Theorica geral das Equações de condiçaõ paſſaremos a determinar as condições d'eſte ſegundo genero de Funcções Fluxionaes.

SEC-

SECÇAÕ III.

Das Equações de condiçaõ das Funcções Fluxionaes, que naõ sendo Fluxões exactas se podem reduzir a que o sejaõ sendo multiplicadas por Factores convenientes.

§. XL.

SEja $V=0$ huma Equaçaõ Fluxional de qualquer ordem n, e de qualquer numero de variaveis, tal porém que se reconheça naõ ser V Fluxaõ exacta de nenhuma Funcçaõ de ordem inferior, mas que sendo multiplicada por hum factor conveniente P fique sendo Fluxaõ exacta de huma Funcçaõ B da ordem o, isto he, fique sendo

$$PV=d^{n}B.$$

Determinando a Fluxaõ de V temos

$$\begin{aligned} dV= & N^{1\prime}dx+N^{2\prime}dp+N^{3\prime}dp'+N^{4\prime}dp''+N^{5\prime}dp'''+\&c. \\ & +P^{1\prime}dy+P^{2\prime}dq+P^{3\prime}dq'+P^{4\prime}dq''+P^{5\prime}dq'''+\&c. \\ & +\&c. \end{aligned}$$

e suppondo que seja

$$\begin{aligned} dP= & M^{1\prime}dx+M^{2\prime}dp+M^{3\prime}dp'+M^{4\prime}dp''+M^{5\prime}dp'''+\&c. \\ & +L^{1\prime}dy+L^{2\prime}dq+L^{3\prime}dq'+L^{4\prime}dq''+L^{5\prime}dq'''+\&c. \\ & +\&c. \end{aligned}$$

será

$$\begin{aligned} d(PV)= & \left(PN^{1\prime}+VM^{1\prime}\right)dx+\left(PN^{2\prime}+VM^{2\prime}\right)dp+\left(PN^{3\prime}+VM^{3\prime}\right)dp'+\&c. \\ & +\left(PP^{1\prime}+VL^{1\prime}\right)dy+\left(PP^{2\prime}+VL^{2\prime}\right)dq+\left(PP^{3\prime}+VL^{3\prime}\right)dq'+\&c. \\ & +\&c. \end{aligned}$$

por

por tanto devendo ser PV Fluxaõ exacta de huma Funcçaõ da ordem o os coefficientes de $d(PV)$ devem satisfazer a todas as Equações de condiçaõ do §. X, e assim devemos ter a serie de Equações de condiçaõ

$$\left(N^{1'}-\frac{1}{n}dN^{2'}\right)P-\frac{1}{n}N^{2'}dP+\left(M^{1'}-\frac{1}{n}dM^{2'}\right)V-\frac{1}{n}M^{2'}dV=0$$

$$\left(N^{2'}-\frac{2}{n-1}dN^{3'}\right)P-\frac{2}{n-1}N^{3'}dP+\left(M^{2'}-\frac{2}{n-1}dM^{3'}\right)V-\frac{2}{n-1}M^{3'}dV=0$$

$$\left(N^{3'}-\frac{3}{n-2}dN^{4'}\right)P-\frac{3}{n-2}N^{4'}dP+\left(M^{3'}-\frac{3}{n-2}dM^{4'}\right)V-\frac{3}{n-2}M^{4'}dV=0$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - -
- - - - - - - - - - - - - - - - - - -
- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$\left(N^{(n-2)'}-\frac{n-2}{3}dN^{(n-1)'}\right)P-\frac{n-2}{3}N^{(n-1)'}dP+\left(M^{(n-2)'}-\frac{n-2}{3}dM^{(n-1)'}\right)V$$
$$-\frac{n-2}{3}M^{(n-1)'}dV=0$$

$$\left(N^{(n-1)'}-\frac{n-1}{2}dN^{n'}\right)P-\frac{n-1}{2}N^{n'}dP+\left(M^{(n-1)'}-\frac{n-1}{2}dM^{n'}\right)V$$
$$-\frac{n-1}{2}M^{n'}dV=0$$

$$\left(N^{n'}-\frac{n}{1}dN^{(n+1)'}\right)P-\frac{n}{1}N^{(n+1)'}dP+\left(M^{n'}-\frac{n}{1}dM^{(n+1)'}\right)V$$
$$-\frac{n}{1}M^{(n+1)'}dV=0$$

relativa á variavel x: a serie

$$\left(P^{1'}-\frac{1}{n}dP^{2'}\right)P-\frac{1}{n}P^{2'}dP+\left(L^{1'}-\frac{1}{n}dL^{2'}\right)V-\frac{1}{n}L^{2'}dV=0$$

$$\left(P^{2'}-\frac{2}{n-1}dP^{3'}\right)P-\frac{2}{n-1}P^{3'}dP+\left(L^{2'}-\frac{2}{n-1}dL^{3'}\right)V-\frac{2}{n-1}L^{3'}dV=0$$

$$\left(P^{3'}-\frac{3}{n-2}dP^{4'}\right)P-\frac{3}{n-2}P^{4'}dP+\left(L^{3'}-\frac{3}{n-2}dL^{4'}\right)V-\frac{3}{n-2}L^{4'}dV=0$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$\left(P^{(n-2)'}-\frac{n-2}{3}dP^{(n-1)'}\right)P-\frac{n-2}{3}P^{(n-1)'}dP+\left(L^{(n-2)'}-\frac{n-2}{3}dL^{(n-1)'}\right)V$$
$$-\frac{n-2}{3}L^{(n-1)'}dV=0$$

$$\left(P^{(n-1)'}-\frac{n-1}{2}dP^{n'}\right)P-\frac{n-1}{2}P^{n'}dP+\left(L^{(n-1)'}-\frac{n-1}{2}dL^{n'}\right)V$$
$$-\frac{n-1}{2}L^{n'}dV=0$$

$$\left(P^{n'}-\frac{n}{1}dP^{(n+1)'}\right)P-\frac{n}{1}P^{(n+1)'}dP+\left(L^{n'}-\frac{n}{1}dL^{(n+1)'}\right)V$$
$$-\frac{n}{1}L^{(n+1)'}dV=0$$

relativa á variavel y; e huma ſerie ſemelhante relativa a cada huma das outras variaveis primitivas.

§. XLI.

Attendendo porém a que he $V=0$, e $dV=0$; a primeira d'eſtas ſeries ſe reduz a

$$\left(N^{1'}-\frac{1}{n}dN^{2'}\right)P-\frac{1}{n}N^{2'}dP=0$$

$$\left(N^{2'}-\frac{2}{n-1}dN^{3'}\right)P-\frac{2}{n-1}N^{3'}dP=0$$

$(N^{3'}$

$$\left(N^{3'} - \frac{3}{n-2}\,dN^{4'}\right)P - \frac{3}{n-2}\,N^{4'}dP = 0$$

- - - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - - -

$$\left(N^{(n-2)'} - \frac{n-2}{3}\,dN^{(n-1)'}\right)P - \frac{n-2}{3}\,N^{(n-1)'}dP = 0$$

$$\left(N^{(n-1)'} - \frac{n-1}{2}\,dN^{n'}\right)P - \frac{n-1}{2}\,N^{n'}dP = 0$$

$$\left(N^{n'} - \frac{n}{1}\,dN^{(n+1)'}\right)P - \frac{n}{1}\,N^{(n+1)'}dP = 0$$

A ſegunda a

$$\left(P^{1'} - \frac{1}{n}\,dP^{2'}\right)P - \frac{1}{n}\,P^{2'}dP = 0$$

$$\left(P^{2'} - \frac{2}{n-1}\,dP^{3'}\right)P - \frac{2}{n-1}\,P^{3'}dP = 0$$

$$\left(P^{3'} - \frac{3}{n-2}\,dP^{4'}\right)P - \frac{3}{n-2}\,P^{4'}dP = 0$$

- - - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - - -

$$\left(P^{(n-2)'} - \frac{n-2}{3}\,dP^{(n-1)'}\right)P - \frac{n-2}{3}\,P^{(n-1)'}dP = 0$$

$$\left(P^{(n-1)'} - \frac{n-1}{2}\,dP^{n'}\right)P - \frac{n-1}{2}\,P^{n'}dP = 0$$

$$\left(P^{n'} - \frac{n}{1}\,dP^{(n+1)'}\right)P - \frac{n}{1}\,P^{(n+1)'}dP = 0$$

e aſſim ſemelhantemente todas as outras.

§. XLII.

§. XLII.

Eliminando de todas eſtas Equações $\frac{dP}{p}$, ſe combinaſſemos todos os valores de $\frac{dP}{p}$, que ſe podem d'ellas tirar, teriamos (ſendo λ o numero das variaveis primitivas, que entraõ em V) hum numero $\frac{\lambda n(\lambda n-1)}{2}$ de Equações, a que os coefficientes de dV ſatisfaraõ todas as vezes que a Funcçaõ V, ſendo multiplicada por hum factor conveniente, ſe poder reduzir a ſer Fluxaõ exacta da ordem fluxional n; porém ſe reflectirmos, que igualando quaeſquer dos ditos valores com cada hum dos outros ſucceſſivamente todas as mais igualdades, que entre eſtes ſe podem eſtabelecer, ſaõ conſequencias neceſſarias d'aquellas, e que por tanto ſe naõ podem contemplar como condições differentes, veremos que o numero total das condições realmente differentes em vez de ſer $\frac{\lambda n(\lambda n-1)}{2}$ ſerá ſimpleſmente $\lambda n-1$. A eſcolha d'eſtas $\lambda n-1$ Equações de condiçaõ rigorozamente differentes tiradas das $\frac{\lambda n(\lambda n-1)}{2}$, que a analyze nos facilita, he arbitraria; porém ſendo ao meſmo tempo conveniente e elegante que ellas ſejaõ as mais faceis de calcular, e que tenhaõ entre ſi alguma lei de ſucceſſaõ facil de notar, nós as eſcolheremos pela maneira ſeguinte.

$$nN^{(n+1)'}\left(2N^{(n-1)'}-(n-1)dN^{n'}\right)-(n-1)N^{n'}\left(N^{n'}-ndN^{(n+1)'}\right)=0$$

$$nN^{(n+1)'}\left(3N^{(n-2)'}-(n-2)dN^{(n-1)'}\right)-(n-2)N^{(n-1)'}\left(N^{n'}-ndN^{(n+1)'}\right)=0$$

$$nN^{(n+1)'}\left(4N^{(n-3)'}-(n-3)dN^{(n-2)'}\right)-(n-3)N^{(n-2)'}\left(N^{n'}-ndN^{(n+1)'}\right)=0$$

$nN^{(n+1)'}$

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$nN^{(n+1)'}\left((n-2)N^{3'}-3dN^{4'}\right)-3N^{4'}\left(N^{n'}-ndN^{(n+1)'}\right)=0$$

$$nN^{(n+1)'}\left((n-1)N^{2'}-2dN^{3'}\right)-2N^{3'}\left(N^{n'}-ndN^{(n+1)'}\right)=0$$

$$nN^{(n+1)'}\left(nN^{1'}-dN^{2'}\right)-N^{2'}\left(N^{n'}-ndN^{(n+1)'}\right)=0$$

$$N^{(n+1)'}\left(P^{n'}-ndP^{(n+1)'}\right)-P^{(n+1)'}\left(N^{n'}-ndN^{(n+1)'}\right)=0$$

$$nP^{(n+1)'}\left(2P^{(n-1)'}-(n-1)dP^{n}\right)-(n-1)P^{n'}\left(P^{n'}-ndP^{(n+1)'}\right)=0$$

$$nP^{(n+1)'}\left(3P^{(n-2)'}-(n-2)dP^{(n-1)'}\right)-(n-2)P^{(n-1)'}\left(P^{n'}-ndP^{(n+1)'}\right)=0$$

$$nP^{(n+1)'}\left(4P^{(n-3)'}-(n-3)dP^{(n-2)'}\right)-(n-3)P^{(n-2)'}\left(P^{n'}-ndP^{(n+1)'}\right)=0$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$nP^{(n+1)'}\left((n-2)P^{3'}-3dP^{4'}\right)-3P^{4'}\left(P^{n'}-ndP^{(n+1)'}\right)=0$$

$$nP^{(n+1)'}\left((n-1)P^{2'}-2dP^{3'}\right)-2P^{3'}\left(P^{n'}-ndP^{(n+1)'}\right)=0$$

$$nP^{(n+1)'}\left(nP^{1'}-dP^{2'}\right)-P^{2'}\left(P^{n'}-ndP^{(n+1)'}\right)=0$$

&c. &c.

§. XLIII.

Se a Funcçaõ propoſta V naõ ſatisfizer a eſtas Equa-

 çóes

çóes de condiçaõ deveremos examinar se multiplicandoa por hum factor conveniente P se poderá redusir a ser Fluxaõ exacta de huma Funcçaõ Fluxional da primeira ordem, e como neste cazo os coefficientes de $d(PV)$ devem satisfazer ás condiçóes do §. XIV, applicando-lhe o Theorema por ellas expressado, e attendendo a que $V=0$; $dV=0$, e $ddV=0$, acharemos que elles devem satisfazer ás seguintes series de Equaçóes de condiçaõ, a primeira

$$\left(N^{1'} - 2\,\frac{1}{n}\,dN^{2'} + \frac{1.2}{n(n-1)}\,ddN^{3'}\right)P - 2\,\frac{1}{n}\left(N^{2'} - \frac{2}{n-1}\,dN^{3'}\right)dP$$
$$+ \frac{1.2}{n(n-1)}\,N^{3'}\,ddP = 0$$

$$\left(N^{2'} - 2\,\frac{2}{n-1}\,dN^{3'} + \frac{2.3}{(n-1)(n-2)}\,ddN^{4'}\right)P - 2\,\frac{2}{n-1}\left(N^{3'} -\right.$$
$$\left.\frac{3}{n-2}\,dN^{4'}\right)dP + \frac{2.3}{(n-1)(n-2)}\,N^{4'}\,ddP = 0$$

$$\left(N^{3'} - 2\,\frac{3}{n-2}\,dN^{4'} + \frac{3.4}{(n-2)(n-3)}\,ddN^{5'}\right)P - 2\,\frac{3}{n-2}\left(N^{4'} -\right.$$
$$\left.\frac{4}{n-3}\,dN^{5'}\right)dP + \frac{3.4}{(n-2)(n-3)}\,N^{5'}\,ddP = 0$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$\left(N^{(n-3)'} - 2\,\frac{n-3}{4}\,dN^{(n-2)'} + \frac{(n-2)(n-3)}{3.4}\,ddN^{(n-1)'}\right)P -$$
$$2\,\frac{n-3}{4}\left(N^{(n-2)'} - \frac{n-2}{3}\,dN^{(n-1)'}\right)dP + \frac{(n-2)(n-3)}{3.4}\,N^{(n-1)'}\,ddP = 0$$

$$\left(N^{(n-2)'} - 2\,\frac{n-2}{3}\,dN^{(n-1)'} + \frac{(n-1)(n-2)}{2.3}\,ddN^{n'}\right)P -$$

$2\,\frac{n-2}{3}$

$$2\,\frac{n-2}{3}\left(N^{(n-1)'}-\frac{n-1}{2}dN^{n'}\right)dP+\frac{(n-1)(n-2)}{2.\,3}N^{n'}ddP=0$$

$$\left(N^{(n-1)'}-2\,\frac{n-1}{2}\,dN^{n'}+\frac{n\,(n-1)}{1.\,2}\,ddN^{(n+1)'}\right)P-2\,\frac{n-1}{2}\left(N^{n'}-\right.$$

$$\left.\frac{n}{1}dN^{(n+1)'}\right)dP+\frac{n.(n-1)}{1.\,2}N^{(n+1)'}ddP=0$$

relativa á variavel x: a segunda

$$\left(P^{1'}-2\,\frac{1}{n}\,dP^{2'}+\frac{1.\,2}{n(n-1)}\,ddP^{3'}\right)P-2\,\frac{1}{n}\left(P^{2'}-\frac{2}{n-1}d\,P^{3'}\right)dP$$

$$+\frac{1.\,2}{n(n-1)}\,P^{3'}ddP=0$$

$$\left(P^{2'}-2\,\frac{2}{n-1}dP^{3'}+\frac{2.\,3}{(n-1)(n-2)}\,ddP^{4'}\right)P-2\,\frac{2}{n-1}\left(P^{3'}-\right.$$

$$\left.\frac{3}{n-2}\,dP^{4'}\right)dP+\frac{2.\,3}{(n-1)(n-2)}\,P^{4'}ddP=0$$

$$\left(P^{3'}-2\,\frac{3}{n-2}dP^{4'}+\frac{3.\,4}{(n-2)\,(n-3)}\,ddP^{5'}\right)P-2\,\frac{3}{n-2}\left(P^{4'}-\right.$$

$$\left.\frac{4}{n-3}\,dP^{5'}\right)dP+\frac{3.\,4}{(n-2)(n-3)}\,P^{5'}ddP=0$$

\- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

\- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$\left(P^{(n-3)'}-2\,\frac{n-3}{4}dP^{(n-2)'}+\frac{(n-2)\,(n-3)}{3.\,4}\,ddP^{(n-1)'}\right)P-$$

$$\frac{n-3}{4}\left(P^{(n-2)'}-\frac{n-2}{3}\,dP^{(n-1)'}\right)dP+\frac{(n-2)(n-3)}{3.\,4}P^{(n-1)'}ddP=0$$

$$\left(P^{(n-2)'}-2\,\frac{n-2}{3}\,d\,P^{(n-1)'}+\frac{(n-1)\,(n-2)}{2.\,3}\,d\,d\,P^{n'}\right)P-$$

$$2\,\frac{n-2}{3}\left(P^{(n-1)'}-\frac{n-1}{2}\,dP^{n'}\right)dP+\frac{(n-1)\,(n-2)}{2.\,3}\,P^{n'}\,d\,d\,P=0$$

$$\left(P^{(n-1)'}-2\,\frac{n-1}{2}\,dP^{n'}+\frac{n.\,(n-1)}{1.\,2}\,d\,d\,P^{(n+1)'}\right)P-2\,\frac{n-1}{2}$$

$$\left(P^{n'}-\frac{n}{1}\,dP^{(n+1)'}\right)dP+\frac{n(n-1)}{1.\,2}\,P^{(n+1)'}\,ddP=0$$

relativa á variavel y; e aſſim ſemelhantemente a reſpeito de cada huma das outras variaveis primitivas.

§. XLIV.

Eliminando d'eſtas Equações as quantidades ddP; e $\frac{dP}{d}$; e eſtabelecendo entre os valores de $\frac{dP}{P}$, que d'aqui rezultarem, todas as igualdades rigorozamente differentes teremos as Equações de condiçaõ, a que a Funcçaõ V deve ſatisfazer todas as vezes que ſendo multiplicada por hum factor conveniente ſe reduſir a ſer Fluxaõ exacta de alguma Funcçaõ Fluxional da primeira ordem. Mas qual ſerá o numero e a fórma d'eſtas Equações? O numero das Equações do §. antecedente ſendo λ o numero das variaveis, e n o expoente da ordem Fluxional he $(n-1)\lambda$; e por tanto havendo de ſe eliminar ddP, e $\frac{dP}{P}$ pareſſe, que o numero das Equações de condiçaõ, a que V deve ſatisfazer, neſte cazo deve reduzirſe a $(n-1)\lambda-2$; mas ſe for $\lambda=2$, e $n=2$; ſerá $(n-1)\lambda-2=0$, e com tudo he precizo, que a Funcçaõ propoſta ſatisfaça a alguma condiçaõ.

§. XLV.

Principiemos por examinar eſte cazo, que á primeira viſta parece naõ exigir condiçaõ alguma. Seja pois a Funcçaõ propoſta V huma Funcçaõ Fluxional da ſegunda ordem das

das variaveis x, e y. As Equações que nos devem dar as condições, a que os coefficientes de dV devem satisfazer, saõ

$$\left(N^{1\prime}-dN^{2\prime}+ddN^{3\prime}\right)P-\left(N^{2\prime}-2dN^{3\prime}\right)dP+N^{3\prime}ddP=0$$

$$\left(P^{1\prime}-dP^{2\prime}+ddP^{3\prime}\right)P-\left(P^{2\prime}-2\,dP^{3\prime}\right)dP+P^{3\prime}ddP=0$$

as quaes por maior brevidade escreveremos d'esta sorte

$$B^{1\prime}P-C^{1\prime}dP+D^{1\prime}ddP=0$$

$$B^{2\prime}P-C^{2\prime}dP+D^{2\prime}ddP=0$$

eliminando d'ellas ddP teremos huma nova Equaçaõ

$$\left(B^{1\prime}D^{2\prime}-D^{1\prime}B^{2\prime}\right)P-\left(C^{1\prime}D^{2\prime}-D^{1\prime}C^{2\prime}\right)dP=0$$

d'aqual substituindo em lugar de ddx, ou ddy o seu valor tirado da proposta, e determinando a sua Fluxaõ, se deduz outra nova Equaçaõ

$$Pd\left(B^{1\prime}D^{2\prime}-D^{1\prime}B^{2\prime}\right)+\left(B^{1\prime}D^{2\prime}-D^{1\prime}B^{2\prime}\right)dP-\left(C^{1\prime}D^{2\prime}-D^{1\prime}C^{2\prime}\right)ddP=0$$
$$-\,d\left(C^{1\prime}D^{2\prime}-D^{1\prime}C^{2\prime}\right)dP$$

que para maior simplicidade do calculo escreveremos d'esta sorte

$$B^{3\prime}P-C^{3\prime}dP+D^{3\prime}ddP=0$$

D'esta se tira

$$ddP=\frac{C^{3\prime}dP-B^{3\prime}P}{D^{3\prime}}$$

valor que substituido nas duas primeiras as reduz a

$$\left(B^{1\prime}D^{3\prime}-D^{1\prime}B^{3\prime}\right)P-\left(C^{1\prime}D^{3\prime}-D^{1\prime}C^{3\prime}\right)dP=0$$

$$\left(B^{2\prime}D^{3\prime} - D^{2\prime}B^{3\prime}\right)P - \left(C^{2\prime}D^{3\prime} - D^{2\prime}C^{3\prime}\right)dP = 0$$

e por tanto eliminando por meio d'ellas $\frac{dP}{P}$ teremos a Equaçaõ

$$\left(B^{1\prime}C^{2\prime} - C^{1\prime}B^{2\prime}\right)D^{3\prime} - \left(B^{1\prime}C^{3\prime} - C^{1\prime}B^{3\prime}\right)D^{2\prime} + \left(B^{2\prime}C^{3\prime} - C^{2\prime}B^{3\prime}\right)D^{1\prime} = 0$$

em que ſe involvem as condiçóes, a que a Funcçaõ propoſta V deve ſatisfazer no cazo que, ſendo multiplicada por hum factor conveniente P, ſe poſſa reduzir a ſer Fluxaõ exacta de outra Funcçaõ Fluxional da primeira ordem.

§. XLVI.

Ora eſte procedimento, naõ ſendo de nenhuma ſorte particular ao cazo propoſto, nos moſtra que, comparando duas a duas todas as Equaçóes do §. XLIII, de tal ſorte que ſe tenhaõ todas as comparaçóes de igualdade realmente differentes, que entre ellas ſe podem eſtabelecer, de cada hum d'eſtes pares de Equaçóes aſſim combinadas ſe póde deduzir huma Equaçaõ de condiçaõ ſemelhante a do §. antecedente; e que por tanto ſendo λ o numero das variaveis, e n o expoente da ordem fluxional da Funcçaõ V, das $(n-1)\lambda$ Equaçóes do §. XLIII ſe tiraráõ $(n-1)\lambda - 1$ Equaçóes de condiçaõ ſemelhantes á do §. precedente, as quaes todas deveráõ ter logar, para que V ſe poſſa reduzir a ſer fluxaõ exacta de huma Funcçaõ Fluxional da primeira ordem. Porém ſerá ſempre mais ſimples em todos os cazos em que fôr $(n-1)\lambda > 2$ proceder á eliminaçaõ de ddP, e $\frac{dP}{P}$ pelos methodos da Algebra ordinaria, o que dará as Equaçóes de condiçaõ neceſſarias com menos trabalho, e em menor numero; pois ſeráõ como aſſima diſſemos ſómente $(n-1)\lambda - 2$.

§. XLVII.

§. XLVII.

Suppondo que as variaveis sejaõ só duas x, e y, e escrevendo por mais brevidade as Equações do §. XLIII da fórma seguinte, teremos

$$\overset{1'}{B} P - \overset{1'}{C} dP + \overset{1'}{D} ddP = 0$$

$$\overset{2'}{B} P - \overset{2'}{C} dP + \overset{2'}{D} ddP = 0$$

$$\overset{3'}{B} P - \overset{3'}{C} dP + \overset{3'}{D} ddP = 0$$

- - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - -

$$\overset{(n-3)'}{B} P - \overset{(n-3)'}{C} dP + \overset{(n-3)'}{D} ddP = 0$$

$$\overset{(n-2)'}{B} P - \overset{(n-2)'}{C} dP + \overset{(n-2)'}{D} ddP = 0$$

$$\overset{(n-1)'}{B} P - \overset{(n-1)'}{C} dP + \overset{(n-1)'}{D} ddP = 0$$

primeira serie de Equações relativa á variavel x, e

$$\overset{1'}{B}_{(1)} P - \overset{1'}{C}_{(1)} dP + \overset{1'}{D}_{(1)} ddP = 0$$

$$\overset{2'}{B}_{(1)} P - \overset{2'}{C}_{(1)} dP + \overset{2'}{D}_{(1)} ddP = 0$$

$$\overset{3'}{B}_{(1)} P - \overset{3'}{C}_{(1)} dP + \overset{3'}{D}_{(1)} ddP = 0$$

- - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - -

$$\overset{(n-3)'}{B}_{(1)} P - \overset{(n-3)'}{C}_{(1)} dP + \overset{(n-3)'}{D}_{(1)} ddP = 0$$

$$B_{(1)}^{(n-2)'} P - C_{(1)}^{(n-2)'} dP + D_{(1)}^{(n-2)'} ddP = 0$$

$$B_{(1)}^{(n-1)'} P - C_{(1)}^{(n-1)'} dP + D_{(1)}^{(n-1)'} ddP = 0$$

ſegunda ſerie de Equações relativa á variavel y.

§. XLVIII.

Comparando a ultima Equaçaõ da primeira ſerie com cada huma das outras da meſma ſerie : depois com a ultima da ſegunda , e eſta com cada huma das outras da meſma ſegunda ; e eliminando ddP , teremos as ſeguintes Equações.

$$\left(B^{(n-1)'} D^{(n-2)'} - D^{(n-1)'} B^{(n-2)'}\right) P - \left(C^{(n-1)'} D^{(n-2)'} - D^{(n-1)'} C^{(n-2)'}\right) dP = 0$$

$$\left(B^{(n-1)'} D^{(n-3)'} - D^{(n-1)'} B^{(n-3)'}\right) P - \left(C^{(n-1)'} D^{(n-3)'} - D^{(n-1)'} C^{(n-3)'}\right) dP = 0$$

$$\left(B^{(n-1)'} D^{(n-4)'} - D^{(n-1)'} B^{(n-4)'}\right) P - \left(C^{(n-1)'} D^{(n-4)'} - D^{(n-1)'} C^{(n-4)'}\right) dP = 0$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$\left(B^{(n-1)'} D^{3'} - D^{(n-1)'} B^{3'}\right) P - \left(C^{(n-1)'} D^{3'} - D^{(n-1)'} C^{3'}\right) dP = 0$$

$$\left(B^{(n-1)'} D^{2'} - D^{(n-1)'} B^{2'}\right) P - \left(C^{(n-1)'} D^{2'} - D^{(n-1)'} C^{2'}\right) dP = 0$$

$$\left(B^{(n-1)'} D^{1'} - D^{(n-1)'} B^{1'}\right) P - \left(C^{(n-1)'} D^{1'} - D^{(n-1)'} C^{1'}\right) dP = 0$$

$$\left(B^{(n-1)'} D_{(1)}^{(n-1)'} - D^{(n-1)'} B_{(1)}^{(n-1)'}\right) P - \left(C^{(n-1)'} D_{(1)}^{(n-1)'} - D^{(n-1)'} C_{(1)}^{(n-1)'}\right) dP = 0$$

$$\left(B_{(1)}^{(n-1)'} D_{(1)}^{(n-2)'} - D_{(1)}^{(n-1)'} B_{(1)}^{(n-2)'}\right) P - \left(C_{(1)}^{(n-1)'} D_{(1)}^{(n-2)'} - D_{(1)}^{(n-1)'} C_{(1)}^{(n-2)'}\right) dP = 0$$

$$\left(B_{(1)}^{(n-1)'} D_{(1)}^{(n-3)'} - D_{(1)}^{(n-1)'} B_{(1)}^{(n-3)'}\right) P - \left(C_{(1)}^{(n-1)'} D_{(1)}^{(n-3)'} - D_{(1)}^{(n-1)'} C_{(1)}^{(n-3)'}\right) dP = 0$$

$\left(B_{(1)}^{(n-1)'}\right.$

$$\left(B^{(n-1)'}_{(1)} D^{(n-4)'}_{(1)} - D^{(n-1)'}_{(1)} B^{(n-4)'}_{(1)}\right)P - \left(C^{(n-1)'}_{(1)} D^{(n-4)'}_{(1)} - D^{(n-1)'}_{(1)} C^{(n-4)'}_{(1)}\right)dP = 0$$

- -

- -

$$\left(B^{(n-1)'}_{(1)} D^{3'}_{(1)} - D^{(n-1)'}_{(1)} B^{3'}_{(1)}\right)P - \left(C^{(n-1)'}_{(1)} D^{3'}_{(1)} - D^{(n-1)'}_{(1)} C^{3'}_{(1)}\right)dP = 0$$

$$\left(B^{(n-1)'}_{(1)} D^{2'}_{(1)} - D^{(n-1)'}_{(1)} B^{2'}_{(1)}\right)P - \left(C^{(n-1)'}_{(1)} D^{2'}_{(1)} - D^{(n-1)'}_{(1)} C^{2'}_{(1)}\right)dP = 0$$

$$\left(B^{(n-1)'}_{(1)} D^{1'}_{(1)} - D^{(n-1)'}_{(1)} B^{1'}_{(1)}\right)P - \left(C^{(n-1)'}_{(1)} D^{1'}_{(1)} - D^{(n-1)'}_{(1)} C^{1'}_{(1)}\right)dP = 0$$

das quaes eliminando $\frac{dP}{P}$ ſe deduzem as ſeguintes

$$\left(B^{(n-1)'} C^{(n-2)'} - C^{(n-1)'} B^{(n-2)'}\right) D^{(n-3)'} - \left(B^{(n-1)'} C^{(n-3)'} - C^{(n-1)'} B^{(n-3)'}\right) D^{(n-2)'}$$
$$+ \left(B^{(n-2)'} C^{(n-3)'} - C^{(n-2)'} B^{(n-3)'}\right) D^{(n-1)'} = 0$$

$$\left(B^{(n-1)'} C^{(n-2)'} - C^{(n-1)'} B^{(n-2)'}\right) D^{(n-4)'} - \left(B^{(n-1)'} C^{(n-4)'} - C^{(n-1)'} B^{(n-4)'}\right) D^{(n-2)'}$$
$$+ \left(B^{(n-2)'} C^{(n-4)'} - C^{(n-2)'} B^{(n-4)'}\right) D^{(n-1)'} = 0$$

$$\left(B^{(n-1)'} C^{(n-2)'} - C^{(n-1)'} B^{(n-2)'}\right) D^{(n-5)'} - \left(B^{(n-1)'} C^{(n-5)'} - C^{(n-1)'} B^{(n-5)'}\right) D^{(n-2)'}$$
$$+ \left(B^{(n-2)'} C^{(n-5)'} - C^{(n-2)'} B^{(n-5)'}\right) D^{(n-1)'} = 0$$

- -

- -

$$\left(B^{(n-1)'} C^{(n-2)'} - C^{(n-1)'} B^{(n-2)'}\right) D^{3'} - \left(B^{(n-1)'} C^{3'} - C^{(n-1)'} B^{3'}\right) D^{(n-2)'}$$
$$+ \left(B^{(n-2)'} C^{3'} - C^{(n-2)'} B^{3'}\right) D^{(n-1)'} = 0$$

$$\left(B^{(n-1)'} C^{(n-2)'} - C^{(n-1)'} B^{(n-2)'}\right) D^{2'} - \left(B^{(n-1)'} C^{2'} - C^{(n-1)'} B^{2'}\right) D^{(n-2)'}$$
$$+ \left(B^{(n-2)'} C^{2'} - C^{(n-2)'} B^{2'}\right) D^{(n-1)'} = 0$$

$$\left(B^{(n-1)'}C^{(n-2)'}-C^{(n-1)'}B^{(n-2)'}\right)D^{1'}-\left(B^{(n-1)'}C^{1'}-C^{(n-1)'}B^{1'}\right)D^{(n-2)'}$$
$$+\left(B^{(n-2)'}C^{1'}-C^{(n-2)'}B^{1'}\right)D^{(n-1)'}=0$$

$$\left(B^{(n-1)'}C^{(n-2)'}-C^{(n-1)'}B^{(n-2)'}\right)D_{(1)}^{(n-1)'}-\left(B^{(n-1)'}C_{(1)}^{(n-1)'}-C^{(n-1)'}B_{(1)}^{(n-1)'}\right)D^{(n-2)'}$$
$$+\left(B^{(n-2)'}C_{(1)}^{(n-1)'}-C^{(n-2)'}B_{(1)}^{(n-1)'}\right)D^{(n-1)'}=0$$

$$\left(B^{(n-1)'}C_{(1)}^{(n-1)'}-C^{(n-1)'}B_{(1)}^{(n-1)'}\right)D_{(1)}^{(n-2)'}-\left(B^{(n-1)'}C_{(1)}^{(n-2)'}-C^{(n-1)'}B_{(1)}^{(n-2)'}\right)D_{(1)}^{(n-1)'}$$
$$+\left(B_{(1)}^{(n-1)'}C_{(1)}^{(n-2)'}-C_{(1)}^{(n-1)'}B_{(1)}^{(n-2)'}\right)D^{(n-1)'}=0$$

$$\left(B_{(1)}^{(n-1)'}C_{(1)}^{(n-2)'}-C_{(1)}^{(n-1)'}B_{(1)}^{(n-2)'}\right)D_{(1)}^{(n-3)'}-\left(B_{(1)}^{(n-1)'}C_{(1)}^{(n-3)'}-C_{(1)}^{(n-1)'}B_{(1)}^{(n-3)'}\right)D_{(1)}^{(n-2)'}$$
$$+\left(B_{(1)}^{(n-2)'}C_{(1)}^{(n-3)'}-C_{(1)}^{(n-2)'}B_{(1)}^{(n-3)'}\right)D_{(1)}^{(n-1)'}=0$$

$$\left(B_{(1)}^{(n-1)'}C_{(1)}^{(n-2)'}-C_{(1)}^{(n-1)'}B_{(1)}^{(n-2)'}\right)D_{(1)}^{(n-4)'}-\left(B_{(1)}^{(n-1)'}C_{(1)}^{(n-4)'}-C_{(1)}^{(n-1)'}B_{(1)}^{(n-4)'}\right)D_{(1)}^{(n-2)'}$$
$$+\left(B_{(1)}^{(n-2)'}C_{(1)}^{(n-4)'}-C_{(1)}^{(n-2)'}B_{(1)}^{(n-4)'}\right)D_{(1)}^{(n-1)'}=0$$

$$\left(B_{(1)}^{(n-1)'}C_{(1)}^{(n-2)'}-C_{(1)}^{(n-1)'}B_{(1)}^{(n-2)'}\right)D_{(1)}^{(n-5)'}-\left(B_{(1)}^{(n-1)'}C_{(1)}^{(n-5)'}-C_{(1)}^{(n-1)'}B_{(1)}^{(n-5)'}\right)D_{(1)}^{(n-2)'}$$
$$+\left(B_{(1)}^{(n-2)'}C_{(1)}^{(n-5)'}-C_{(1)}^{(n-2)'}B_{(1)}^{(n-5)'}\right)D_{(1)}^{(n-1)'}=0$$

- -

- -

$$\left(B_{(1)}^{(n-1)'}C_{(1)}^{(n-2)'}-C_{(1)}^{(n-1)'}B_{(1)}^{(n-2)'}\right)D_{(1)}^{3'}-\left(B_{(1)}^{(n-1)'}C_{(1)}^{3'}-C_{(1)}^{(n-1)'}B_{(1)}^{3'}\right)D_{(1)}^{(n-2)'}$$
$$+\left(B_{(1)}^{(n-2)'}C_{(1)}^{3'}-C_{(1)}^{(n-2)'}B_{(1)}^{3'}\right)D_{(1)}^{(n-1)'}=0$$

$$\left(B_{(1)}^{(n-1)'}C_{(1)}^{(n-2)'}-C_{(1)}^{(n-1)'}B_{(1)}^{(n-2)'}\right)D_{(1)}^{2'}-\left(B_{(1)}^{(n-1)'}C_{(1)}^{2'}-C_{(1)}^{(n-1)'}B_{(1)}^{2'}\right)D_{(1)}^{(n-2)'}$$
$$+\left(B_{(1)}^{(n-2)'}C_{(1)}^{2'}-C_{(1)}^{(n-2)'}B_{(1)}^{2'}\right)D_{(1)}^{(n-1)'}=0$$

$\left(B_{(1)}^{(n-1)'}\right.$

$$\left(\overset{(n-1)'}{B_{(1)}}\overset{(n-2)'}{C_{(1)}}-\overset{(n-1)'}{C_{(1)}}\overset{(n-2)'}{B_{(1)}}\right)\overset{1'}{D_{(1)}}-\left(\overset{(n-1)'}{B_{(1)}}\overset{1'}{C_{(1)}}-\overset{(n-1)'}{C_{(1)}}\overset{1'}{B_{(1)}}\right)\overset{(n-2)'}{D_{(1)}}$$

$$+\left(\overset{(n-2)'}{B_{(1)}}\overset{1'}{C_{(1)}}-\overset{(n-2)'}{C_{(1)}}\overset{1'}{B_{(1)}}\right)\overset{(n-1)'}{D_{(1)}}=0$$

em que ſe comprehendem todas as condições, a que os coefficientes de dV devem ſatisfazer. Se o numero das variaveis foſſe maior, o procedimento aqui praticado e em o §. antecedente deixaõ bem claramente ver qual he o caminho, que ſe deveria ſeguir para ſe obterem as Equações de condiçaõ, a que os coefficientes de dV dèveriaõ ſatisfazer, e por tanto podemos diſpenſarnos de examinar outro algum cazo dos em que V poſſa ſer reductivel a huma Fluxaõ exacta de outra Funcçaõ Fluxional da primeira ordem.

§. XLIX.

Se depois de ter reconhecido que V naõ ſatisfaz a eſtas Equações de condiçaõ quizermos examinar ſe eſta Funcçaõ pode ſer por outro modo tratada, para que ſe obtenha a ſua Fluente, ſegue-ſe indagar ſe multiplicando-a por hum factor conveniente ſe poderá reduſir a ſer Fluxaõ exacta de huma Funcçaõ Fluxional da ſegunda ordem; e como neſte cazo os coefficientes de $d(PV)$ devem ſatisfazer ás condições do §. XVI. applicando-lhe o Theorema por ella expreſſado, e attendendo a que neſte cazo he $V=0$; $dV=0$; $ddV=0$; e $d^3V=0$; acharemos que elles devem ſatisfazer á ſeguinte ſerie do Equações

$$\left(\overset{1'}{N}-3\tfrac{1}{n}d\overset{2'}{N}-3\frac{1.2}{n(n-1)}dd\overset{3'}{N}-\frac{1.2.3}{n(n-1)(n-2)}d^3\overset{4'}{N}\right)P-$$

$$3\tfrac{1}{n}\left(\overset{2'}{N}-2\frac{2}{n-1}d\overset{3'}{N}+\frac{2.3}{(n-1)(n-2)}dd\overset{4'}{N}\right)dP+3\frac{1.2}{n(n-1)}\left(\overset{3'}{N}\right.$$

$$\left.-\frac{3}{n-2}d\overset{4'}{N}\right)ddP-\frac{1.2.3}{n(n-1)(n-2)}\overset{4'}{N}d^3P=0$$

$\left(\overset{2'}{N}\right.$

$$\left(N^{2'} - 3\,\frac{2}{n-1}\,dN^{3'} + 3\,\frac{2\cdot 3}{(n-1)(n-2)}\,ddN^{4'} - \frac{2\cdot 3\cdot 4}{(n-1)(n-2)(n-3)}\,d^3 N^{5'}\right)P$$

$$-\,3\,\frac{2}{n-1}\left(N^{3'} - 2\,\frac{3}{n-2}\,dN^{4'} + \frac{3\cdot 4}{(n-2)(n-3)}\,ddN^{5'}\right)dP + 3\,\frac{2\cdot 3}{(n-1)(n-2)}$$

$$\left(N^{4'} - \frac{4}{n-3}\,dN^{5'}\right)ddP - \frac{2\cdot 3\cdot 4}{(n-1)(n-2)(n-3)}\,N^{5'}\,d^3 P = 0$$

$$\left(N^{3'} - 3\,\frac{3}{n-2}\,dN^{4'} + \frac{3\cdot 4}{(n-2)(n-3)}\,ddN^{5'} - \frac{3\cdot 4\cdot 5}{(n-2)(n-3)(n-4)}\,d^3 N^{6'}\right)P$$

$$-\,3\,\frac{3}{n-2}\left(N^{4'} - 2\,\frac{4}{n-3}\,dN^{5'} + \frac{4\cdot 5}{(n-3)(n-4)}\,ddN^{6'}\right)dP + 3\,\frac{3\cdot 4}{(n-2)(n-3)}$$

$$\left(N^{5'} - \frac{5}{n-4}\,dN^{6'}\right)ddP - \frac{3\cdot 4\cdot 5}{(n-2)(n-3)(n-4)}\,N^{6'}\,d^3 P = 0$$

\- -

\- -

$$\left(N^{(n-4)'} - 3\,\frac{n-4}{5}\,dN^{(n-3)'} + 3\,\frac{(n-3)(n-4)}{4\cdot 5}\,ddN^{(n-2)'} -\right.$$

$$\left.\frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{3\cdot 4\cdot 5}\,d^3 N^{(n-1)'}\right)P - 3\,\frac{n-4}{5}\left(N^{(n-3)'} - 2\,\frac{n-3}{4}\,dN^{(n-2)'}\right.$$

$$\left.+\,\frac{(n-2)(n-3)}{3\cdot 4}\,ddN^{(n-1)'}\right)dP + 3\,\frac{(n-3)(n-4)}{4\cdot 5}\left(N^{(n-2)'} -\right.$$

$$\left.\frac{n-2}{3}\,dN^{(n-1)'}\right)ddP - \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{3\cdot 4\cdot 5}\,N^{(n-1)'}\,d^3 P = 0$$

$$\left(N^{(n-3)'} - 3\,\frac{n-3}{4}\,dN^{(n-2)'} + 3\,\frac{(n-2)(n-3)}{3\cdot 4}\,ddN^{(n-1)'} -\right.$$

$$\left.\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 3\cdot 4}\,d^3 N^{n'}\right)P - 3\,\frac{n-3}{4}\left(N^{(n-2)'} - 2\,\frac{n-2}{3}\,dN^{(n-1)'} +\right.$$

$$\left.\frac{(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}\,ddN^{n'}\right)dP + 3\,\frac{(n-2)(n-3)}{3\cdot 4}\left(N^{(n-1)'} - \frac{n-1}{2}\,dN^{n'}\right)ddP$$

$$-\,\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 3\cdot 4}\,N^{n'}\,d^3 P = 0$$

$\left(N^{(n-2)'}\right.$

$$\left(N^{(n-2)'}-3\frac{n-2}{3}dN^{(n-1)'}+3\frac{(n-1)(n-2)}{2.3}ddN^{n'}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}d^3N^{(n+1)'}\right)P$$
$$-3\frac{n-2}{3}\left(N^{(n-1)'}-2\frac{n-1}{2}dN^{n'}+\frac{n(n-1)}{1.2}ddN^{(n+1)'}\right)dP+3\frac{(n-1)(n-2)}{2.3}$$
$$\left(N^{n'}-\frac{1}{n}dN^{(n+1)'}\right)ddP-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}N^{(n+1)'}d^3P=0$$

relativa á variavel x; e a huma ſerie ſemelhante relativa a cada huma das outras variaveis primitivas

§. L.

Sendo λ numero das ditas variaveis, o numero total das Equações do §. antecedente ſerá $(n-2)\lambda$, e eliminando d^3P; dd,P; e $\frac{dP}{P}$, d'ellas ſe tirará hum numero $(n-2)\lambda-3$ de Equações de condiçaõ, que deveraõ verificar-ſe, para que a Funcçaõ propoſta V, multiplicada por hum factor conveniente P, ſe poſſa reduſir a ſer Fluxaõ exacta de outra Funcçaõ Fluxional da ſegunda ordem: mas eſta eliminaçaõ naõ poderá ter lugar pelas regras ordinarias da Algebra ſenaõ ſendo $(n-2)\lambda > 3$; pelo que tanto no cazo de ſer $n=3$, e $\lambda=2$; como no cazo de ſer $n=3$, e $\lambda=3$ deveremos recorrer a outro methodo de eliminaçaõ como fizemos em o §. XLV.

§. LI.

Porém antes de paſſarmos á expoſiçaõ dos differentes modos, porque ſe podem deduſir das Equações precedentes as condições, a que V deve ſatisfazer, para maior facilidade do calculo, ſuppondo que as variaveis ſejaõ tres x, y, e z; reprezentaremos as mencionadas Equações pela maneira ſeguinte, devidindo-as em tres ſeries: a primeira

$$B''P-C''dP+D''ddP-E''d^3P=0$$

$$B^{2'} P - C^{2'} dP + D^{2'} ddP - E^{2'} d^3P = 0$$

$$B^{3'} P - C^{3'} dP + D^{3'} ddP - E^{3'} d^3P = 0$$

- - - - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - - - -

$$B^{(n-4)'} P - C^{(n-4)'} dP + D^{(n-4)'} ddP - E^{(n-4)'} d^3P = 0$$

$$B^{(n-3)'} P - C^{(n-3)'} dP + D^{(n-3)'} ddP - E^{(n-3)'} d^3P = 0$$

$$B^{(n-2)'} P - C^{(n-2)'} dP + D^{(n-2)'} ddP - E^{(n-2)'} d^3P = 0$$

relativa á variavel x, a ſegunda

$$B_{(1)}^{1'} P - C_{(1)}^{1'} dP + D_{(1)}^{1'} ddP - E_{(1)}^{1'} d^3P = 0$$

$$B_{(1)}^{2'} P - C_{(1)}^{2'} dP + D_{(1)}^{2'} ddP - E_{(1)}^{2'} d^3P = 0$$

$$B_{(1)}^{3'} P - C_{(1)}^{3'} dP + D_{(1)}^{3'} ddP - E_{(1)}^{3'} d^3P = 0$$

- - - - - - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - - - - - -

$$B_{(1)}^{(n-4)'} P - C_{(1)}^{(n-4)'} dP + D_{(1)}^{(n-4)'} ddP - E_{(1)}^{(n-4)'} d^3P = 0$$

$$B_{(1)}^{(n-3)'} P - C_{(1)}^{(n-3)'} dP + D_{(1)}^{(n-3)'} ddP - E_{(1)}^{(n-3)'} d^3P = 0$$

$$B_{(1)}^{(n-2)'} P - C_{(1)}^{(n-2)'} dP + D_{(1)}^{(n-2)'} ddP - E_{(1)}^{(n-2)'} d^3P = 0$$

relativa á variavel y; e a terceira

$$B_{(2)}^{1'} P - C_{(2)}^{1'} dP + D_{(2)}^{1'} ddP - E_{(2)}^{1'} d^3P = 0$$

$$B_{(2)}^{2'} P - C_{(2)}^{2'} dP + D_{(2)}^{2'} ddP - E_{(2)}^{2'} d^3P = 0$$

$$\overset{3'}{B}_{(2)} P - \overset{3'}{C}_{(2)} dP + \overset{3'}{D}_{(2)} ddP - \overset{3'}{E}_{(2)} d^3 P = 0$$

- - - - - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - - - - -

$$\overset{(n-4)'}{B}_{(2)} P - \overset{(n-4)'}{C}_{(2)} dP + \overset{(n-4)'}{D}_{(2)} ddP - \overset{(n-4)'}{E}_{(2)} d^3 P = 0$$

$$\overset{(n-3)'}{B}_{(2)} P - \overset{(n-3)'}{C}_{(2)} dP + \overset{(n-3)'}{D}_{(2)} ddP - \overset{(n-3)'}{E}_{(2)} d^3 P = 0$$

$$\overset{(n-2)'}{B}_{(2)} P - \overset{(n-2)'}{C}_{(2)} dP + \overset{(n-2)'}{D}_{(2)} ddP - \overset{(n-2)'}{E}_{(2)} d^3 P = 0$$

relativa á variavel z.

§. LII.

Comeſſando pois pelo cazo mais ſimples ; iſto he, ſuppondo $n = 3$, e $\lambda = 2$, as Equações, a que os coefficientes de dV deveráõ ſatisfazer, ſeráõ

$$\overset{1'}{B} P - \overset{1'}{C} dP + \overset{1'}{D} ddP - \overset{1'}{E} d^3 P = 0$$

$$\overset{1'}{B}_{(1)} P - \overset{1'}{C}_{(1)} dP + \overset{1'}{D}_{(1)} ddP - \overset{1'}{E}_{(1)} d^3 P = 0$$

por quanto, naõ havendo mais que duas variaveis, as Equações da terceira ſerie do §. antecedente naõ podem ter logar. Se d'eſtas duas eliminarmos d^3P teremos huma nova Equaçaõ

$$\left(\overset{1'}{B}\overset{1'}{E}_{(1)} - \overset{1'}{B}_{(1)}\overset{1'}{E}\right)P - \left(\overset{1'}{C}\overset{1'}{E}_{(1)} - \overset{1'}{C}_{(1)}\overset{1'}{E}\right)dP + \left(\overset{1'}{D}\overset{1'}{E}_{(1)} - \overset{1'}{D}_{(1)}\overset{1'}{E}\right)ddP = 0$$

da qual, ſubſtituindo primeiro em logar de d^3x, ou d^3y o ſeu valor tirado da propoſta, e determinando depois a ſua Fluxaõ, deduziremos a ſeguinte

$$d\left(\overset{1'}{B}\overset{1'}{E}_{(1)} - \overset{1'}{B}_{(1)}\overset{1'}{E}\right)P + \left(\overset{1'}{B}\overset{1'}{E}_{(1)} - \overset{1'}{B}_{(1)}\overset{1'}{E}\right)dP - \left(\overset{1'}{C}\overset{1'}{E}_{(1)} - \overset{1'}{C}_{(1)}\overset{1'}{E}\right)ddP$$
$$- d\left(\overset{1'}{C}\overset{1'}{E}_{(1)} - \overset{1'}{C}_{(1)}\overset{1'}{E}\right)dP + d\left(\overset{1'}{D}\overset{1'}{E}_{(1)} - \overset{1'}{D}_{(1)}\overset{1'}{E}\right)ddP$$

+

$$+\left(\overset{1'}{D}\,\overset{1'}{E}_{(1)}-\overset{1'}{D}_{(1)}\overset{1'}{E}\right)d^3P=0$$

Equaçaõ que por mais brevidade eſcreveremos da maneira ſeguinte

$$B_{(1)}P-C_{(1)}dP+D_{(1)}ddP-E_{(1)}d^3P=0$$

Comparando agora eſta Equaçaõ com cada huma das duas primeiras, de quem ella ſe derivou, e eliminando d^3P, teremos duas novas Equações.

$$\left(\overset{1'}{B}E_{(1)}-\overset{1'}{E}B_{(1)}\right)P-\left(\overset{1'}{C}E_{(1)}-\overset{1'}{E}C_{(1)}\right)dP+\left(\overset{1'}{D}E_{(1)}-\overset{1'}{E}D_{(1)}\right)ddP=0$$

$$\left(\overset{1'}{B}_{(1)}E_{(1)}-\overset{1'}{E}_{(1)}B_{(1)}\right)P-\left(\overset{1'}{C}_{(1)}E_{(1)}-\overset{1'}{E}_{(1)}C_{(1)}\right)dP+\left(\overset{1'}{D}_{(1)}E_{(1)}-\overset{1'}{E}_{(1)}D_{(1)}\right)ddP=0$$

que ſemelhantemente reprezentaremos por

$$B_{(2)}P-C_{(2)}dP+D_{(2)}ddP=0$$

$$\overset{1'}{B}_{(2)}P-\overset{1'}{C}_{(2)}dP+\overset{1'}{D}_{(2)}ddP=0$$

e tornando a ſubſtituir em cada huma d'ellas em logar de d^3x ou d^3y o ſeu valor tirado da propoſta, e eliminando ddP paſſaremos a ter outra Equaçaõ

$$\left(B_{(2)}\overset{1'}{D}_{(2)}-D_{(2)}\overset{1'}{B}_{(2)}\right)P-\left(C_{(2)}\overset{1'}{D}_{(2)}-D_{(2)}\overset{1'}{C}_{(2)}\right)dP=0$$

da qual pela determinaçaõ da ſua Fluxaõ deduziremos

$$d\left(B_{(2)}\overset{1'}{D}_{(2)}-D_{(2)}\overset{1'}{B}_{(2)}\right)P+\left(B_{(2)}\overset{1'}{D}_{(2)}-D_{(2)}\overset{1'}{B}_{(2)}\right)dP-\left(C_{(2)}\overset{1'}{D}_{(2)}-D_{(2)}\overset{1'}{C}_{(2)}\right)ddP=0$$
$$-d\left(C_{(2)}\overset{1'}{D}_{(2)}-D_{(2)}\overset{1'}{C}_{(2)}\right)dP$$

Equaçaõ que pelas razões e modo até agora praticado reprezentaremos por

$$B_{(3)}P-C_{(3)}dP+D_{(3)}ddP=0$$

Tirando finalmente d'eſta o valor de ddP, e ſubſtituindo-o em

em cada huma das duas precedentes de quem ella rezultou, ellas ſe reduziraõ a

$$\left(B_{(2)} D_{(3)} - D_{(2)} B_{(3)}\right)P - \left(C_{(2)} D_{(3)} - D_{(2)} C_{(3)}\right)dP = 0$$

$$\left(\overset{1'}{B}_{(2)} D_3 - \overset{1'}{D}_{(2)} B_3\right)P - \left(\overset{1'}{C}_{(2)} D_{(3)} - \overset{1'}{D}_{(2)} C_{(3)}\right)dP = 0$$

Equações das quaes pela eliminaçaõ de $\frac{dP}{P}$ ſe deduz ultimamente a Equaçaõ

$$\left(B_{(2)}\overset{1'}{C}_{(2)} - C_{(2)}\overset{1'}{B}_{(2)}\right)D_{(3)} - \left(B_{(2)}C_{(3)} - C_{(2)}B_{(3)}\right)\overset{1'}{D}_{(2)} + \left(\overset{1'}{B}_{(2)}C_{(3)} - \overset{1'}{C}_{(2)}B_{(3)}\right)D_{(2)} = 0$$

em que ſe encerraõ todas as condições, a que V deve ſatisfazer no cazo de que ſe trata.

§. LIII.

Sendo $n = 3$, e $\lambda = 3$; as Equações de condiçaõ a que os coefficientes de dV deveráõ ſatisfazer ſeráõ

$$\overset{1'}{B} P - \overset{1'}{C} dP + \overset{1'}{D} ddP - \overset{1'}{E} d^3 P = 0$$

$$\overset{1'}{B}_{(1)} P - \overset{1'}{C}_{(1)} dP + \overset{1'}{D}_{(1)} ddP - \overset{1'}{E}_{(1)} d^3 P = 0$$

$$\overset{1'}{B}_{(2)} P - \overset{1'}{C}_{(2)} dP + \overset{1'}{D}_{(2)} ddP - \overset{1'}{E}_{(2)} d^3 P = 0$$

das quaes eliminando $d^3 P$ ſe tira

$$\left(\overset{1'}{B}\overset{1'}{E}_{(1)} - \overset{1'}{E}\overset{1'}{B}_{(1)}\right)P - \left(\overset{1'}{C}\overset{1'}{E}_{(1)} - \overset{1'}{E}\overset{1'}{C}_{(1)}\right)dP + \left(\overset{1'}{D}\overset{1'}{E}_{(1)} - \overset{1'}{E}\overset{1'}{D}_{(1)}\right)ddP = 0$$

$$\left(\overset{1'}{B}_{(1)}\overset{1'}{E}_{(2)} - \overset{1'}{E}_{(1)}\overset{1'}{B}_{(2)}\right)P - \left(\overset{1'}{C}_{(1)}\overset{1'}{E}_{(2)} - \overset{1'}{E}_{(1)}\overset{1'}{C}_{(2)}\right)dP + \left(\overset{1'}{D}_{(1)}\overset{1'}{E}_{(2)} - \overset{1'}{E}_{(1)}\overset{1'}{D}_{(2)}\right)ddP = 0$$

Equações que eſcreveremos da maneira ſeguinte

$$B_{(1)} P - C_{(1)} dP + D_{(1)} ddP = 0$$

$$B_{(2)} P - C_{(2)} dP + D_{(2)} ddP = 0$$

e das quaes pela eliminaçaõ de ddP tiraremos huma nova Equaçaõ

$$\left(B_{(1)}D_{(2)}-D_{(1)}B_{(2)}\right)P-\left(C_{(1)}D_{(2)}-D_{(1)}C_{(2)}\right)dP=0$$

D'esta, substituindo primeiro em logar de d^3x, d^3y, ou d^3z o seu valor tirado da proposta, e determinando a sua Fluxaõ, deduziremos a seguinte

$$d\left(B_{(1)}D_{(2)}-D_{(1)}B_{(2)}\right)P+\left(B_{(1)}D_{(2)}-D_{(1)}B_{(2)}\right)dP-\left(C_{(1)}D_{(2)}-D_{(1)}C_{(2)}\right)ddP=0$$
$$-d\left(C_{(1)}D_{(2)}-D_{(1)}C_{(2)}\right)dP$$

Equaçaõ que reprezentaremos por

$$B_{(3)}P-C_{(3)}dP+D_{(3)}ddP=0$$

Comparando agora esta com cada huma das outras duas, de quem ella foi derivada, teremos duas novas Equações

$$\left(B_{(1)}D_{(2)}-D_{(1)}B_{(2)}\right)P-\left(C_{(1)}D_{(2)}-D_{(1)}C_{(2)}\right)dP=0$$

$$\left(B_{(2)}D_{(3)}-D_{(2)}B_{(3)}\right)P-\left(C_{(2)}D_{(3)}-D_{(2)}C_{(3)}\right)dP=0$$

das quaes eliminando $\frac{dP}{P}$ se deduz a Equaçaõ final

$$\left(B_{(1)}C_{(2)}-C_{(1)}B_{(2)}\right)D_{(3)}-\left(B_{(1)}C_{(3)}-C_{(1)}B_{(3)}\right)D_{(2)}+\left(B_{(2)}C_{(3)}-C_{(2)}B_{(3)}\right)D_{(1)}=0$$

que encerra todas as condições, a que a Funcçaõ proposta V deve satisfazer no cazo de que se trata.

§. LIV.

Suppondo porém que seja $n>3$, e por consequencia $(n-2)\lambda>3$ poderemos eliminar d^3P; ddP; e $\frac{dP}{P}$ simplesmente pelos methodos da Algebra ordinaria, e obter Equa-

Equações de condiçaõ da mesma fórma; porém mais simplices que as precedentes: e supposto que a sua determinaçaõ naõ seja deficil, depois do que praticamos em o §. XLVIII, com tudo por terminar quanto respeita ao prezente cazo, e fazer, se he possivel, ainda mais patente a constante analogia do nosso methodo de proceder em todos os cazos, supporemos que seja n hum numero qualquer, e $\lambda = 2$; pois que a grandeza de λ de nenhuma sorte altera o referido methodo. Nesta hypotheze pois as nossas Equações de condiçaõ seráõ as duas primeiras series do §. LI, das quaes eliminando d^3P tiraremos as seguintes Equações

$$\left(\overset{(n-2)'}{B}\overset{(n-3)'}{E}-\overset{(n-2)'}{E}\overset{(n-3)'}{B}\right)P-\left(\overset{(n-2)'}{C}\overset{(n-3)'}{E}-\overset{(n-2)'}{E}\overset{(n-3)'}{C}\right)dP$$
$$+\left(\overset{(n-2)'}{D}\overset{(n-3)'}{E}-\overset{(n-2)'}{E}\overset{(n-3)'}{D}\right)ddP=0$$

$$\left(\overset{(n-2)'}{B}\overset{(n-4)'}{E}-\overset{(n-2)'}{E}\overset{(n-4)'}{B}\right)P-\left(\overset{(n-2)'}{C}\overset{(n-4)'}{E}-\overset{(n-2)'}{E}\overset{(n-4)'}{C}\right)dP$$
$$+\left(\overset{(n-2)'}{D}\overset{(n-4)'}{E}-\overset{(n-2)'}{E}\overset{(n-4)'}{D}\right)ddP=0$$

$$\left(\overset{(n-2)'}{B}\overset{(n-5)'}{E}-\overset{(n-2)'}{E}\overset{(n-5)'}{B}\right)P-\left(\overset{(n-2)'}{C}\overset{(n-5)'}{E}-\overset{(n-2)'}{E}\overset{(n-5)'}{C}\right)dP$$
$$+\left(\overset{(n-2)'}{D}\overset{(n-5)'}{E}-\overset{(n-2)'}{E}\overset{(n-5)'}{D}\right)ddP=0$$

- -

- -

$$\left(\overset{(n-2)'}{B}\overset{3'}{E}-\overset{(n-2)'}{E}\overset{3'}{B}\right)P-\left(\overset{(n-2)'}{C}\overset{3'}{E}-\overset{(n-2)'}{E}\overset{3'}{C}\right)dP$$
$$+\left(\overset{(n-2)'}{D}\overset{3'}{E}-\overset{(n-2)'}{E}\overset{3'}{D}\right)ddP=0$$

$$\left(\overset{(n-2)'}{B}\overset{2'}{E}-\overset{(n-2)'}{E}\overset{2'}{B}\right)P-\left(\overset{(n-2)'}{C}\overset{2'}{E}-\overset{(n-2)'}{E}\overset{2'}{C}\right)dP$$
$$+\left(\overset{(n-2)'}{D}\overset{2'}{E}-\overset{(n-2)'}{E}\overset{2'}{D}\right)ddP=0$$

$\left(\overset{(n-2)'}{B}\right.$

$$\left(B^{(n-2)'}E^{1'}-E^{(n-2)'}B^{1'}\right)P-\left(C^{(n-2)'}E^{1'}-E^{(n-2)'}C^{1'}\right)dP$$
$$+\left(D^{(n-2)'}E^{1'}-E^{(n-2)'}D^{1'}\right)ddP=0$$

$$\left(B^{(n-2)'}E_{(1)}^{(n-2)'}-E^{(n-2)'}B_{(1)}^{(n-2)'}\right)P-\left(C^{(n-2)'}E_{(1)}^{(n-2)'}-E^{(n-2)'}C_{(1)}^{(n-2)'}\right)dP$$
$$+\left(D^{(n-2)'}E_{(1)}^{(n-2)'}-E^{(n-2)'}D_{(1)}^{(n-2)'}\right)ddP=0$$

$$\left(B_{(1)}^{(n-2)'}E_{(1)}^{(n-3)'}-E_{(1)}^{(n-2)'}B_{(1)}^{(n-3)'}\right)P-\left(C_{(1)}^{(n-2)'}E_{(1)}^{(n-3)'}-E_{(1)}^{(n-2)'}C_{(1)}^{(n-3)'}\right)dP$$
$$+\left(D_{(1)}^{(n-2)'}E_{(1)}^{(n-3)'}-E_{(1)}^{(n-2)'}D_{(1)}^{(n-3)'}\right)ddP=0$$

$$\left(B_{(1)}^{(n-2)'}E_{(1)}^{(n-4)'}-E_{(1)}^{(n-2)'}B_{(1)}^{(n-4)'}\right)P-\left(C_{(1)}^{(n-2)'}E_{(1)}^{(n-4)'}-E_{(1)}^{(n-2)'}C_{(1)}^{(n-4)'}\right)dP$$
$$+\left(D_{(1)}^{(n-2)'}E_{(1)}^{(n-4)'}-E_{(1)}^{(n-2)'}D_{(1)}^{(n-4)'}\right)ddP=0$$

$$\left(B_{(1)}^{(n-2)'}E_{(1)}^{(n-5)'}-E_{(1)}^{(n-2)'}B_{(1)}^{(n-5)'}\right)P-\left(C_{(1)}^{(n-2)'}E_{(1)}^{(n-5)'}-E_{(1)}^{(n-2)'}C_{(1)}^{(n-5)'}\right)dP$$
$$+\left(D_{(1)}^{(n-2)'}E_{(1)}^{(n-5)'}-E_{(1)}^{(n-2)'}D_{(1)}^{(n-5)'}\right)ddP=0$$

- -

- -

$$\left(B_{(1)}^{(n-2)'}E_{(1)}^{3'}-E_{(1)}^{(n-2)'}B_{(1)}^{3'}\right)P-\left(C_{(1)}^{(n-2)'}E^{3'}-E_{(1)}^{(n-2)'}C_{(1)}^{3'}\right)dP$$
$$+\left(D_{(1)}^{(n-2)'}E_{(1)}^{3'}-E_{(1)}^{(n-2)'}D_{(1)}^{3'}\right)ddP=0$$

$$\left(B_{(1)}^{(n-2)'}E_{(1)}^{2'}-E_{(1)}^{(n-2)'}B_{(1)}^{2'}\right)P-\left(C_{(1)}^{(n-2)'}E^{2'}-E_{(1)}^{(n-2)'}C_{(1)}^{2'}\right)dP$$
$$+\left(D_{(1)}^{(n-2)'}E_{(1)}^{2'}-E_{(1)}^{(n-2)'}D_{(1)}^{2'}\right)ddP=0$$

$$\left(B_{(1)}^{(n-2)'}E_{(1)}^{1'}-E_{(1)}^{(n-2)'}B_{(1)}^{1'}\right)P-\left(C_{(1)}^{(n-2)'}E_{(1)}^{1'}-E_{(1)}^{(n-2)'}C_{(1)}^{1'}\right)dP$$
$$+\left(D_{(1)}^{(n-2)'}E_{(1)}^{1'}-E_{(1)}^{(n-2)'}D_{(1)}^{1'}\right)ddP=0$$

em

em numero de $2n - 5$, e que por mais ſimplicidade eſcreveremos como ſe ſegue

$$B_{(1)} P - C_{(1)} dP + D_{(1)} ddP = 0$$

$$B_{(2)} P - C_{(2)} dP + D_{(2)} ddP = 0$$

$$B_{(3)} P - C_{(3)} dP + D_{(3)} ddP = 0$$

- - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - -

$$B_{(n-5)} P - C_{(n-5)} dP + D_{(n-5)} ddP = 0$$

$$B_{(n-4)} P - C_{(n-4)} dP + D_{(n-4)} ddP = 0$$

$$B_{(n-3)} P - C_{(n-3)} dP + D_{(n-3)} ddP = 0$$

$$B'P - C'dP + D'ddP = 0$$

$$B'_{(1)} P - C'_{(1)} dP + D'_{(1)} ddP = 0$$

$$B'_{(2)} P - C'_{(2)} dP + D'_{(2)} ddP = 0$$

$$B'_{(3)} P - C'_{(3)} dP + D'_{(3)} ddP = 0$$

- - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - -

$$B'_{(n-5)} P - C_{(n-5)} dP + D'_{(n-5)} ddP = 0$$

$$B'_{(n-4)} P - C_{(n-4)} dP + D'_{(n-4)} ddP = 0$$

$$B'_{(n-3)} P - C'_{(n-3)} dP + D'_{(n-3)} ddP = 0$$

§. LV.

Eliminando d'eſtas Equações *ddP* teremos as ſeguintes

$$\left(B_{(1)}D_{(2)}-D_{(1)}B_{(2)}\right)P-\left(C_{(1)}D_{(2)}-D_{(1)}C_{(2)}\right)dP=0$$

$$\left(B_{(1)}D_{(3)}-D_{(1)}B_{(3)}\right)P-\left(C_{(1)}D_{(3)}-D_{(1)}C_{(3)}\right)dP=0$$

$$\left(B_{(1)}D_{(4)}-D_{(1)}B_{(4)}\right)P-\left(C_{(1)}D_{(4)}-D_{(1)}C_{(4)}\right)dP=0$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$\left(B_{(1)}D_{(n-5)}-D_{(1)}B_{(n-5)}\right)P-\left(C_{(1)}D_{(n-5)}-D_{(1)}C_{(n-5)}\right)dP=0$$

$$\left(B_{(1)}D_{(n-4)}-D_{(1)}B_{(n-4)}\right)P-\left(C_{(1)}D_{(n-4)}-D_{(1)}C_{(n-4)}\right)dP=0$$

$$\left(B_{(1)}D_{(n-3)}-D_{(1)}B_{(n-3)}\right)P-\left(C_{(1)}D_{(n-3)}-D_{(1)}C_{(n-3)}\right)dP=0$$

$$\left(B_{(1)}D'-D_{(1)}B'\right)P-\left(C_{(1)}D'-D_{(1)}C'\right)dP=0$$

$$\left(B'_{(1)}D'-D'_{(1)}B'\right)P-\left(C'_{(1)}D'-D'_{(1)}C'\right)dP=0$$

$$\left(B'_{(1)}D'_{(2)}-D'_{(1)}B'_{(2)}\right)P-\left(C'_{(1)}D'_{(2)}-D'_{(1)}C'_{(2)}\right)dP=0$$

$$\left(B'_{(1)}D'_{(3)}-D'_{(1)}B'_{(3)}\right)P-\left(C'_{(1)}D'_{(3)}-D'_{(1)}C'_{(3)}\right)dP=0$$

$$\left(B'_{(1)}D'_{(4)}-D'_{(1)}B'_{(4)}\right)P-\left(C'_{(1)}D'_{(4)}-D'_{(1)}C'_{(4)}\right)dP=0$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$\left(B'_{(1)}D'_{(n-5)}-D'_{(1)}B'_{(n-5)}\right)P-\left(C'_{(1)}D'_{(n-5)}-D'_{(1)}C'_{(n-5)}\right)dP=0$$

$$\left(B'_{(1)}D'_{(n-4)}-D'_{(1)}B'_{(n-4)}\right)P-\left(C'_{(1)}D'_{(n-4)}-D'_{(1)}C'_{(n-4)}\right)dP=0$$

$$\left(B'_{(1)}D'_{(n-3)}-D'_{(1)}B'_{(n-3)}\right)P-\left(C'_{(1)}D'_{(n-3)}-D'_{(1)}C'_{(n-3)}\right)dP=0$$

das

das quaes eliminando $\frac{dP}{P}$ se deduzem a $2n-7$ Equações, que passo a transcrever

$$\left(B_{(1)}C_{(2)} - C_{(1)}B_{(2)}\right)D_{(3)} - \left(B_{(1)}C_{(3)} - C_{(1)}B_{(3)}\right)D_{(2)} +$$
$$\left(B_{(2)}C_{(3)} - C_{(2)}B_{(3)}\right)D_{(1)} = 0$$

$$\left(B_{(1)}C_{(2)} - C_{(1)}B_{(2)}\right)D_{(4)} - \left(B_{(1)}C_{(4)} - C_{(1)}B_{(4)}\right)D_{(2)} +$$
$$\left(B_{(2)}C_{(4)} - C_{(2)}B_{(4)}\right)D_{(1)} = 0$$

$$\left(B_{(1)}C_{(2)} - C_{(1)}B_{(2)}\right)D_{(5)} - \left(B_{(1)}C_{(5)} - C_{(1)}B_{(5)}\right)D_{(2)} +$$
$$\left(B_{(2)}C_{(5)} - C_{(2)}B_{(5)}\right)D_{(1)} = 0$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$\left(B_{(1)}C_{(2)} - C_{(1)}B_{(2)}\right)D_{(n-5)} - \left(B_{(1)}C_{(n-5)} - C_{(1)}B_{(n-5)}\right)D_{(2)} +$$
$$\left(B_{(2)}C_{(n-5)} - C_{(2)}B_{(n-5)}\right)D_{(1)} = 0$$

$$\left(B_{(1)}C_{(2)} - C_{(1)}B_{(2)}\right)D_{(n-4)} - \left(B_{(1)}C_{(n-4)} - C_{(1)}B_{(n-4)}\right)D_{(2)} +$$
$$\left(B_{(2)}C_{(n-4)} - C_{(2)}B_{(n-4)}\right)D_{(1)} = 0$$

$$\left(B_{(1)}C_{(2)} - C_{(1)}B_{(2)}\right)D_{(n-3)} - \left(B_{(1)}C_{(n-3)} - C_{(1)}B_{(n-3)}\right)D_{(2)} +$$
$$\left(B_{(2)}C_{(n-3)} - C_{(2)}B_{(n-3)}\right)D_{(1)} = 0$$

$$\left(B_{(1)}C_{(2)} - C_{(1)}B_{(2)}\right)D' - \left(B_{(1)}C' - C_{(1)}B'\right)D_{(2)} +$$
$$\left(B_{(2)}C' - C_{(2)}B'\right)D'_{(1)} = 0$$

$\left(B'_{(1)}\right.$

$$\left(B'_{(1)}C'_{(2)} - C'_{(1)}B'_{(2)}\right) D' - \left(B'_{(1)} C' - C'_{(1)} B'\right) D'_{(2)} + \left(B'_{(2)}C' - C'_{(2)}B'\right) D'_{(1)} = 0$$

$$\left(B'_{(1)}C'_{(2)} - C'_{(1)} B'_{(2)}\right)D'_{(3)} - \left(B'_{(1)}C'_{(3)} - C'_{(1)}B'_{(3)}\right) D'_{(2)} + \left(B'_{(2)}C_{(3)} - C'_{(2)}B'_{(3)}\right)D'_{(1)} = 0$$

$$\left(B'_{(1)} C_{(2)} - C'_{(1)} B'_{(2)}\right)D'_{(4)} - \left(B'_{(1)}C'_{(4)} - C'_{(1)}B'_{(4)}\right)D'_{(2)} + \left(B'_{(2)}C'_{(4)} - C'_{(2)}B'_{(4)}\right)D'_{(1)} = 0$$

$$\left(B'_{(1)}C'_{(2)} - C'_{(1)} B'_{(2)}\right)D'_{(5)} - \left(B'_{(1)}C'_{(5)} - C'_{(1)}B'_{(5)}\right) D'_{(2)} + \left(B'_{(2)}C'_{(5)} - C'_{(2)}B'_{(5)}\right)D'_{(1)} = 0$$

\- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

\- - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$\left(B'_{(1)}C'_{(2)} - C'_{(1)}B'_{(2)}\right)D'_{(n-5)} - \left(B'_{(1)}C'_{(n-5)} - C'_{(1)}B'_{(n-5)}\right)D'_{(2)} + \left(B'_{(2)}C'_{(n-5)} - C'_{(2)} B'_{(n-5)}\right)D'_{(1)} = 0$$

$$\left(B'_{(1)}C'_{(2)} - C'_{(1)}B'_{(2)}\right)D'_{(n-4)} - \left(B'_{(1)}C_{(n-4)} - C_{(1)}B'_{(n-4)}\right) D'_{(2)} + \left(B'_{(2)}C'_{(n-4)} - C'_{(2)}B'_{(n-4)}\right)D'_{(1)} = 0$$

$$\left(B'_{(1)}C'_{(2)} - C'_{(1)}B'_{(2)}\right)D'_{(n-3)} - \left(B'_{(1)}C'_{(n-3)} - C_{(1)}B'_{(n-3)}\right)D'_{(2)} + \left(B'_{(2)}C'_{(n-3)} - C'_{(2)}B'_{(n-3)}\right)D'_{(1)} = 0$$

em que ſe comprehendem todas as condições, a que no prezente cazo devem ſatisfazer os coefficientes de dV.

§. LVI.

O Methodo, porque até aqui temos procedido, deixa ver aſſás claramente o que ſe deve praticar em todos os outros cazos, para ſe obterem as Equações de condiçaõ, a que qualquer Funcçaõ Fluxional *V* da ordem *n* deve ſatisfazer, ſe por ventura poder reduzir-ſe a Fluxaõ exacta de outra Funcçaõ Fluxional de qualquer ordem inferior a *n*, ſendo multiplicada por hum factor conveniente: e por tanto naõ devemos encher de mais formulas a preſente Memoria, já aſſás longa, e carregada de expreſsões analyticas: muito principalmente quando raras vezes acontecerá, que as queſtões, a que o methodo das Fluxões he applicavel, conduzam a Equações de ordem ſuperior á ſegunda, nem de mais de tres variaveis. Naõ ſerá porém inutil que advirtamos. I. Que huma vez que ſe tenha reconhecido, que a Funcçaõ propoſta *V*, ſuppoſta da ordem *n*, ſe pode reduzir pela multiplicaçaõ de hum factor conveniente a ſer Fluxaõ exacta de outra Funcçaõ Fluxional da ordem $n-m$; achada eſta, ſobre ella ſe devem praticar os meſmos exames, para que finalmente ſe poſſa obter a Fluente da ordem o. E II. Que para eſta Fluente ſer completa he precizo, que cada huma das Equações de condiçaõ, em que naõ entrarem Fluxões da ordem *n*, ſeja identica por ſi; e que todas as em que entrarem Fluxões da dita ordem ſe tornem identicas ſubſtituindo-ſe em lugar de huma d'eſſas Fluxões o ſeu valor tirado da Equaçaõ $V=0$. Naõ ſe verificando eſta identidade a Funcçaõ propoſta *V* naõ admitirá Fluente completa; poderá com tudo admitir huma ou mais Fluentes particulares, ſe as noſſas Equações de condiçaõ, a pezar de naõ ſerem identicas, tiverem lugar ao meſmo tempo, que a Equaçaõ $V=0$. Em todos os outros cazos a Funcçaõ *V* naõ admitirá fluente nem completa nem particular, e por tanto a Equaçaõ $V=0$ ſerá impoſſivel, iſto he, naõ admitirá Fluente alguma por eſte methodo; o que exprimiremos chamando-lhe imaginaria.

SECÇAÕ IV.

Applicaçaõ das Formulas precedentes ás Equações Fluxionaes de diversas ordens.

§. LVII.

Seja V huma Funcçaõ Fluxional da primeira ordem, que involva sómente duas variaveis x, e y; isto he, seja

$$V = Adx + Bdy = 0$$

tal porém que V naõ seja Fluxaõ exacta, e supponhamos que, sendo multiplicada por hum factor conveniente P, fique sendo

$$PV = dZ.$$

Para que esta supposiçaõ se verifique, será precizo que os coefficientes de dV satisfaçaõ as Equações de condiçaõ do §. XLII., as quaes neste cazo se reduzem sómente a huma

$$N^{2'}\left(P^{1'} - dP^{2'}\right) - P^{2'}\left(N^{1'} - dN^{2'}\right) = 0$$

que pela substituiçaõ dos valores de $N^{1'}$; $N^{2'}$; $P^{1'}$; e $P^{2'}$; se converte em

$$A\left(\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx}\right)dx - B\left(\frac{dB}{dx} - \frac{dA}{dy}\right)dy = 0$$

Equaçaõ, que sendo devidida por $\left(\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx}\right)$, se reduz á mesma proposta

$$Adx + Bdy = 0$$

o que nos mostra, que naõ ha Equaçaõ alguma Fluxional da primeira ordem, em que entrem sómente duas variaveis, a qual, sendo multiplicada por hum factor conveniente, se naõ

naõ poſſa reduzir a Fluxaõ exacta; por iſſo que a ſuppoſta condiçaõ he rigoroſamente a meſma Equaçaõ propoſta.

§. LVII.

Sendo $V = Adx + Bdy + Cdz = 0$, e conſervando todas as ſuppoſições do §. antecedente, as Equações de condiçaõ, a que os coefficientes de dV devem ſatisfazer; ſaõ

$$N^{2'}(P^{1'} - dP^{2'}) - P^{2'}(N^{1'} - dN^{2'}) = 0$$

$$P^{2'}(Q^{1'} - dQ^{2'}) - Q^{2'}(P^{1'} - dP^{2'}) = 0$$

as quaes pela ſubſtituiçaõ dos valores de $N^{1'}$; $N^{2'}$; $P^{1'}$; $P^{2'}$; $Q^{1'}$; e $Q^{2'}$ ſe reduzem a

$$A\left(\left(\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx}\right)dx + \left(\frac{dC}{dy} - \frac{dB}{dz}\right)dz\right) - B\left(\left(\frac{dB}{dx} - \frac{dA}{dy}\right)dy + \left(\frac{dC}{dx} - \frac{dA}{dz}\right)dz\right) = 0$$

$$B\left(\left(\frac{dA}{dz} - \frac{dC}{dx}\right)dx + \left(\frac{dB}{dz} - \frac{dC}{dy}\right)dy\right) - C\left(\left(\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx}\right)dx + \left(\frac{dC}{dy} - \frac{dB}{dz}\right)dz\right) = 0$$

e huma e outra, ſubſtituindo nellas por dy o ſeu valor tirado da propoſta, ſe convertem em

$$A\left(\frac{dB}{dz} - \frac{dC}{dy}\right) - B\left(\frac{dA}{dz} - \frac{dC}{dx}\right) + C\left(\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx}\right) = 0.$$

§. LIX.

Sendo $V = Adx + Bdy + Cdz + Ddu = 0$, as Equações de condiçaõ, a que os coefficientes de dV devem ſatisfazer, para que V poſſa reduzirſe a Fluxaõ exacta ſendo multiplicada por hum factor conveniente, ſaõ

$$N^{2'}(P^{1'} - dP^{2'}) - P^{2'}(N^{1'} - dN^{2'}) = 0$$

$N^{2'}$

$$P^{2'}(Q^{1'}-dQ^{2'})-Q^{2'}(P^{1'}-dP^{2'})=0$$

$$Q^{2'}(R^{1'}-dR^{2'})-R^{2'}(Q^{1'}-dQ^{2'})=0$$

as quaes, ſubſtituindo em lugar de $N^{1'}$; $N^{2'}$; $P^{1'}$; $P^{2'}$; $Q^{1'}$; $Q^{2'}$; $R^{1'}$; e $R^{2'}$; os ſeus valores tirados da Fluxaõ de V, ſe convertem em

$$A\left((\frac{dA}{dy}-\frac{dB}{dx})\,dx+(\frac{dC}{dy}-\frac{dB}{dz})\,dz+(\frac{dD}{dy}-\frac{dB}{du})\,du\right)$$

$$-B\left((\frac{dB}{dx}-\frac{dA}{dy})\,dy+(\frac{dC}{dx}-\frac{dA}{dz})\,dz+(\frac{dD}{dx}-\frac{dA}{du})du\right)=0$$

$$B\left((\frac{dA}{dz}-\frac{dC}{dx})\,dx+(\frac{dB}{dz}-\frac{dC}{dy})\,dy+(\frac{dD}{dz}-\frac{dC}{du})\,du\right)$$

$$-C\left((\frac{dA}{dy}-\frac{dB}{dx})\,dx+(\frac{dC}{dy}-\frac{dB}{dz})\,dz+(\frac{dD}{dy}-\frac{dB}{du})du\right)=0$$

$$C\left((\frac{dA}{du}-\frac{dD}{dx})\,dx+(\frac{dB}{du}-\frac{dD}{dy})\,dy+(\frac{dC}{du}-\frac{dD}{dz})\,dz\right)$$

$$-D\left((\frac{dA}{dz}-\frac{dC}{dx})\,dx+(\frac{dB}{dz}-\frac{dC}{dy})\,dy+(\frac{dD}{dz}-\frac{dC}{du})du\right)=0$$

e ſubſtituindo por dy na primeira, por dz na ſegunda, e por du na terceira os ſeus valores tirados da Equaçaõ $V=0$, ellas ſe reduzem a

$$\left(A(\frac{dB}{dz}-\frac{dC}{dy})-B(\frac{dA}{dz}-\frac{dC}{dx})+C(\frac{dA}{dy}-\frac{dB}{dx})\right)dz$$

$$+\left(A(\frac{dB}{du}-\frac{dD}{dy})-B(\frac{dA}{du}-\frac{dD}{dx})+D(\frac{dA}{dy}-\frac{dB}{dx})\right)du=0$$

$$\left(A(\frac{dB}{dz}-\frac{dC}{dy})-B(\frac{dA}{dz}-\frac{dC}{dx})+C(\frac{dA}{dy}-\frac{dB}{dx})\right)dx$$

+

$$+\left(B\left(\frac{dC}{du}-\frac{dD}{dz}\right)-C\left(\frac{dB}{du}-\frac{dD}{dy}\right)+D\left(\frac{dB}{dz}-\frac{dC}{dy}\right)\right)du=0$$

$$\left(A\left(\frac{dC}{du}-\frac{dD}{dz}\right)-C\left(\frac{dA}{du}-\frac{dD}{dx}\right)+D\left(\frac{dA}{dz}-\frac{dC}{dx}\right)\right)dx$$

$$+\left(B\left(\frac{dC}{du}-\frac{dD}{dz}\right)-C\left(\frac{dB}{du}-\frac{dD}{dy}\right)+D\left(\frac{dB}{dz}-\frac{dC}{dy}\right)\right)dy=0$$

Equações, que por iſſo que devem ſer identicas, e que nas quantidades, que ſe achaõ entre os parenthezes, naõ entraõ as Fluxões dx, dy, dz, e du, nos daõ as ſeguintes quatro Equações de condiçaõ

$$A\left(\frac{dB}{dz}-\frac{dC}{dy}\right)-B\left(\frac{dA}{dz}-\frac{dC}{dx}\right)+C\left(\frac{dA}{dy}-\frac{dB}{dx}\right)=0$$

$$A\left(\frac{dB}{du}-\frac{dD}{dy}\right)-B\left(\frac{dA}{du}-\frac{dD}{dx}\right)+D\left(\frac{dA}{dy}-\frac{dB}{dx}\right)=0$$

$$A\left(\frac{dC}{du}-\frac{dD}{dz}\right)-C\left(\frac{dA}{du}-\frac{dD}{dx}\right)+D\left(\frac{dA}{dz}-\frac{dC}{dx}\right)=0$$

$$B\left(\frac{dC}{du}-\frac{dD}{dz}\right)-C\left(\frac{dB}{du}-\frac{dD}{dy}\right)+D\left(\frac{dB}{dz}-\frac{dC}{dy}\right)=0$$

que rigoroſamente ſe reduzem ás tres primeiras; por quanto a 4.ª ſe deduz das antecedentes multiplicando a 3.ª por B, a 2.ª por C, e a 1.ª por D; tirando o ſegundo producto do primeiro, e ſubſtituindo no reſto em lugar dos ultimos dois termos, que ſaõ $DB\left(\frac{dA}{dz}-\frac{dC}{dx}\right)-DC\left(\frac{dA}{dy}-\frac{dB}{dx}\right)$, o ſeu valor $DA\left(\frac{dB}{dz}-\frac{dC}{dy}\right)$ tirado do ultimo producto, e devidindo o reſultado por A.

§. LX.

Se na Formula $Adx + Bdy + Cdz = 0$ do §. LVIII suppofermos $A = 1$; o que equivale a fuppor toda a Equaçaõ devidida pelo coefficiente do primeiro termo, e que B fica reprefentando o novo coefficiente do fegundo, e C o novo coefficiente do terceiro: entaõ a Equaçaõ feria

$$dx + Bdy + Cdz = 0$$

e a Equaçaõ de condiçaõ, que deverá verificar-fe, para que ella poffa reduzir-fe a Fluxaõ exacta, fendo multiplicada por hum factor conveniente, ferá

$$B\frac{dC}{dx} - C\frac{dB}{dx} + \frac{dB}{dz} - \frac{dC}{dy} = 0$$

§. LXI.

Fazendo huma femelhante fuppofiçaõ na Formula do §. LIX, teremos em logar da Equaçaõ allí propofta

$$dx + Bdy + Cdz + Ddu = 0$$

e as Equaçóes de condiçaõ, a que os feus coefficientes deveráõ fatisfazer, para que ella poffa reduzir-fe a Fluxaõ exacta, fendo multiplicada por hum factor conveniente, feráõ

$$B\frac{dC}{dx} - C\frac{dB}{dx} + \frac{dB}{dz} - \frac{dC}{dy} = 0$$

$$B\frac{dD}{dx} - D\frac{dB}{dx} + \frac{dB}{du} - \frac{dD}{dy} = 0$$

$$C\frac{dD}{dx} - D\frac{dC}{dx} + \frac{dC}{du} - \frac{dD}{dz} = 0$$

Equaçóes, que faõ as mefmas, que M. Fontaine achou por outro muito differente caminho no feu primeiro Methodo do Calculo Integral, e que affim deduzidas dos principios de

de M. de Condorcet poderiaõ juntamente com as outras, que por ſemelhante modo hiremos deduzindo nos §§. ſeguintes, tirar ao meſmo Fontaine da duvida, em que parecia eſtar, de ſerem ou naõ eſtes principios ſufficientes para reſolver o Problema, que elle ennuncia na ſua Memoria impreſſa na Collecçaõ da Academia das Sciencias de Pariz no volume do anno de 1767, e para cuja ſoluçaõ convidava Condorcet.

§. LXII.

Sendo $V = Addx + Bddy + Cdx^2 + Ddy^2 + Edxdy = 0$, e naõ ſendo Fluxaõ exacta de Funcçaõ alguma da ordem 0, mas ſim huma expreſſaõ tal que multiplicada por hum factor conveniente P fique

$$PV = ddZ$$

entaõ ſerá precizo, que os coefficientes de dV ſatisfáçaõ ás Equações de condiçaõ do §. XLII, as quaes neſte cazo ſe reduzem ás tres ſeguintes

$$2N^{3\prime}(2N^{1\prime} - dN^{2\prime}) - N^{2\prime}(N^{2\prime} - 2dN^{3\prime}) = 0$$

$$N^{1\prime}(P^{2\prime} - 2dP^{3\prime}) - P^{3\prime}(N^{2\prime} - 2dN^{3\prime}) = 0$$

$$2P^{3\prime}(2P^{1\prime} - dP^{2\prime}) - P^{2\prime}(P^{2\prime} - 2dP^{3\prime}) = 0$$

Equações, que ſubſtituindo em logar de $N^{1\prime}$; $N^{2\prime}$; $N^{3\prime}$; $P^{1\prime}$; $P^{2\prime}$; e $P^{1\prime}$; os ſeus valores tirados da Fluxaõ de V, ſe convertem em

$$4A\left(\frac{dA}{dx} - C\right)ddx + 4A\left(\frac{dB}{dx} - \frac{1}{2}E\right)ddy + 4C\left(\frac{dA}{dx} - C\right)dx^2$$

$$+ 4\left(A\left(\frac{dD}{dx} - \frac{1}{2}\frac{dE}{dy}\right) - \frac{1}{2}E\left(\frac{1}{2}E - \frac{dA}{dy}\right)\right)dy^2 - 4\left(A\left(\frac{dC}{dy} - \frac{1}{2}\frac{dE}{dx}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}E\left(C - \frac{dA}{dx}\right) + C\left(\frac{1}{2}E - \frac{dA}{dy}\right)\right) dxdy = 0$$

$$2\left(A(D - \frac{dB}{dy}) - B(\frac{1}{2}E - \frac{dA}{dy})\right)dy - 2\left(B(C - \frac{dA}{dx}) - A(\frac{1}{2}E - \frac{dB}{dx})\right)dx = 0$$

$$4B\left(\frac{dB}{dy} - D\right)ddy + 4B\left(\frac{dA}{dy} - \frac{1}{2}E\right)ddx + 4D\left(\frac{dB}{dy} - D\right)dy^2 + 4\left(B(\frac{dC}{dy} - \frac{1}{2}\frac{dE}{dx}) - \frac{1}{2}E(\frac{1}{2}E - \frac{dB}{dx})\right)dx^2 - 4\left(B(\frac{dD}{dx} - \frac{1}{2}\frac{dE}{dy}) + \frac{1}{2}E(D - \frac{dB}{dy}) + D(\frac{1}{2}E - \frac{dB}{dx})\right)dxdy = 0$$

Devidindo a 1.ª, e a 3.ª por 4, e a 2.ª por 2; fubftituindo na 1.ª o valor de ddx tirado da propofta, e na 3.ª o valor de ddy tirado da mefma proprofta, ellas fe converteráõ em

$$\left(B(C - \frac{dA}{dx}) - A(\frac{1}{2}E - \frac{dB}{dx})\right)ddy + \left(A(\frac{dD}{dx} - \frac{1}{2}\frac{dE}{dy}) - \frac{1}{2}E(\frac{1}{2}E - \frac{dA}{dy}) + D(C - \frac{dA}{dx})\right)dy^2 - \left(A(\frac{dC}{dy} - \frac{1}{2}\frac{dE}{dx}) - \frac{1}{2}E(C - \frac{dA}{dx}) + C(\frac{1}{2}E - \frac{dA}{dy})\right)dxdy = 0$$

$$\left(A(D - \frac{dB}{dy}) - B(\frac{1}{2}E - \frac{dA}{dx})\right)dy + \left(B(C - \frac{dA}{dx}) - A(\frac{1}{2}E - \frac{dB}{dx})\right)dx = 0$$

$$\left(A(D - \frac{dB}{dy}) - B(\frac{1}{2}E - \frac{dA}{dy})\right)ddx + \left(B(\frac{dC}{dy} - \frac{1}{2}\frac{dE}{dx}) - \frac{1}{2}E(\frac{1}{2}E - \frac{dB}{dx}) + C(D - \frac{dB}{dy})\right)dx^2 - \left(B(\frac{dD}{dx} - \frac{1}{2}\frac{dE}{dy}) - \frac{1}{2}E(D - \frac{dB}{dy}) + D(\frac{1}{2}E - \frac{dB}{dx})\right)dxdy = 0$$

Equa-

Equações que devendo ſer identicas daõ as ſeguintes ſeis, a que os coefficientes da propoſta devem ſatisfazer

$$B\left(C-\frac{dA}{dx}\right)-A\left(\frac{1}{2}E-\frac{dB}{dx}\right)=0$$

$$A\left(D-\frac{dB}{dy}\right)-B\left(\frac{1}{2}E-\frac{dA}{dy}\right)=0$$

$$A\left(\frac{dD}{dx}-\frac{1}{2}\frac{dE}{dy}\right)-\frac{1}{2}E\left(\frac{1}{2}E-\frac{dA}{dy}\right)+D\left(C-\frac{dA}{dx}\right)=0$$

$$A\left(\frac{dC}{dy}-\frac{1}{2}\frac{dE}{dx}\right)-\frac{1}{2}E\left(C-\frac{dA}{dx}\right)+C\left(\frac{1}{2}E-\frac{dA}{dy}\right)=0$$

$$B\left(\frac{dC}{dy}-\frac{1}{2}\frac{dE}{dx}\right)-\frac{1}{2}E\left(\frac{1}{2}E-\frac{dB}{dx}\right)+C\left(D-\frac{dB}{dy}\right)=0$$

$$B\left(\frac{dD}{dx}-\frac{1}{2}\frac{dE}{dy}\right)-\frac{1}{2}E\left(D-\frac{dB}{dy}\right)+D\left(\frac{1}{2}E-\frac{dB}{dx}\right)=0$$

das quaes ſómente as duas primeiras exprimem condições realmente deſtinctas; por quanto a terceira e a quinta ſe obtem, tomando a ſomma e a differença da Fluxaõ parcial da primeira relativamente a y devidida por dy, e da Fluxaõ parcial da ſegunda relativamente a x devidida por dx, fazendo em huma e outra das Equações, que por eſte modo ſe achaõ, em lugar de $\frac{dA}{dx}$; $\frac{dB}{dx}$; $\frac{dA}{dy}$; $\frac{dB}{dy}$; e $\frac{ddA}{dxdx}$ as convenientes ſubſtituições dos ſeus valores tirados das meſmas duas primeiras. A quarta, e a ſexta ſe obtem ſubſtituindo na terceira e quinta em lugar de $\left(\frac{1}{2}E-\frac{dA}{dy}\right)$; $\left(C-\frac{dA}{dx}\right)$; $\left(\frac{1}{2}E-\frac{dB}{dx}\right)$; e $\left(D-\frac{dB}{dy}\right)$ os ſeus valores tirados tambem das duas primeiras.

§. LXIII.

Sendo $V = Addx + Bddy + Cddz + Ddx^2 + Edy^2 + Fdz^2 + Gdxdy + Hdxdz + Idydz = 0$, e conſervando todas as ſuppoſições do §. antecedente; as Equações de condiçaõ, a que os coefficientes de dV devem ſatisfazer, ſaõ

$$2N^{3\prime}\left(2N^{1\prime} - dN^{2\prime}\right) - N^{2\prime}\left(N^{2\prime} - 2dN^{3\prime}\right) = 0$$

$$N^{3\prime}\left(P^{2\prime} - 2dP^{3\prime}\right) - P^{3\prime}\left(N^{2\prime} - 2dN^{3\prime}\right) = 0$$

$$2P^{3\prime}\left(2P^{1\prime} - dP^{2\prime}\right) - P^{2\prime}\left(P^{2\prime} - 2dP^{3\prime}\right) = 0$$

$$P^{3\prime}\left(Q^{2\prime} - 2dQ^{3\prime}\right) - Q^{3\prime}\left(P^{2\prime} - 2dP^{3\prime}\right) = 0$$

$$2Q^{3\prime}\left(2Q^{1\prime} - dQ^{2\prime}\right) - Q^{2\prime}\left(Q^{2\prime} - 2dQ^{3\prime}\right) = 0$$

as quaes ſubſtituindo em lugar de $N^{1\prime}$; $N^{2\prime}$; $N^{3\prime}$; $P^{1\prime}$; $P^{2\prime}$; $P^{3\prime}$; $Q^{1\prime}$; $Q^{2\prime}$; e $Q^{3\prime}$ os ſeus valores tirados da Fluxaõ de V ſe convertem em

$$4A\left(\frac{dA}{dx} - D\right)ddx + 4A\left(\frac{dB}{dx} - \frac{1}{2}G\right)ddy + 4A\left(\frac{dC}{dx} - \frac{1}{2}H\right)ddz$$
$$- 4D\left(D - \frac{dA}{dx}\right)dx^2 + 4\left(A\left(\frac{dE}{dx} - \frac{1}{2}\frac{dG}{dy}\right) - \frac{1}{2}G\left(\frac{1}{2}G - \frac{dA}{dy}\right)\right)dy^2$$
$$+ 4\left(A\left(\frac{dF}{dx} - \frac{1}{2}\frac{dH}{dz}\right) - \frac{1}{2}H\left(\frac{1}{2}H - \frac{dA}{dz}\right)\right)dz^2 - 4\left(A\left(\frac{dD}{dy} - \frac{1}{2}\frac{dG}{dx}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}G\left(D - \frac{dA}{dy}\right) + D\left(\frac{1}{2}G - \frac{dA}{dy}\right)\right)dxdy - 4\left(A\left(\frac{dD}{dz} - \frac{1}{2}\frac{dH}{dx}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}H\left(D - \frac{dA}{dx}\right) + D\left(\frac{1}{2}H - \frac{dA}{dz}\right)\right)dxdz + 4\left(A\left(\frac{dI}{dx} - \frac{1}{2}\frac{dG}{dz} - \frac{1}{2}\frac{dH}{dy}\right)\right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}G\left(\frac{1}{2}H - \frac{dA}{dz}\right) - \frac{1}{2}H\left(\frac{1}{2}G - \frac{dA}{dy}\right)\right)dydz = 0$$

$$2\Big(A(E-\frac{dB}{dy})-B(\frac{1}{2}G-\frac{dA}{dy})\Big)dy-2\Big(B(D-\frac{dA}{dx})$$
$$-A(\frac{1}{2}G-\frac{dB}{dx})\Big)dx+2\Big(A(\frac{1}{2}I-\frac{dB}{dz})-B(\frac{1}{2}H-\frac{dA}{dz})\Big)dz=0$$

$$4B\Big(\frac{dB}{dy}-E\Big)ddy+4B\Big(\frac{dA}{dy}-\frac{1}{2}G\Big)ddx+4B\Big(\frac{dC}{dy}-\frac{1}{2}I\Big)ddz$$
$$-4E\Big(E-\frac{dB}{dy}\Big)dy^2+4\Big(B(\frac{dD}{dy}-\frac{1}{2}\frac{dG}{dx})-\frac{1}{2}G(\frac{1}{2}G-\frac{dB}{dx})\Big)dx^2$$
$$+4\Big(B(\frac{dF}{dy}-\frac{1}{2}\frac{dI}{dz})-\frac{1}{2}I(\frac{1}{2}I-\frac{dB}{dz})\Big)dz^2-4\Big(B(\frac{dE}{dx}-\frac{1}{2}\frac{dG}{dy})$$
$$+\frac{1}{2}G(E-\frac{dB}{dy})+E(\frac{1}{2}G-\frac{dB}{dx})\Big)dxdy-4\Big(B(\frac{dE}{dz}-\frac{1}{2}\frac{dI}{dy})$$
$$+\frac{1}{2}I(E-\frac{dB}{dy})+E(\frac{1}{2}I-\frac{dB}{dz})\Big)dydz+4\Big(B(\frac{dH}{dy}-\frac{1}{2}\frac{dG}{dz}-\frac{1}{2}\frac{dI}{dx})$$
$$-\frac{1}{2}G(\frac{1}{2}I-\frac{dB}{dz})-\frac{1}{2}I(\frac{1}{2}G-\frac{dB}{dx})\Big)dxdz=0$$

$$2\Big(B(F-\frac{dC}{dz})-C(\frac{1}{2}I-\frac{dB}{dz})\Big)dz-2\Big(C(E-\frac{dB}{dy})$$
$$-B(\frac{1}{2}I-\frac{dC}{dy})\Big)dy+2\Big(B(\frac{1}{2}H-\frac{dC}{dx})-C(\frac{1}{2}G-\frac{dB}{dx})\Big)dx=0$$

$$4C\Big(\frac{dC}{dz}-F\Big)ddz+4C\Big(\frac{dA}{dz}-\frac{1}{2}H\Big)ddx+4C\Big(\frac{dB}{dz}-\frac{1}{2}I\Big)ddy$$
$$-4F\Big(F-\frac{dC}{dz}\Big)dz^2+4\Big(C(\frac{dD}{dz}-\frac{1}{2}\frac{dH}{dx})-\frac{1}{2}H(\frac{1}{2}H-\frac{dC}{dx})\Big)dx^2$$
$$+4\Big(C(\frac{dE}{dz}-\frac{1}{2}\frac{dI}{dy})-\frac{1}{2}I(\frac{1}{2}I-\frac{dC}{dy})\Big)dy^2-4\Big(C(\frac{dF}{dx}-\frac{1}{2}\frac{dH}{dz})$$
$$+\frac{1}{2}H(F-\frac{dC}{dz})+F(\frac{1}{2}H-\frac{dC}{dx})\Big)dxdz-4\Big(C(\frac{dF}{dy}-\frac{1}{2}\frac{dI}{dz})$$

+

$$+\frac{1}{2}I(F-\frac{dC}{dz})+F(\frac{1}{2}I-\frac{dC}{dy})\Big)dydz+4\Big(C(\frac{dG}{dz}-\frac{1}{2}\frac{dH}{dy}-\frac{1}{2}\frac{dI}{dx})$$

$$-\frac{1}{2}H(\frac{1}{2}I-\frac{dC}{dy})-\frac{1}{2}I(\frac{1}{2}H-\frac{dC}{dx})\Big)dxdy=0$$

Devidindo a 1.ª, a 3.ª, e a 5.ª d'estas Equações pelo numero 4; e a 2.ª, e 4.ª pelo numero 2; e substituindo por *ddx* na 1.ª, por *ddy* na 3.ª, e por *ddz* na 5.ª os seus valores, tirados da proposta $V=0$, ellas se convertem em

$$\Big(B(D-\frac{dA}{dx})-A(\frac{1}{2}G-\frac{dB}{dx})\Big)ddy+\Big(C(D-\frac{dA}{dx})$$

$$-A(\frac{1}{2}H-\frac{dC}{dx})\Big)ddz+\Big(A(\frac{dE}{dx}-\frac{1}{2}\frac{dG}{dy})-\frac{1}{2}G(\frac{1}{2}G-\frac{dA}{dy})$$

$$+E(D-\frac{dA}{dx})\Big)dy^2+\Big(A(\frac{dF}{dx}-\frac{1}{2}\frac{dH}{dz})-\frac{1}{2}H(\frac{1}{2}H-\frac{dA}{dz})$$

$$+F(D-\frac{dA}{dx})\Big)dz^2-\Big(A(\frac{dD}{dy}-\frac{1}{2}\frac{dG}{dx})-\frac{1}{2}G(D-\frac{dA}{dx})$$

$$+D(\frac{1}{2}G-\frac{dA}{dy})\Big)dxdy-\Big(A(\frac{dD}{dz}-\frac{1}{2}\frac{dH}{dx})-\frac{1}{2}H(D-\frac{dA}{dx})$$

$$+D(\frac{1}{2}H-\frac{dA}{dz})\Big)dxdz+\Big(A(\frac{dI}{dx}-\frac{1}{2}\frac{dG}{dz}-\frac{1}{2}\frac{dH}{dy})$$

$$-\frac{1}{2}G(\frac{1}{2}H-\frac{dA}{dz})-\frac{1}{2}H(\frac{1}{2}G-\frac{dA}{dy})+I(D-\frac{dA}{dx})\Big)dydz=0$$

$$\Big(A(E-\frac{dB}{dy})-B(\frac{1}{2}G-\frac{dA}{dy})\Big)dy-\Big(B(D-\frac{dA}{dx})$$

$$-A(\frac{1}{2}G-\frac{dB}{dx})\Big)dx+\Big(A(\frac{1}{2}I-\frac{dB}{dz})-B(\frac{1}{2}H-\frac{dA}{dz})\Big)dz=0$$

$$\Big(A(E-\frac{dB}{dy})-B(\frac{1}{2}G-\frac{dA}{dy})\Big)ddx+\Big(C(E-\frac{dB}{dy})$$

$$-B(\frac{1}{2}I-\frac{dC}{dy})\Big)ddz+\Big(B(\frac{dD}{dy}-\frac{1}{2}\frac{dG}{dx})-\frac{1}{2}G(\frac{1}{2}G-\frac{dB}{dx})$$

+

$$+ D(E - \frac{dB}{dy})\Big) dx^2 + \Big(B(\frac{dF}{dy} - \frac{1}{2}\frac{dI}{dz}) - \frac{1}{2} I(\frac{1}{2} I - \frac{dB}{dz})$$

$$+ F(E - \frac{dB}{dy})\Big) dz^2 - \Big(B(\frac{dE}{dx} - \frac{1}{2}\frac{dG}{dy}) - \frac{1}{2} G(E - \frac{dB}{dy})$$

$$+ E(\frac{1}{2} G - \frac{dB}{dx})\Big) dxdy - \Big(B(\frac{dE}{dz} - \frac{1}{2}\frac{dI}{dy}) - \frac{1}{2} I(E - \frac{dB}{dy})$$

$$+ E(\frac{1}{2} I - \frac{dB}{dz})\Big) dydz + \Big(B(\frac{dH}{dy} - \frac{1}{2}\frac{dG}{dz} - \frac{1}{2}\frac{dI}{dx})$$

$$- \frac{1}{2} G(\frac{1}{2} I - \frac{dB}{dz}) - \frac{1}{2} I(\frac{1}{2} G - \frac{dB}{dx}) + H(E - \frac{dB}{dy})\Big) dxdz = 0$$

$$\Big(B(F - \frac{dC}{dz}) - C(\frac{1}{2} I - \frac{dB}{dz})\Big) dz - \Big(C(E - \frac{dB}{dy})$$

$$- B(\frac{1}{2} I - \frac{dC}{dy})\Big) dy + \Big(B(\frac{1}{2} H - \frac{dC}{dx}) - C(\frac{1}{2} G - \frac{dB}{dx})\Big) dx = 0$$

$$\Big(A(F - \frac{dC}{dz}) - C(\frac{1}{2} H - \frac{dA}{dz})\Big) ddx + \Big(B(F - \frac{dC}{dz})$$

$$- C(\frac{1}{2} I - \frac{dB}{dz})\Big) ddy + \Big(C(\frac{dD}{dz} - \frac{1}{2}\frac{dH}{dx}) - \frac{1}{2} H(\frac{1}{2} H - \frac{dC}{dx})$$

$$+ D(F - \frac{dC}{dz})\Big) dx^2 + \Big(C(\frac{dE}{dz} - \frac{1}{2}\frac{dI}{dy}) - \frac{1}{2} I(\frac{1}{2} I - \frac{dC}{dy})$$

$$+ E(F - \frac{dC}{dz})\Big) dy^2 - \Big(C(\frac{dF}{dx} - \frac{1}{2}\frac{dH}{dz}) - \frac{1}{2} H(F - \frac{dC}{dz})$$

$$+ F(\frac{1}{2} H - \frac{dC}{dx})\Big) dxdz - \Big(C(\frac{dF}{dy} - \frac{1}{2}\frac{dI}{dz}) - \frac{1}{2} I(F - \frac{dC}{dz})$$

$$+ F(\frac{1}{2} I - \frac{dC}{dy})\Big) dydz + \Big(C(\frac{dG}{dz} - \frac{1}{2}\frac{dH}{dy} - \frac{1}{2}\frac{dI}{dx})$$

$$- \frac{1}{2} H(\frac{1}{2} I - \frac{dC}{dy}) - \frac{1}{2} I(\frac{1}{2} H - \frac{dC}{dx}) + G(F - \frac{dC}{dz})\Big) dxdy = 0$$

Equações, que devendo ſer identicas nos daõ as ſeguintes

condições expreſſadas nas 23. Equações, que paſſamos a tranſcrever.

$$B\left(D - \frac{dA}{dx}\right) - A\left(\frac{1}{2}G - \frac{dB}{dx}\right) = 0$$

$$C\left(D - \frac{dA}{dx}\right) - A\left(\frac{1}{2}H - \frac{dC}{dx}\right) = 0$$

$$A\left(E - \frac{dB}{dy}\right) - B\left(\frac{1}{2}G - \frac{dA}{dy}\right) = 0$$

$$C\left(E - \frac{dB}{dy}\right) - B\left(\frac{1}{2}I - \frac{dC}{dy}\right) = 0$$

$$A\left(F - \frac{dC}{dz}\right) - C\left(\frac{1}{2}H - \frac{dA}{dz}\right) = 0$$

$$B\left(F - \frac{dC}{dz}\right) - C\left(\frac{1}{2}I - \frac{dB}{dz}\right) = 0$$

$$A\left(\frac{1}{2}I - \frac{dB}{dz}\right) - B\left(\frac{1}{2}H - \frac{dA}{dz}\right) = 0$$

$$B\left(\frac{1}{2}H - \frac{dC}{dx}\right) - C\left(\frac{1}{2}G - \frac{dB}{dx}\right) = 0$$

$$A\left(\frac{dE}{dx} - \frac{1}{2}\frac{dG}{dy}\right) - \frac{1}{2}G\left(\frac{1}{2}G - \frac{dA}{dy}\right) + E\left(D - \frac{dA}{dx}\right) = 0$$

$$A\left(\frac{dF}{dx} - \frac{1}{2}\frac{dH}{dz}\right) - \frac{1}{2}H\left(\frac{1}{2}H - \frac{dA}{dz}\right) + F\left(D - \frac{dA}{dx}\right) = 0$$

$$A\left(\frac{dD}{dy} - \frac{1}{2}\frac{dG}{dx}\right) - \frac{1}{2}G\left(D - \frac{dA}{dx}\right) + D\left(\frac{1}{2}G - \frac{dA}{dy}\right) = 0$$

$$A\left(\frac{dD}{dz} - \frac{1}{2}\frac{dH}{dx}\right) - \frac{1}{2}H\left(D - \frac{dA}{dx}\right) + D\left(\frac{1}{2}H - \frac{dA}{dz}\right) = 0$$

$$B\left(\frac{dD}{dy} - \frac{1}{2}\frac{dG}{dx}\right) - \frac{1}{2}G\left(\frac{1}{2}G - \frac{dB}{dx}\right) + D\left(E - \frac{dB}{dy}\right) = 0$$

$$B\left(\frac{dF}{dy}-\frac{1}{2}\frac{dI}{dz}\right)-\frac{1}{2}I\left(\frac{1}{2}I-\frac{dB}{dz}\right)+F\left(E-\frac{dB}{dy}\right)=0$$

$$B\left(\frac{dE}{dx}-\frac{1}{2}\frac{dG}{dy}\right)-\frac{1}{2}G\left(E-\frac{dB}{dy}\right)+E\left(\frac{1}{2}G-\frac{dB}{dx}\right)=0$$

$$B\left(\frac{dE}{dz}-\frac{1}{2}\frac{dI}{dy}\right)-\frac{1}{2}I\left(E-\frac{dB}{dy}\right)+E\left(\frac{1}{2}I-\frac{dB}{dz}\right)=0$$

$$C\left(\frac{dD}{dz}-\frac{1}{2}\frac{dH}{dx}\right)-\frac{1}{2}H\left(\frac{1}{2}H-\frac{dC}{dx}\right)+D\left(F-\frac{dC}{dz}\right)=0$$

$$C\left(\frac{dE}{dz}-\frac{1}{2}\frac{dI}{dy}\right)-\frac{1}{2}I\left(\frac{1}{2}I-\frac{dC}{dy}\right)+E\left(F-\frac{dC}{dz}\right)=0$$

$$C\left(\frac{dF}{dx}-\frac{1}{2}\frac{dH}{dz}\right)-\frac{1}{2}H\left(F-\frac{dC}{dz}\right)+F\left(\frac{1}{2}H-\frac{dC}{dx}\right)=0$$

$$C\left(\frac{dF}{dy}-\frac{1}{2}\frac{dI}{dz}\right)-\frac{1}{2}I\left(F-\frac{dC}{dz}\right)+F\left(\frac{1}{2}I-\frac{dC}{dy}\right)=0$$

$$A\left(\frac{dI}{dx}-\frac{1}{2}\frac{dG}{dz}-\frac{1}{2}\frac{dH}{dy}\right)-\frac{1}{2}G\left(\frac{1}{2}H-\frac{dA}{dz}\right)-\frac{1}{2}H\left(\frac{1}{2}G-\frac{dA}{dy}\right)+I\left(D-\frac{dA}{dx}\right)=0$$

$$B\left(\frac{dH}{dy}-\frac{1}{2}\frac{dG}{dz}-\frac{1}{2}\frac{dI}{dx}\right)-\frac{1}{2}G\left(\frac{1}{2}I-\frac{dB}{dz}\right)-\frac{1}{2}I\left(\frac{1}{2}G-\frac{dB}{dx}\right)+H\left(E-\frac{dB}{dy}\right)=0$$

$$C\left(\frac{dG}{dz}-\frac{1}{2}\frac{dH}{dy}-\frac{1}{2}\frac{dI}{dx}\right)-\frac{1}{2}H\left(\frac{1}{2}I-\frac{dC}{dy}\right)-\frac{1}{2}I\left(\frac{1}{2}H-\frac{dC}{dx}\right)+G\left(F-\frac{dC}{dz}\right)=0$$

das quaes sómente as seis primeiras exprimem condições realmente destinctas, por serem todas as outras consequencias derivadas d'ellas, como he facil de ver, principalmente attendendo ao que em circunstancias semelhantes dissemos no fim do §. antecedente.

§. LXIV.

Reflectindo em todo o processo dos calculos executados em os dois §.§. precedentes, e attendendo á dependencia reciproca das Equações de condiçaõ alli achadas, facilmen-

mente veremos: 1.° Que o noſſo Methodo conduz a Equações de condiçaõ ſuperabundantes, o que ſería facil de prever depois das reflexões que fizemos, e das concluſões que tirámos em os §.§. XXIII, e XXIV. 2.° Que por huma immediata conſequencia das ditas concluſões para ſe reconhecer ſe huma Equaçaõ Fluxional qualquer da ſegunda ordem de duas, ou mais variaveis, em que ſe naõ ſuppôs Fluxaõ alguma conſtante, ſe póde reduzir a ſer Fluxaõ ſegunda exacta de huma Funcçaõ da ordem o, baſtará examinar ſe ella ſatisfaz ás Equações de condiçaõ, que na ordem, por que ſe achaõ eſcritas nos §.§. LXII, e LXIII, occupaõ os lugares pares; iſto he, baſtará verificar as Equações

$$N^{3'}\left(P^{2'} - 2dP^{3'}\right) - P^{3'}\left(N^{2'} - 2dN^{3'}\right) = 0$$

$$P^{3'}\left(\underset{\sim}{Q}^{2'} - 2d\underset{\sim}{Q}^{3'}\right) - \underset{\sim}{Q}^{3'}\left(P^{2'} - 2dP^{3'}\right) = 0$$

&c.

3.° Que para o meſmo effeito baſtaria tambem verificar ſómente as Equações de condiçaõ, que nos mencionados §.§. occupaõ os lugares impares. E 4.° finalmente que ſupoſto por eſte modo ſe haja de attender a huma Equaçaõ mais, do que verificando as dos lugares pares, nem por iſſo o trabalho de cálculo ſerá maior; por quanto baſta que neſtas Equações ſe calculem os termos, que deverem ſer multiplicados pelas ſegundas Fluxões das variaveis, que entrarem na Funcçaõ propoſta. Por meio d'eſtas advertencias ſe achará com ſumma facilidade, que ſendo

$$V = Addx + Bddy + Cddz + Dddu + Edx^2 + Fdy^2 + Gdz^2 + Hdu^2$$
$$+ Idxdy + Kdxdz + Ldxdu + Mdydz + Ndydu + Odzdu = 0$$

huma Equaçaõ Fluxional da ſegunda ordem, e de quatro variaveis, para que ſe poſſa reduzir a Fluxaõ ſegunda exacta de huma Funcçaõ da ordem o, ſendo multiplicada por hum factor conveniente para eſſe effeito, os coefficientes de

de dV deveraõ ſatisfazer ás ſeguintes 12 Equações de condiçaõ

$$B\left(E - \frac{dA}{dx}\right) - A\left(\frac{1}{2} I - \frac{dB}{dx}\right) = 0$$

$$C\left(E - \frac{dA}{dx}\right) - A\left(\frac{1}{2} K - \frac{dC}{dx}\right) = 0$$

$$D\left(E - \frac{dA}{dx}\right) - A\left(\frac{1}{2} L - \frac{dD}{dx}\right) = 0$$

$$A\left(F - \frac{dB}{dy}\right) - B\left(\frac{1}{2} I - \frac{dA}{dy}\right) = 0$$

$$C\left(F - \frac{dB}{dy}\right) - B\left(\frac{1}{2} M - \frac{dC}{dy}\right) = 0$$

$$D\left(F - \frac{dB}{dy}\right) - B\left(\frac{1}{2} N - \frac{dD}{dy}\right) = 0$$

$$A\left(G - \frac{dC}{dz}\right) - C\left(\frac{1}{2} K - \frac{dA}{dz}\right) = 0$$

$$B\left(G - \frac{dC}{dz}\right) - C\left(\frac{1}{2} M - \frac{dB}{dz}\right) = 0$$

$$D\left(G - \frac{dC}{dz}\right) - C\left(\frac{1}{2} O - \frac{dD}{dz}\right) = 0$$

$$A\left(H - \frac{dD}{du}\right) - D\left(\frac{1}{2} L - \frac{dA}{du}\right) = 0$$

$$B\left(H - \frac{dD}{du}\right) - D\left(\frac{1}{2} N - \frac{dB}{du}\right) = 0$$

$$B\left(H - \frac{dD}{du}\right) - D\left(\frac{1}{2} O - \frac{dC}{du}\right) = 0$$

que por outro qualquer dos methodos conhecidos ſe naõ poderiaõ obter ſem muito enfadonho trabalho. Seguindo hum procedimento analogo ſe poderaõ determinar, quando ſeja preciſo, as condições relativas ás Equações Fluxionaes

da ſegunda ordem de hum maior numero de variaveis, podendo desde já concluir-ſe, que ſendo p o número das variaveis, ſerá $p - 1$ o numero das Equações dadas pelo noſſo methodo, e $p(p-1)$ o numero total das Equações analogas ás precedentes, que das noſſas ſe derivaõ.

§. LXV.

Se na Equaçaõ Fluxional do §. LXII ſuppoſermos $A = 1$, ella ſe reduzirá a

$$ddx + Bddy + Cdx^2 + Ddy^2 + Edxdy = 0$$

e as Equações a que ella, conſiderada debaixo d'eſta fórma, deverá ſatisfazer, para que poſſa reduzir-ſe a Fluxaõ exacta de huma Funcçaõ da ordem 0, ſeraõ

$$BC - \frac{1}{2} E + \frac{dB}{dx} = 0$$

$$\frac{1}{2} BE - D + \frac{dB}{dy} = 0$$

§. LXVI.

Semelhantemente ſe na Equaçaõ do §. LXIII fizermos a meſma ſuppoſiçaõ de $A = 1$, as ſeis Equações de condiçaõ, a que a propoſta

$$ddx + Bddy + Cddz + Ddx^2 + Edy^2 + Fdz^2 + Gdxdy + Hdxdz + Idydz = 0$$

deverá ſatisfazer, para que multiplicada por hum factor conveniente ſe poſſa reduzir a ſer Fluxaõ exacta de huma Funcçaõ da ordem 0, ſaõ

$$BD - \frac{1}{2} G + \frac{dB}{dx} = 0$$

$$\frac{1}{2}BG - E + \frac{dB}{dy} = 0$$

$$\frac{1}{2}BH - \frac{1}{2}I + \frac{dB}{dz} = 0$$

$$CD - \frac{1}{2}H + \frac{dC}{dx} = 0$$

$$\frac{1}{2}CG - \frac{1}{2}I + \frac{dC}{dy} = 0$$

$$\frac{1}{2}CH - F + \frac{dC}{dy} = 0$$

§. LXVII.

Se na Formula do §. LXII ſe ſuppoem dy conſtante; entaõ, ſendo $ddy = 0$, ella ſe reduz a

$$V = Addx + Cdx^2 + Ddy^2 + Edxdy = 0$$

e para que poſſa converter-ſe em Fluxaõ exacta de huma Funcçaõ da ordem 0, ſendo multiplicada por hum factor conveniente para eſſe effeito, os coefficientes de dV deveráõ ſatisfazer á primeira das tres Equações de condiçaõ alli expreſſadas, iſto he, deveráõ ſatisfazer á Equaçaõ

$$2\overset{1'}{N}\left(2\overset{1'}{N} - d\overset{2'}{N}\right) - \overset{2'}{N}\left(\overset{2'}{N} - d\overset{3'}{N}\right) = 0$$

por quanto, naõ ſe conhecendo o valor de $P^{3'}$, nenhuma das outras póde ter lugar. Deſta ſe derivaõ pela ſubſtituiçaõ dos valores de $\overset{1'}{N}$; $\overset{2'}{N}$; e $\overset{3'}{N}$, e do valor de ddx tirado da propoſta as duas ſeguintes, a que a meſma propoſta deve ſatisfazer.

A

$$A\left(\frac{dD}{dx} - \frac{1}{2}\frac{dE}{dy}\right) - \frac{1}{2}E\left(\frac{1}{2}E - \frac{dA}{dy}\right) + D\left(C - \frac{dA}{dx}\right) = 0$$

$$A\left(\frac{dC}{dy} - \frac{1}{2}\frac{dE}{dx}\right) - \frac{1}{2}E\left(C - \frac{dA}{dx}\right) + C\left(\frac{1}{2}E - \frac{dA}{dy}\right) = 0$$

Equações que tambem ſe poderiaõ achar ſem dependencia de novos calculos, excluindo das ſeis do §. LXII todas as em que entra a quantidade B, cujo valor neſte caſo ſe ignora.

§. LXVIII.

Semelhantemente ſe na Formula do §. LXIII ſuppoſermos dy conſtante, a Equaçaõ Fluxional alli propoſta ſe reduzirá a

$$V = Addx + Cddz + Ddx^2 + Edy^2 + Fdz^2 + Gdxdy + Hdxdz + Idydz = 0$$

e para que poſſa reduzir-ſe a Fluxaõ ſegunda exacta de huma Funcçaõ da ordem 0, deverá ſatisfazer á primeira, e á ultima das cinco Equações alli expreſſadas; por iſſo que em todas as outras entra $P^{3'}$, quantidade que neſte caſo ſe naõ conhece. Subſtituindo pois em as duas Equações

$$2N^{3'}\left(2N^{1'} - dN^{2'}\right) - N^{2'}\left(N^{2'} - 2dN^{3'}\right) = 0$$

$$2\underline{Q}^{3'}\left(2\underline{Q}^{1'} - d\underline{Q}^{2'}\right) - \underline{Q}^{2'}\left(\underline{Q}^{2'} - 2d\underline{Q}^{3'}\right) = 0$$

os valores de $N^{1'}; N^{2'}; N^{3'}; P^{1'}; P^{2'}; P^{3'}$, e os valores de ddx, e ddz tirados da propoſta, ſe derivaõ as ſeguintes 12 Equações de condiçaõ

$$C\left(D - \frac{dA}{dx}\right) - A\left(\frac{1}{2}H - \frac{dC}{dx}\right) = 0$$

$$A\left(F - \frac{dC}{dz}\right) - C\left(\frac{1}{2}H - \frac{dA}{dz}\right) = 0$$

A

$$A\left(\frac{dE}{dx}-\frac{1}{2}\frac{dG}{dy}\right)-\frac{1}{2}G\left(\frac{1}{2}G-\frac{dA}{dy}\right)+E\left(D-\frac{dA}{dx}\right)=0$$

$$A\left(\frac{dF}{dx}-\frac{1}{2}\frac{dH}{dz}\right)-\frac{1}{2}H\left(\frac{1}{2}H-\frac{dA}{dz}\right)+F\left(D-\frac{dA}{dx}\right)=0$$

$$A\left(\frac{dD}{dy}-\frac{1}{2}\frac{dG}{dx}\right)-\frac{1}{2}G\left(D-\frac{dA}{dx}\right)+D\left(\frac{1}{2}G-\frac{dA}{dy}\right)=0$$

$$A\left(\frac{dD}{dz}-\frac{1}{2}\frac{dH}{dx}\right)-\frac{1}{2}H\left(D-\frac{dA}{dx}\right)+D\left(\frac{1}{2}H-\frac{dA}{dz}\right)=0$$

$$C\left(\frac{dD}{dz}-\frac{1}{2}\frac{dH}{dx}\right)-\frac{1}{2}H\left(\frac{1}{2}H-\frac{dC}{dx}\right)+D\left(F-\frac{dC}{dz}\right)=0$$

$$C\left(\frac{dE}{dz}-\frac{1}{2}\frac{dI}{dy}\right)-\frac{1}{2}I\left(\frac{1}{2}I-\frac{dC}{dy}\right)+E\left(F-\frac{dC}{dz}\right)=0$$

$$C\left(\frac{dF}{dx}-\frac{1}{2}\frac{dH}{dz}\right)-\frac{1}{2}H\left(F-\frac{dC}{dz}\right)+F\left(\frac{1}{2}H-\frac{dC}{dx}\right)=0$$

$$C\left(\frac{dF}{dy}-\frac{1}{2}\frac{dI}{dz}\right)-\frac{1}{2}I\left(F-\frac{dC}{dz}\right)+F\left(\frac{1}{2}I-\frac{dC}{dy}\right)=0$$

$$A\left(\frac{dI}{dx}-\frac{1}{2}\frac{dG}{dz}-\frac{1}{2}\frac{dH}{dy}\right)-\frac{1}{2}G\left(\frac{1}{2}H-\frac{dA}{dz}\right)-\frac{1}{2}H\left(\frac{1}{2}G-\frac{dA}{dy}\right)+I\left(D-\frac{dA}{dx}\right)=0$$

$$C\left(\frac{dG}{dz}-\frac{1}{2}\frac{dH}{dy}-\frac{1}{2}\frac{dI}{dx}\right)-\frac{1}{2}H\left(\frac{1}{2}I-\frac{dC}{dy}\right)-\frac{1}{2}I\left(\frac{1}{2}H-\frac{dC}{dx}\right)+G\left(F-\frac{dC}{dz}\right)=0$$

a que a meſma propoſta deve ſatisfazer, e das quaes ſómente a 1.ª; a 2.ª; a 3.ª; a 5.ª; a 8.ª; e a 10.ª exprimem condiçóes realmente differentes, ſendo aſſim o número d'eſtas o meſmo que no caſo, em que ſe naõ ſuppunha Fluxaõ alguma conſtante.

§. LXIX.

Se na Formula do §. LXVII ſuppoſermos $A=1$; o que equivale a ſuppôr toda a Equaçaõ devidida pelo coeffi-

ciente de ddx, entaõ as duas Equações de condiçaõ alli expreſſadas ſe reduzem a

$$\frac{dC}{dy} - \frac{1}{2}\frac{dE}{dx} = 0$$

$$DC - \frac{1}{4}E^2 + \frac{dD}{dx} - \frac{1}{2}\frac{dE}{dy} = 0$$

E ſe na Formula do §. LXVIII fizermos a meſma ſuppoſiçaõ as ſeis Equações alli tranſcritas, que exprimem condições realmente differentes, ſe reduzem a

$$CD - \frac{1}{2}H + \frac{dC}{dx} = 0$$

$$\frac{1}{2}CH - F + \frac{dC}{dz} = 0$$

$$\frac{dD}{dy} - \frac{1}{2}\frac{dG}{dx} = 0$$

$$DE - \frac{1}{4}G^2 + \frac{dE}{dx} - \frac{1}{2}\frac{dG}{dy} = 0$$

$$C\left(\frac{dE}{dz} - \frac{1}{2}\frac{dI}{dy}\right) - \frac{1}{2}I\left(\frac{1}{2}I - \frac{dC}{dy}\right) + E\left(F - \frac{dC}{dz}\right) = 0$$

$$C\left(\frac{dF}{dy} - \frac{1}{2}\frac{dI}{dz}\right) - \frac{1}{2}I\left(F - \frac{dC}{dz}\right) + F\left(\frac{1}{2}I - \frac{dC}{dy}\right) = 0$$

e com effeito a Equaçaõ

$$ddx + Cddz + Ddx^2 + Edy^2 + Fdz^2 + Gdxdy + Hdxdz + Idydz = 0$$

conſiderando y como conſtante, eſtá no caſo do §. LXV; e por tanto como Funcçaõ de x, e z deve ſatisfazer ás primeiras duas Equações das ſeis aqui expreſſadas, conſiderando z como conſtante, eſtá no caſo primeiramente conſiderado neſte meſmo §.; e por tanto como Funcçaõ de x, e y deve ſatisfazer á terceira, e quarta d'eſtas meſmas Equações:

ções: e finalmente considerando x como constante, está no caso do §. LXVII; e por consequencia como Funcçaõ de y, e z deve satisfazer ás duas ultimas.

§. LXX.

A supposiçaõ de huma variavel uniformemente fluente nas Funcções Fluxionaes da segunda ordem, quando pertendemos indagar, se ellas saõ Fluxões exactas de outras Funcções da ordem o, nos despensa, como acabamos de ver, de verificar aquella das nossas Equações de condiçaõ de lugar impar, que he relativa á variavel, cuja primeira Fluxaõ se suppôs constante; mas como no §. LXIV advertimos, que naõ suppondo Fluxaõ alguma constante, a verificaçaõ das nossas Equações absolutamente necessarias se reduz a calcular sómente as Equações, que pela ordem, por que nós as escrevemos, occupaõ os lugares pares, ou a calcular meramente nas que occupaõ os lugares impares os termos, em que deveraõ entrar Fluxões segundas, fica ao arbitrio do calculador, que tiver de proceder a huma semelhante indagaçaõ sobre huma Funcçaõ Fluxional da segunda ordem, em que se tenha supposto huma primeira Fluxaõ constante, o tratalla neste estado, ou reduzilla primeiro a outra, em que naõ haja Fluxaõ alguma constante. A sua sagacidade, e o uso de calcular lhe dictaráõ nos casos occorrentes o que mais lhe convem para a brevidade dos seus calculos: a nós sómente nos toca expôr em toda a sua generalidade os meios, de que elle póde servir-se em todos os casos imaginaveis.

§. LXXI.

Se a Equaçaõ Fluxional

$$V = Addx + Bddy + Cdx^2 + Ddy^2 + Edxdy = o$$

que suppomos naõ ser Fluxaõ exacta de Funcçaõ alguma de or-

ordem inferior, poder com tudo reduzir-se a Fluxaõ exacta de huma Funcçaõ da primeira ordem, sendo multiplicada por hum Factor conveniente, entaõ os coefficientes de dV deveráõ satisfazer á Equaçaõ

$$(B^{1\prime}C^{2\prime}-C^{1\prime}B^{2\prime})D^{3\prime}-(B^{1\prime}C^{3\prime}-C^{1\prime}B^{3\prime})D^{2\prime}+(B^{2\prime}C^{3\prime}-C^{2\prime}B^{3\prime})D^{1\prime}=0$$

que no §. XLV achamos expressar as condições necessarias para este effeito. Porém a sua transformaçaõ em Funcçaõ dos coefficientes de dV, e das Fluxões parciaes d'elles, sobre naõ ser absolutamente necessaria para o fim indicado, nos conduziria a calculos taõ extensos, e complicados, que julgamos por melhor omittillos, e substituir-lhes algumas considerações geraes, que mostrando-nos a inutilidade de serem praticados por extenso nos façaõ ao mesmo tempo conhecer, que parte d'este trabalho bastará executar para chegar ao fim proposto.

Recorrendo ao §. XLV, aonde expozemos a analyse da nossa soluçaõ do Problema de achar o criterio proprio para reconhecer se huma Funcçaõ Fluxional qualquer da segunda ordem, que involva duas variaveis, e que naõ seja Fluxaõ exacta de nenhuma outra da primeira ordem, se póde reduzir a que o seja, sendo multiplicada por hum factor P conveniente para esse effeito, facilmente veremos

1.° Que na Equaçaõ

$$(B^{1\prime}D^{2\prime}-D^{1\prime}B^{2\prime})P-(C^{1\prime}D^{2\prime}-D^{1\prime}C^{2\prime})dP=0$$

depois de feita a substituiçaõ do valor de ddx tirado da proposta naõ podem existir senaõ termos multiplicados por ddy, termos multiplicados por dx^2, termos multiplicados por dy^2, e termos multiplicados por $dxdy$.

2.° Que sendo P Funcçaõ de x, e y, e naõ entrando em $C^{1\prime}$, $C^{2\prime}$, e dP senaõ as Fluxões primeiras de x, e y, os termos multiplicados por ddy se naõ comprehendem na parte $(C^{1\prime}D^{2\prime}-D^{1\prime}C^{2\prime})dP$ da mesma Equaçaõ; o que he o mes-

mefmo que dizer, que elles fe comprehendem fómente na parte $(B^{1'}D^{2'} - D^{1'}B^{2'})P$.

3.° Que pela natureza do Methodo directo das Fluxões fendo

$$B^{3'} = d\left(B^{1'}D^{2'} - D^{1'}B^{2'}\right)$$

o coefficiente de d^3y em $B^{3'}$ ferá o mefmo que o de ddy em $B^{1'}D^{2'} - D^{1'}B^{2'}$.

4.° Que em nenhum dos termos da Equaçaõ

$$B^{3'}P - C^{3'}dP + D^{3'}ddP = 0$$

além do primeiro fe póde achar d^3y.

5.° Que por confequencia fó na parte $\left(D^{2'}C^{1'} - C^{2'}D^{1'}\right)B^{3'}$ da Equaçaõ final

$$\left(B^{1'}C^{2'} - C^{1'}B^{2'}\right)D^{3'} - \left(B^{1'}C^{3'} - C^{1'}B^{3'}\right)D^{2'} + \left(B^{2'}C^{3'} - C^{2'}B^{3'}\right)D^{1'} = 0$$

fe podem achar termos, em que entre d^3y.

6.° Que o coefficiente de d^3y na mefma Equaçaõ final ferá o mefmo que o de ddy em $\left(B^{1'}D^{2'} - D^{1'}B^{2'}\right)$, fó com a differença de fe achar multiplicado por $D^{3'}$.

7.° Que devendo fer identica a Equaçaõ final, e naõ fendo $D^{3'} = 0$, o coefficiente de ddy em $B^{1'}D^{2'} - D^{1'}B^{2'}$ igualado a cifra deve dar huma das condições, a que a propofta $V = 0$ deve fatisfazer.

Ora lembrando-nos que he

$$B^{1'} = N^{1'} - dN^{2'} + ddN^{3'}$$

$$B^{2'} = P^{1'} - dP^{2'} + ddP^{3'}$$

$$D^{1'} = N^{3'}$$

$$D^{2'} = P^{3'}$$

 e at-

e attendendo aos valores de $N^{1\prime}$; $N^{2\prime}$; $N^{3\prime}$; $P^{1\prime}$; $P^{2\prime}$; e $P^{3\prime}$, he evidente 1.° Que a Equaçaõ, que refulta de igualar a cifra o coefficiente de ddy na expreffaõ $B^{1\prime}D^{2\prime} - D^{1\prime}B^{2\prime}$, exprimirá a relaçaõ, que entre fi devem ter todos os coefficientes A, B, C, D, e E da propofta, para que fendo multiplicada por hum factor conveniente, poffa reduzir-fe a fer Fluxaõ exacta de huma Funcçaõ da primeira ordem. E 2.° Que naõ podendo os coefficientes dos termos da Equaçaõ final do §. XLV expreffar outras relações entre os coefficientes dos termos da propofta, e fuas Fluxões parciaes, fenaõ a já mencionada, ou relações derivadas d'efta, ella expreffará a condiçaõ unica, a que a mefma propofta deve fatisfazer.

Calculando pois na conformidade d'eftas reflexões o coefficiente de ddy em $B^{1\prime}D^{2\prime} - D^{1\prime}B^{2\prime}$ acharemos, que a condiçaõ unica, a que a propofta deve fatisfazer, he a que exprime a feguinte Equaçaõ:

$$B^2\left(C - \frac{dA}{dx}\right) + AB\left(\frac{dA}{dy} + \frac{dB}{dx} - E\right) + A^2\left(D - \frac{dB}{dy}\right) = 0$$

§. LXXII.

Querendo indagar as condições, a que a Equaçaõ

$$V = Addx + Bddy + Cddz + Ddx^2 + Edy^2 + Fdz^2 + Gdxdy + Hdxdz + Idydz = 0$$

deve fatisfazer, para que fendo multiplicada por hum factor conveniente P, fe poffa reduzir a Fluxaõ exacta de huma Funcçaõ da primeira ordem, entaõ, fegundo demonftramos em o §. XLIII, os coefficientes de dV deveráõ fatisfazer ás feguintes tres Equações

$$\left(N^{1\prime} - dN^{2\prime} + ddN^{3\prime}\right)P - \left(N^{2\prime} - 2dN^{3\prime}\right)dP + N^{3\prime}ddP = 0$$

($P^{1\prime}$

$$\left(P^{1\prime} - dP^{2\prime} + ddP^{3\prime}\right) P - \left(P^{2\prime} - 2dP^{3\prime}\right) dP + P^{3\prime} ddP = 0$$

$$\left(Q^{1\prime} - dQ^{2\prime} + ddQ^{3\prime}\right) P - \left(Q^{2\prime} - 2dQ^{3\prime}\right) dP + Q^{3\prime} ddP = 0$$

que por mais brevidade efcreveremos affim:

$$B^{1\prime} P - C^{1\prime} dP + D^{1\prime} ddP = 0$$

$$B^{2\prime} P - C^{2\prime} dP + D^{2\prime} ddP = 0$$

$$B^{3\prime} P - C^{3\prime} dP + D^{3\prime} ddP = 0$$

eliminando primeiro ddP, e ultimamente $\frac{dP}{P}$, d'ellas derivaremos a Equaçaõ unica de condiçaõ

$$\left(B^{1\prime}C^{2\prime} - C^{1\prime}B^{2\prime}\right)D^{3\prime} - \left(B^{1\prime}C^{3\prime} - C^{1\prime}B^{3\prime}\right)D^{2\prime} + \left(B^{2\prime}C^{3\prime} - C^{2\prime}B^{3\prime}\right)D^{1\prime} = 0$$

da qual, calculando fómente os termos affectos de ddx, ddy, e ddz, fe deduzem as feguintes tres Equaçóes de condiçaõ

$$B^2 \left(D - \frac{dA}{dx}\right) + AB \left(\frac{dA}{dy} + \frac{dB}{dx} - G\right) + A^2 \left(E - \frac{dB}{dy}\right) = 0$$

$$C^{2} \left(E - \frac{dB}{dy}\right) + BC \left(\frac{dB}{dz} + \frac{dC}{dy} - I\right) + B^2 \left(F - \frac{dC}{dz}\right) = 0$$

$$A^2 \left(F - \frac{dC}{dz}\right) + CA \left(\frac{dC}{dx} + \frac{dA}{dz} - H\right) + C^2 \left(D - \frac{dA}{dx}\right) = 0$$

de que fe derivaõ neceffariamente todas as outras, que obteriamos, fazendo por extenfo o cálculo neceffario para transformar a Equaçaõ achada em Funcçaõ dos coefficientes da propofta.

§. LXXIII.

Se na indagaçaõ d'eftas condiçóes quizeffemos proceder por hum modo analogo, ao que praticamos no §. LXX, entaõ comparando duas a duas as tres Equaçóes

$B^{1\prime}$

$$B^{1'}P - C^{1'}dP + D^{1'}ddP = 0$$

$$B^{2'}P - C^{2'}dP + D^{2'}ddP = 0$$

$$B^{3'}P - C^{3'}dP + D^{3'}ddP = 0$$

deduziriamos d'ellas as feguintes tres

$$\left(B^{1'}D^{2'} - D^{1'}B^{2'}\right)P - \left(C^{1'}D^{2'} - D^{1'}C^{2'}\right)dP = 0$$

$$\left(B^{1'}D^{3'} - D^{1'}B^{3'}\right)P - \left(C^{1'}D^{3'} - D^{1'}C^{3'}\right)dP = 0$$

$$\left(B^{2'}D^{3'} - D^{2'}B^{3'}\right)P - \left(C^{2'}D^{3'} - D^{2'}C^{3'}\right)dP = 0$$

fubftituindo na primeira em lugar de ddx o feu valor tirado da propofta $V = 0$, e calculando em $B^{1'}D^{2'} - D^{1'}B^{2'}$ o coefficiente de ddy, e igualando-o a cifra teriamos a Equaçaõ

$$B^2\left(D - \frac{dA}{dx}\right) + AB\left(\frac{dA}{dy} + \frac{dB}{dx} - G\right) + A^2\left(E - \frac{dB}{dy}\right) = 0$$

Semelhantemente fubftituindo na fegunda em lugar de ddz o feu valor tirado da propofta, calculando em $B^{1'}D^{3'} - D^{1'}B^{3'}$ o coefficiente de ddx, e igualando-o a cifra teriamos a Equaçaõ

$$A^2\left(F - \frac{dC}{dz}\right) + CA\left(\frac{dC}{dx} + \frac{dA}{dz} - H\right) + C^2\left(D - \frac{dA}{dx}\right) = 0$$

E finalmente fubftituindo na terceira em lugar de ddy o feu valor tirado da propofta, calculando em $B^{2'}D^{3'} - D^{2'}B^{3'}$ o coefficiente de ddz, e igualando-o a cifra teriamos a Equaçaõ

$$C^2\left(E - \frac{dB}{dy}\right) + BC\left(\frac{dB}{dz} + \frac{dC}{dy} - I\right) + B^2\left(F - \frac{dC}{dz}\right) = 0$$

e d'efte modo obteriamos com menos trabalho do que no §. ante-

§. antecedente as condições, a que a propofta deve fatisfazer.

Se tiveffemos feguido os paffos, que apontamos no §. XLVI, entaõ baftaria, que fubftituindo em $B^{1\prime}D^{2\prime}-D^{1\prime}B^{2\prime}$ o valor de *ddx* tirado da propofta, calculaffemos os termos, que feriaõ coefficientes de *ddy*, e *ddz*; e que fubftituindo em $B^{2\prime}D^{3\prime}-D^{2\prime}B^{3\prime}$ o valor de *ddy* tirado da mefma propofta calculaffemos os termos, que feriaõ coefficiente de *ddx*, e *ddz*, e que igualaffemos cada hum dos ditos coefficientes a cifra. Affim achariamos duas das Equações, que achamos pelos proceffos antecedentes, e em lugar da terceira achariamos outras duas equivalentes a ella: he verdade que o numero das Equações finaes fería maior; mas nem o numero, nem a fórma das ditas Equações deve fer confiderado como motivo de preferencia para a efcolha dos diverfos caminhos, que o noffo methodo offerece para fe reconhecer effectivamente fe huma Funcçaõ Fluxional propofta fe póde ou naõ reduzir a Fluxaõ exacta de outra Funcçaõ de ordem inferior a ella. O menor ou maior trabalho de calculo he a unica confideraçaõ, que deve preceder a efta efcolha, e naõ he fenaõ com o fim de facilitar o acerto na mefma efcolha a quem precifar fazer indagações femelhantes em os cafos, que nefta Memoria fe naõ mencionaõ, que aquí expomos os diverfos modos, que mais naturalmente fe offerecem para o mencionado fim.

§. LXXIV.

Se na Formula do §. LXXI fuppofermos $A=1$, a Equaçaõ de condiçaõ allí expreffada fe reduzirá a

$$B\left(BC-E+\frac{dB}{dx}\right)+D-\frac{dB}{dy}=0.$$

E fe fizermos a mefma fuppofiçaõ na Formula do §. LXXII as Equações, que no dito §. achámos, fe reduzirão a

$$B\left(BD - G + \frac{dB}{dx}\right) + E - \frac{dB}{dy} = 0$$

$$C\left(CD - H + \frac{dC}{dx}\right) + F - \frac{dC}{dz} = 0$$

$$C^2\left(E - \frac{dB}{dy}\right) + BC\left(\frac{dB}{dz} + \frac{dC}{dy} - I\right) + B^2\left(F - \frac{dC}{dz}\right) = 0$$

§. LXXV.

Continuando a proceder por hum modo analogo ſe poderiaõ achar as Equaçóes de condiçaõ relativas a todos os outros caſos, aquí naõ comprehendidos; mas além de que hum tal proceſſo ſería ſem fim, e que as Equaçóes de condiçaõ, a que ſeriamos conduzidos, ſe achariaõ cada vez mais complicadas, e menos proprias para ſe conſervarem de memoria, ſería trabalho verdadeiramente inutil paſſar mais adiante neſta indagaçaõ, viſto que no eſtado preſente das Sciencias naõ ſerá facil encontrar queſtaõ alguma, que conduza a Equaçóes Fluxionaes de ordem ſuperior á ſegunda, nem de mais de tres variaveis, como já em outro lugar ponderámos. Será com tudo de razaõ, que advirtamos, que quando huma Equaçaõ Fluxional qualquer naõ for Fluxaõ exacta de outra alguma Equaçaõ de ordem inferior, nem ſe poder reduzir a que o ſeja por meio da multiplicaçaõ de hum factor conveniente para eſſe effeito, ſe naõ deve por iſſo concluir, que ella ſeja abſurda em todo o rigor d'eſta expreſſaõ, quero dizer, que ella exprime alguma propriedade imaginária, ou impoſſivel de ſua natureza; mas taõ ſómente, que a ſua Fluente ſe naõ póde achar nem immediatamente, nem por meio do artificio da multiplicaçaõ de hum factor variavel. As conſequencias, que da doutrina expoſta ſe deduzem relativamente á poſſibilidade, e modo de obter eſta qualidade de factores nos caſos, em que d'elles depende a determinaçaõ das Fluentes, ſeraõ o objecto de outra Memoria.

ER-

ERROS DE CALCULO

Que ſe devem corrigir neſta Memoria.

Na pagina 214 linha ultima em lugar de

$$\left(\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dy}\right) dx = 0$$

deve lêr-ſe

$$\left(\frac{dA}{dy} - \frac{dB}{dx}\right) dx = 0$$

Na pag. 243 lin. 3 em lugar de $\frac{n.(n-1)}{1.\,2} N^{(n+1)} ddP$, deve lêr-ſe $\frac{n.(n-1)}{1.\,2} N^{(n+1)'} ddP$.

Na pag. 244 lin. 7 em lugar de $\frac{dP}{d}$, deve lêr-ſe $\frac{dP}{P}$.

Na pag. 251 lin. 24 em lugar de $-3\frac{1.\,2}{n(n-1)} ddN^{3'}$, deve lêr-ſe $+3\frac{1.\,2}{n(n-1)} ddN^{3'}$.

Na pag. 253 lin. 8 em lugar de dd, P, deve lêr-ſe ddP.

Na pag. 260 lin. 11 em lugar de $E^{3'}$, deve lêr-ſe $E^{3'}(1)$: e na linha 13 em lugar de $E^{2'}$, deve lêr-ſe $E^{2'}(1)$.

Na pag. 281 lin. 14 em lugar de

$$B\left(H - \frac{dD}{dx}\right) - D\left(\frac{1}{2}O - \frac{dC}{du}\right) = 0$$

deve lêr-ſe

$$C\left(H - \frac{dD}{dx}\right) - D\left(\frac{1}{2}O - \frac{dC}{du}\right) = 0$$

NB. Naõ ſe apontaõ alguns erros de Orthografia, que eſcapáraõ á vigilancia do corrector, por ſerem de natureza tal, que o leitor facilmente os póde ſupprir, viſto que nenhum d'elles altera nem levemente o diſcurſo.

DES-

DESCRIPÇAÕ

De hum Feto humano monſtruoſo, naſcido em Coimbra no dia 28 de Novembro de 1791.

Por FRANCISCO TAVARES.

N——— Mãi de muitos filhos, de 36 annos de idade, em Novembro de 1791 julgava-ſe pejada de ſete mezes, parte dos quaes tinhaõ ſido paſſados em baſtante regularidade. Em Agoſto tinha padecido huma hemorragia uterina, de que convaleſceu ſem ajuda de medicamentos, que naõ foſſem a dieta, e deſcanço na cama. Reſtituida aos ſeus trabalhos domeſticos ficou ſempre padecendo huma purgaçaõ côr de café, até que por hum ſubito terror começou a ſentir deſcer o ventre, com frequente vontade de ourinar, pouco movimento do feto, dores pelo ventre, e lombos, por eſpaço de oito dias. Paſſados elles entrou a ſentir verdadeiras dores de parir no dia 28 de Novembro, que ſoffreu por dez, ou doze horas. Ao fim d'ellas chamada a parteira tocando-a, chegou ao feto, o qual pouco tempo depois lançou fóra hum dos pés, logo o outro, e ajudado da parteira finalmente naſceu ſemivivo ſem ſecundinas, havendo precedido á ſahida do pé huma grande cópia de agoas de côr preta. Examinado o feto appareceu da fórma que repreſenta a Fig. I. appreſentando hum grande exomphalo incluido ſómente no peritoneo, taõ adherente pelos lados aos tegumentos communs, que a naõ ſer a natural tranſparencia que o diſtinguia, pareceria ſua continuaçaõ. Mas obſervava-ſe tambem, que os tegumentos ſe limitavaõ n'huma rima continuada até o ſternon por onde ſahia o peritoneo, porém

Mém. pag. 226.

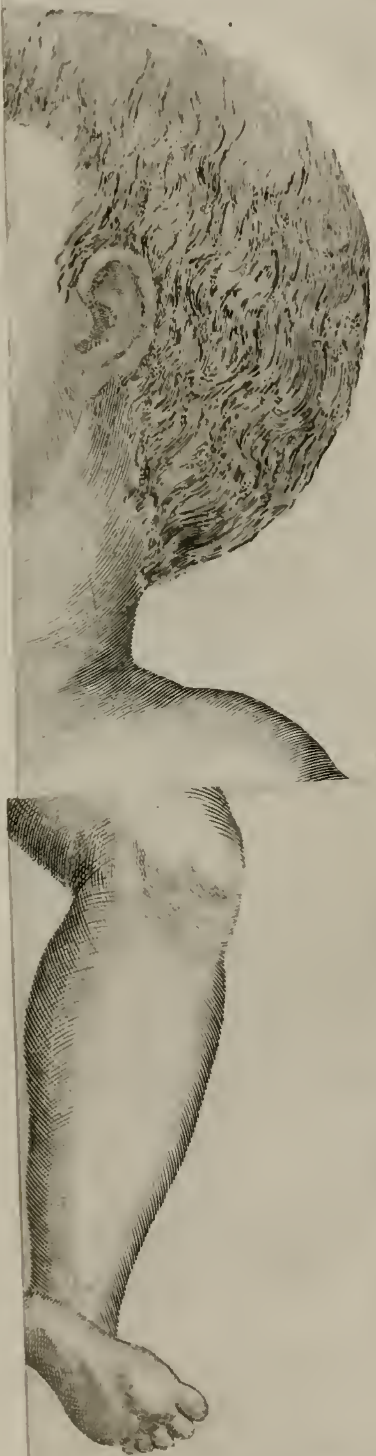


Fig. 1

Mem. pag. 226.

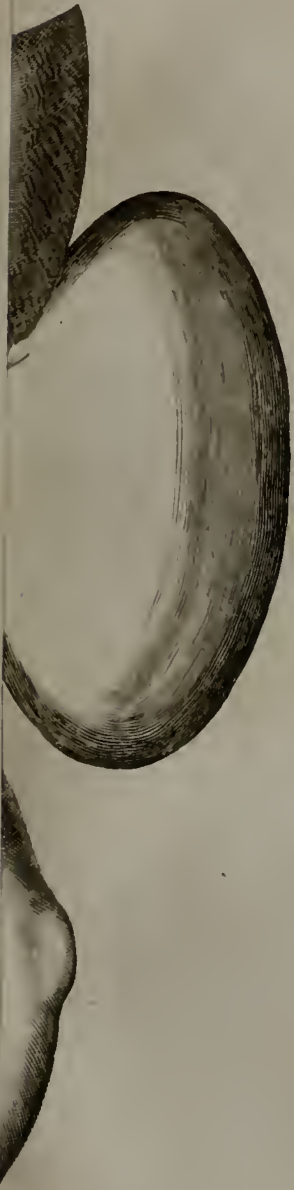


Fig. III

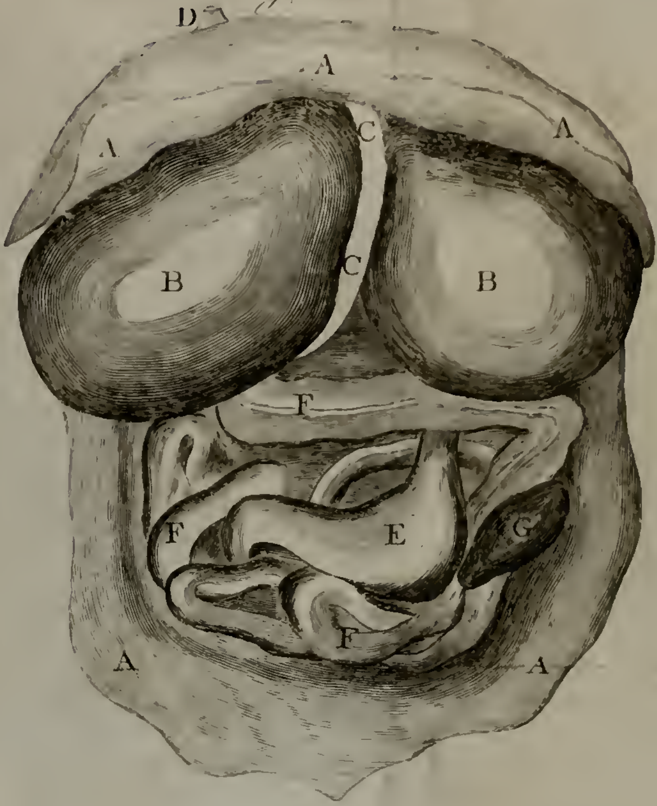


Fig. IIII

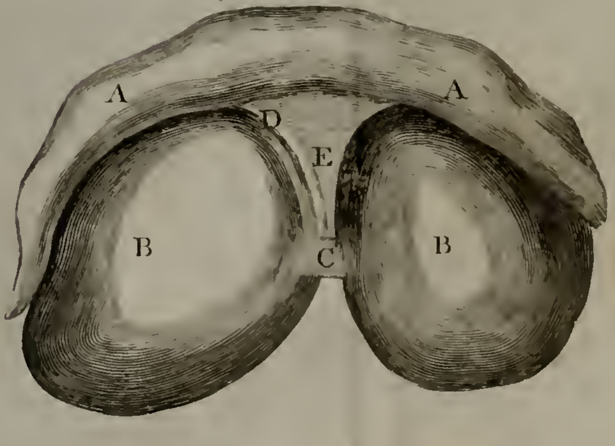


Fig. II

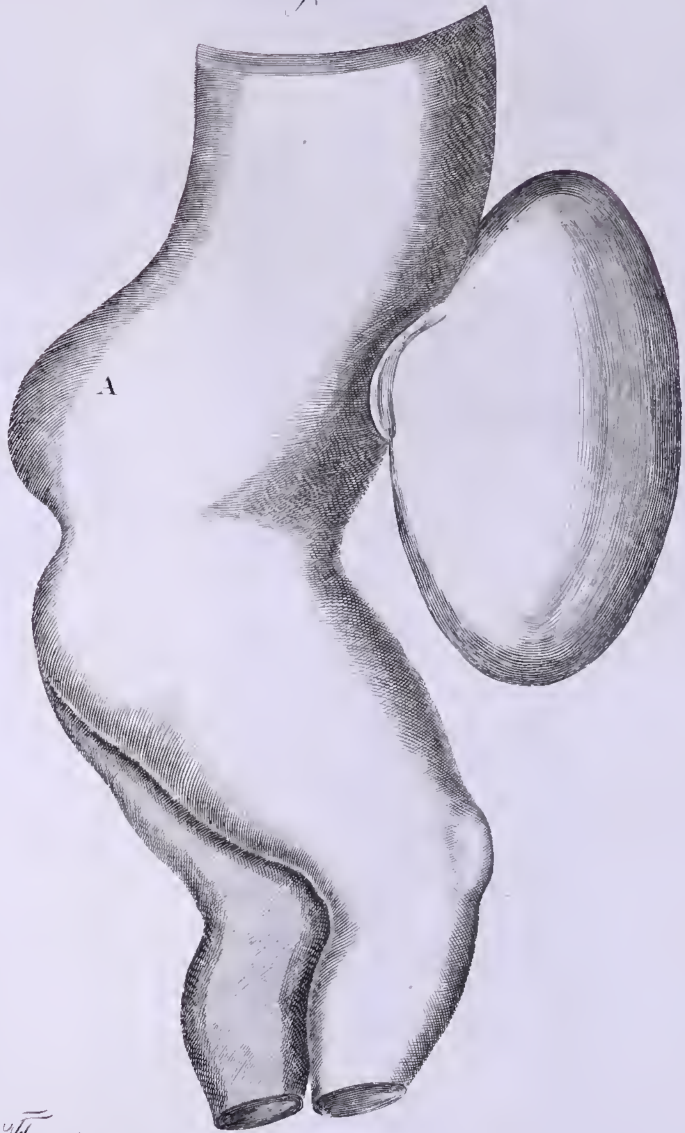


Fig. III

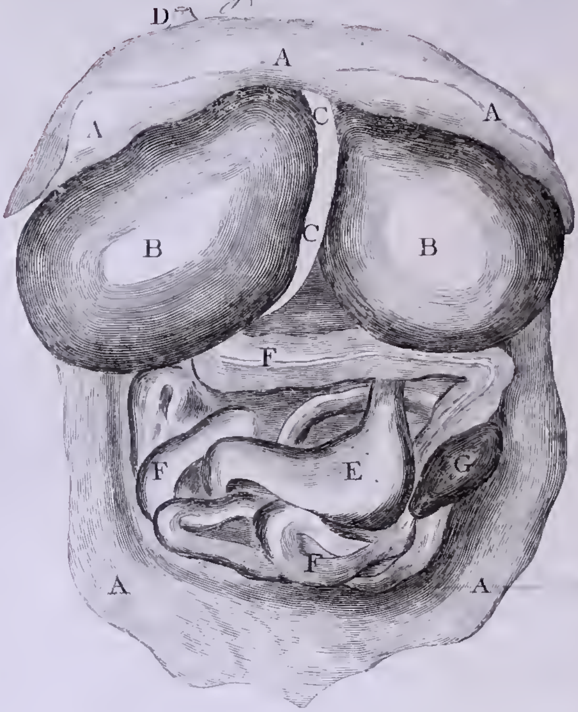
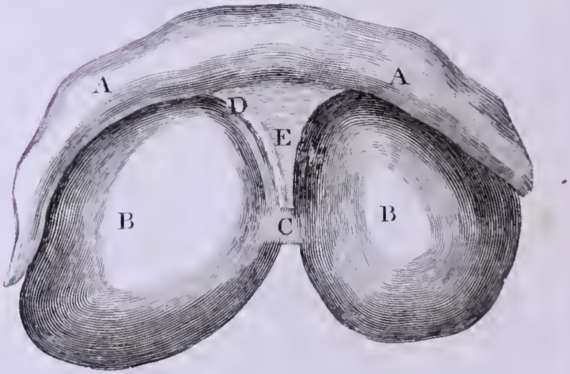


Fig. IIII



J L. delineavit.

Fig. VI.

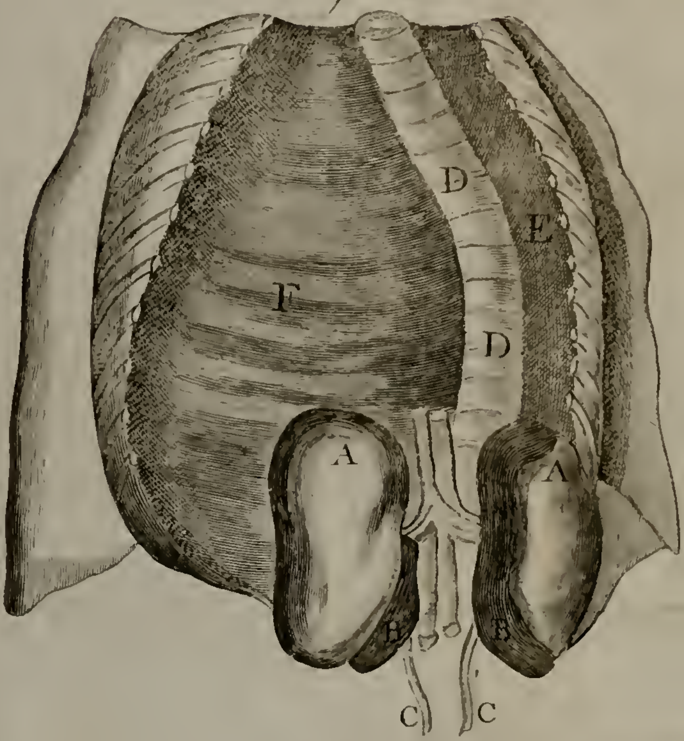


Fig. VIII.

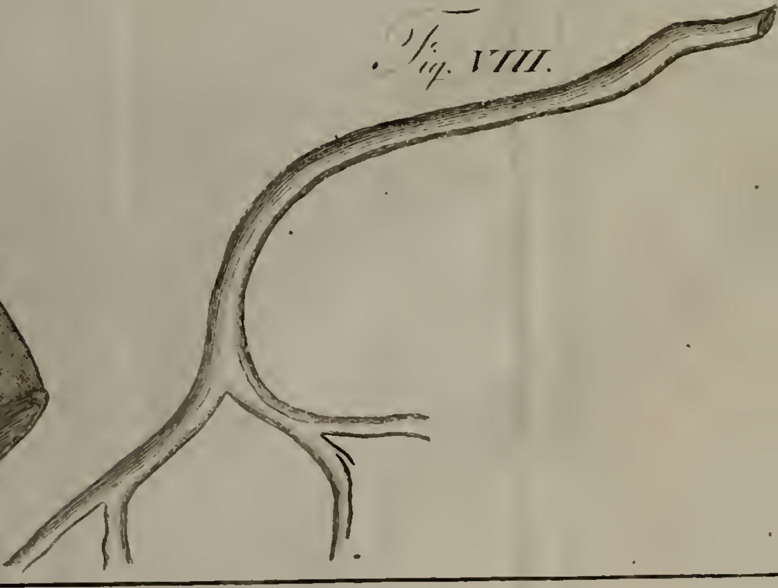


Fig. V.

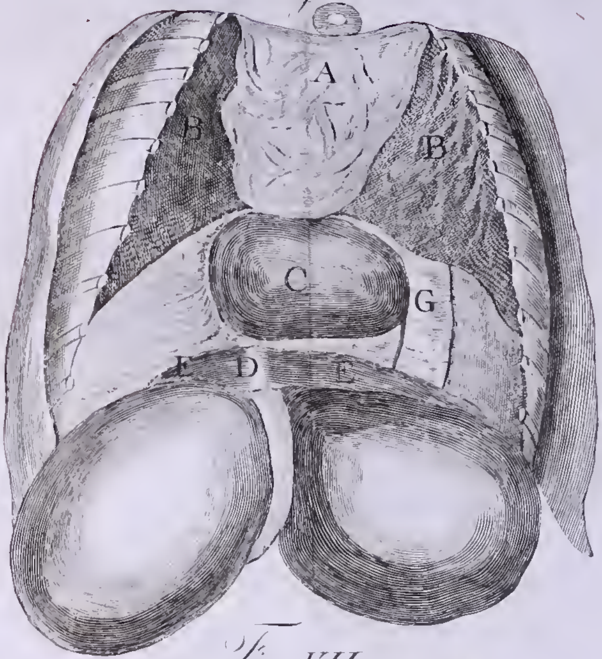


Fig. VI.

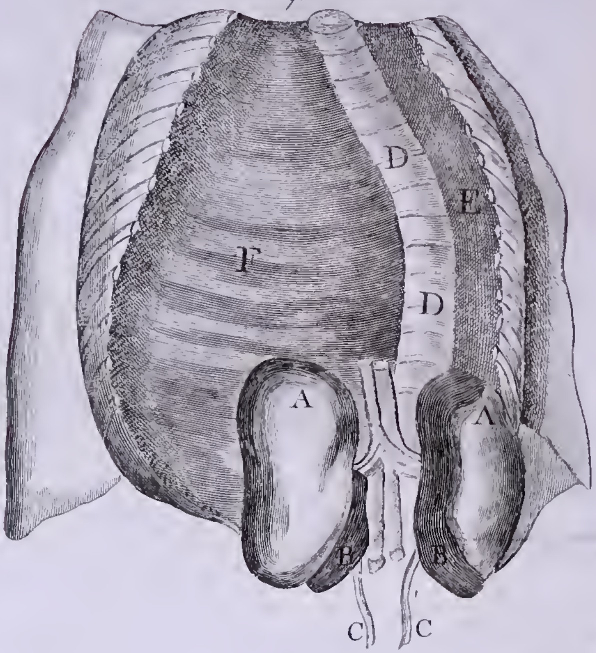


Fig. VII.

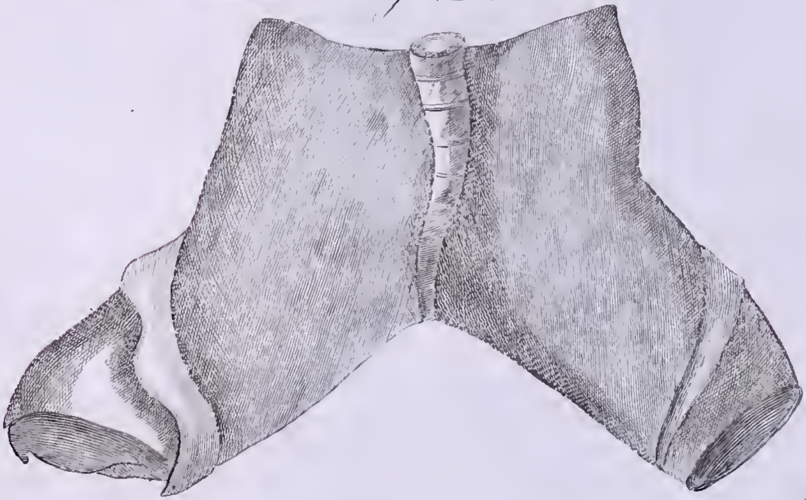
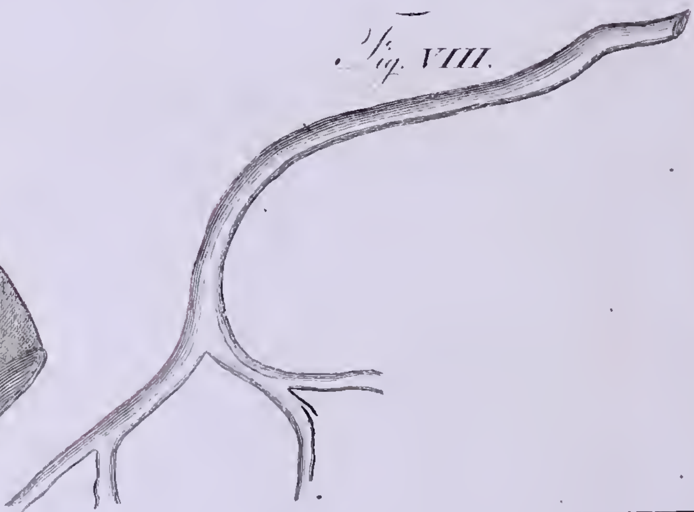


Fig. VIII.



LT. delineavit

rém nada cruenta, o que bem indicava, que naõ ſe formou na occaſiaõ do parto. Ao lado direito da origem do exomphalo havia huma excavaçaõ deſigual, que no ſitio (A) repreſentava hum bordo rijo, e reſiſtente ao cortar, e logo para a parte interior hum forame (*a*) cego, ſem paſſagem para a parte interna, e pouco abaixo no ſitio notado com a letra B huma caruncula rubra peciolada por hum péſinho delicadiſſimo pouco diſtante do buraco C, o qual pela extenſaõ de huma pollegada formava hum ſacco de meia pollegada de diametro, cuja ſuperficie interna era rugoſa, rubro-roſea, e ſemelhante á ſuperficie interna do inteſtino recto: a ſua entrada era facil introduzindo o dedo minimo, que naõ encontrava reſiſtencia, ſenaõ quando o diametro diminuia á diſtancia de huma pollegada, e por tanto naõ tinha Sphinter. Diſtinguia-ſe em D hum ducto, que caminhava por toda a ſuperficie ſuperior do exomphalo para a parte interna, do qual, por meio da preſſaõ, ſe vîraõ ſahir algumas gottas de ſangue. A ſua groſſura total ſería de huma linha pouco mais, ou menos.

Averiguando-ſe relativamente aos ſinaes diſtinctivos do ſexo, nenhuns apparecêraõ; porque afóra de duas producçóes cutaneas ſemelhantes a duas verrugas pendentes, marcadas em EE, nada mais ſe via ſenaõ as tres pequenas impreſsões no ſitio proprio, mas hum pouco ao lado direito, notadas com as letras *b*, *c*, *d*, das quaes a ſuperior *b* tinha hum muito pequeno forame, que ſe limitava á diſtancia de huma linha, ſem dar paſſagem a hum Stillete com que ſe tentou.

Naõ tinha nem ſinal de papillas de mammas: a cabeça era maior do que he ordinario em crianças de ſete mezes: os pés retrahidos para o malleolo interno, moſtrando as palmas ſeguidas á parte interna da perna.

Viſto pela parte poſterior, ſe via logo hum tumor molle, liſo, da côr da pelle no ſitio correſpondente á ultima vertebra lombar, e princípio do oſſo ſacro, da fórma que ſe vê repreſentado na Fig. II. A.; e proſeguindo-ſe na averi-

riguaçaõ exterior, achou-se naõ ter *anus*, nem bem divisaõ de nadegas.

Pude obter dos pais facilitarem-me a dissecçaõ deste particular monstro, a que procedeu o Lente de Anatomia nesta Universidade o Doutor Joaõ de Campos Navarro de Andrade, na minha presença, na do Doutor Joaõ Joaquim Gramacho da Fonseca, Lente de Aphorismos, e na do Doutor Joaquim Navarro de Andrade, Lente de Instituiçóés Medico-Cirurgicas. Foi ella feita com todo o escrupulo, e attençaõ, e cuidei de desenhar, ainda que toscamente, na natural grandeza cada huma das figuras, que necessarias fôraõ, para dar huma idéa mais justa das particularidades, que se observáraõ.

Abrio-se o sacco do exomphalo (Fig. III.) AAAAA, e appareceu o figado em dous lobos BB repartido, e suspenso pelo ligamento CC de largura de huma linha. O sacco do peritoneo estava adherente pela ametade da parte convexa do figado, e tinha algumas outras irregulares adherencias em varias partes da mesma superficie. O ligamento CC vinha tambem adherir pela parre da espinha do dorso aos intestinos. Immediatamente abaixo dos dous grandes lobos do figado se viaõ os intestinos F, e o estomago E em sufficientemente boa conformaçaõ, e ao seu lado o baço G de huma figura cordiforme acuminada, e de huma consistencia mais dura do que a natural, e faltava de todo o omento, que devia cubrir os intestinos, e faltava o pancreas. O ducto D se foi seguindo, como convinha, e caminhava pela adherencia do peritoneo até ao figado, de fóra para dentro, da direita para a esquerda até se introduzir na substancia do figado superiormente, e no meio da parte gibbosa n'uma grande scissura, qual se vê na Figura IV. letra E, que se terminava por huma ponte C, depois da qual he que começava o ligamento CC (da Fig. III.).

Tiradas as adherencias ditas, o figado parecia sustentado por hum peciolo formado pela veia cava (Fig. V.) D; mas pela parte anterior do diaphragma EE, logo debaixo do

do ſternon. E indagada a parte concava achou-ſe o ſeu lobo de Spigelio dentro n'huma duplicatura do ſacco, e naõ ſe encontrou bexiga do fel. O diaphragma apenas merecia o nome pela diviſaõ das cavidades, ſendo taõ tenue, que pouquiſſimo, ou nada moſtrava da parte muſcular. Tirado o figado, e inteſtinos, abrindo-ſe eſtes pelo ſeu comprimento, ſe levou a abertura até ao buraco C da Fig. I. Eſtavaõ cheios de meconio, que tinha facil ſahida pelo dito buraco com qualquer leve preſſaõ.

Os rins (Fig. VI.) AA cheios de elevações deſiguaes por toda a ſuperficie externa, tinhaõ de particular ſer o direito maior, e mais levantado na extremidade ſuperior, do que o eſquerdo. Hum, e outro com as capſulas renaes BB inferiores a cada hum, mas a eſquerda tripla da direita, e acompanhando toda a parte concava do rim, e ficando-lhe ainda alguma couſa ſuperior: ambas de côr rubro-fuſca. A diſpoſiçaõ dos vaſos renaes regular ſahindo tambem os uretheres (*cc*) do proprio lugar, dos quaes o eſquerdo tinha livre ſahida para o buraco C da Fig. I., e o direito parecia perder-ſe nos tegumentos. Naõ tinha bexiga urinaria, nem cavidade, aonde ſe contiveſſe, como ſe verá logo.

Aberta a cavidade do peito appareceu huma grande glandula thymo A. Fig. V.: os pulmões BB pequenos, e ſolidos, e o coraçaõ C todo da parte direita da cavidade, tocando a ſua ponta a columna vertebral G, e ficando toda a cavidade eſquerda livre, pois que, como ſe vê na Fig. VI., pela inclinaçaõ da eſpinha dorſal em DD a cavidade E vinha a ſer o terço da cavidade F, e por conſequencia incapaz de accommodar hum coraçaõ volumoſo.

Da meſma fórma os vaſos grandes, que ſahem, e entraõ no coraçaõ, eſtavaõ em toda a parte direita, com a differença de que a veia cava ſe adiantava para a parte anterior do diaphragma, onde, como dito fica, o figado era como peciolado por ella: o eſophago, e a trachea da meſma maneira eraõ da parte direita.

O

O volume maior da cabeça convidava á indagaçaõ do eſtado do cerebro; e apenas ſe rompeu a dura meninge ſahíraõ mais de duas onças de hum ſôro limpido, e por tanto ſe ſuſpeitou immediatamente, que ſe havia de verificar o tumor da parte poſterior por ſpina bifida. Rompeu-ſe o tumor, ſahio hum ſemelhante ſôro, mas ſanguinolento; e continuando-ſe a romper longitudinalmente as vertebras, vio-ſe toda a cavidade da columna vertebral do diametro de tres linhas, a medulla ſpinal tenue, como macerada, e occupando apenas hum terço da cavidade, cujo reſto era cheio do meſmo ſôro dito. As ultimas lombares eraõ bifidas.

Eraõ os oſſos innominados inteiramente planos, e verticalmente ſituados. As ultimas vertebras lombares começavaõ a encaminhar-ſe para a parte anterior: aſſim continuava o oſſo ſacro, e terminava o coccyx, como repreſenta a Fig. VII.

A falta de partes genitaes externas, que faz dever contar-ſe eſte monſtro entre os mais raros, puxava a curioſidade para procurallas interiormente. Debalde tudo. A pelve era nenhuma, e afóra dos muſculos, que a forravaõ, apenas ſe via cellular, e ſobre a criſta do illion glandulas bem patentes: de reſto nada mais, que tiveſſe nem a mais remota analogia, ou ſemelhança das partes, que diſtinguem os ſexos.

Paſſadas trinta e tres horas a mãi lançou as ſegundas, que reteve ſem a mais pequena evacuaçaõ de ſangue. Eraõ de natural tamanho, e o ſeu funiculo de quatro pollegadas eſcaſſas de comprimento, e taõ tenue, como he repreſentado na Fig. VIII., e bem correſpondente ao ducto D das Fig. I., III., e IV. As arterias umbilicaes ſe reduziaõ a huma ſó, e a veia era taõ tenue, que com muita difficuldade ſe percebia.

Perſuadido de que a Natureza naõ reconhece limites no modo das ſuas producçóes, que ella ſabe, e póde variar ao infinito; entrei com tudo na curioſidade de averiguar ſobre a raridade, ou frequencia de monſtros humanos, em

em que junto a huma configuraçaõ exteriór pouco irregular á primeira viſta ſe encontraſſem tantas irregularidades, como no que fica deſcripto. Vim por fructo da minha diligencia a conhecer, que nelle havia huma complicaçaõ de muitas das modificaçóes, que claſſificaõ os monſtros por exceſſo, por defeito, e por ſituaçaõ mudada de partes; mas revolvendo a immenſa liſta de monſtros para encontrar os analogos, ou ſemelhantes, de que ſe conſervaſſe memoria, a pezar de que o grande *Haller* (*Oper. min. Tom. III. Lib. I. de Monſtris*, *pag.* 34.) diga: *Sed etiam fetus ſexu deſtitutos, pene, aut vulva, paſſim referuntur*; eu naõ encontrei eſta facilidade, ficando n'uma deſproporçaõ infinita os deſtituidos de ſexo, e meſmo os herniosos ſemelhantes, relativamente aos outros. Baſta confrontar as notas do lugar citado, que devem verificar o *paſſim*, com as que vaõ diſperſas por todo o Liv. I., para ſe vir no conhecimento da deſproporçaõ.

De quantos ſaõ referidos na Academia Real das Sciencias de Paris desde o anno de 1701 até ao de 1780 ſaõ ſómente os dous deſcriptos por Mr. *Mery* no anno de 1716, e outro por Mr. *Petit* no meſmo anno, que com eſte tem alguma analogia, principalmente o ultimo, em que com tudo póde entrar em dúvida, ſe o appendix, que apparecia ao lado do anus ſpurio, tendo hum unico corpo cavernoſo, e tres muſculos, dos quaes dous naſciaõ dos oſſos da pube, e hum dahi meſmo, e do coccyx, e deveria haver-ſe por parte, que em toda a imperfeiçaõ foſſe com tudo diſtinctiva do ſexo maſculino.

Aproxima-ſe a eſte o que deſcreve *Frederico Hoffmann* (*de morbis fetuum in utero materno*, *num.* 8.) ainda que taõ laconicamente, que naõ dá idéa ſenaõ do que exteriormente ſe obſervava. Eſte naõ tinha abertura de anus, era ſem diſtinçaõ de ſexo, e com huma grande porçaõ de inteſtinos fóra do corpo. No meſmo paragrafo ſe faz mençaõ de outros dous monſtros por exomphalos com parte das entranhas nelle contidas, mas de ſexo conhecido.

Nas *Actas de Compenhague* anno de 1675 *Obſerv.* 59. lê-ſe a Hiſtoria de hum Feto monſtruoſo, com a cabeça bem conformada; as pernas voltadas para a parte poſterior; corpo immovel; figado de grandeza extraordinaria; inteſtinos fóra do ventre; ſem anus; ſem nenhuma apparencia de ſexo; mas que na coxa direita tinha huma abertura, que tomáraõ por hum orificio do utero, ou por collo da bexiga.

Mr. *Le Prieur de Lugeris* deſcreve hum monſtro ſem diſtinçaõ ſenſivel de ſexo, mas com hum buraco de quaſi ſeis linhas de diametro, onde deveria eſtar a parte diſtinctiva do ſexo maſculino. (*Journ. des Sçavans ann.* 1690.) E no anno 1696 ſe deſcreve outro ſem apparencia de ſexo, mas ſem maior individuaçaõ.

He mais bem deſcripto o que participou Mr. *Sue* á Academia Real das Sciencias de París no anno de 1746, que naõ tinha nenhuma apparencia de coxas, nem de pernas, e que entre outras particularidades naõ tinha no fim do tronco nenhuma abertura natural, e ſómente onde deveriaõ ſer as partes da geraçaõ havia hum pequeno appendis produzido pela pelle, debaixo do qual ſe achou pela diſſecçaõ huma pequena bexiga.

Sem nenhumas partes da geraçaõ aſſim internas, como externas, era o monſtro que Mr. *Marrigues* communicou a Mr. *Morand* em Carta de 9 de Novembro de 1758, havendo com tudo oſſos innominados no eſtado natural (*Mem. des Scavans Etrang.* T. IV. pag. 123). Mas que deformidades naõ ha no reſto? Era ſem coraçaõ, ſem pulmões, ſem trachea, ſem aorta, nada de veia cava, mediaſtino, nem thymo. Havia pouca extenſaõ de abdomen, e parte dos inteſtinos eſtava fóra do ventre. Da meſma fórma faltavaõ o eſtomago, figado, baço, pancreas, capſulas renaes, rins, uretheres, bexiga urinaria, e o cordaõ umbilical era de ſeis pollegadas.

Dos fetos hernioſos ſomente, iſto he, ſem fazer cabedal de outra conformaçaõ, tambem naõ he grande a có-

pia.

pia. Além dos já mencionados acha-se nas *Transacções Philosophicas*, ann. 1670, n. 58, art. 3, notado hum Feto de huma figura horrenda com o peito aberto, e os intestinos fóra do ventre.

Nicolau Stenon (*Act. de Compenhague*, ann. 1671, e 1672, *Observ.* 110) vio hum Feto, cujo coraçaõ, figado, ventriculo com o baço adherente, quasi todos os intestinos, e o rim direito estavaõ fóra do thorax, e do abdomen.

Lê-se nas *Ephemerides dos Curiosos da Natureza*, *Dec.* 2, *An.* 6, 1687, *Observ.* 126, outro Feto, cujos intestinos sahiaõ pelo embigo incluido n'uma bolça formada pelo peritoneo: e na *Dec.* 1, *Ann.* 3, *Observ.* 168, acha-se a descripçaõ de outro extremamente monstruoso, sem distinçaõ de sexo, e sem anus, com hum sacco membranoso, e transparente, em que se continhaõ as entranhas thoracicas, e abdominaes. Por hum semelhante sacco membranoso, e transparente se deixavaõ vêr em outro todas as visceras abdominaes (*Eph. N. C. An.* 1688 *Append. Observ.* 45.).

Com todas as entranhas thoracicas, e abdominaes fóra das cavidades, e descubertas acho dous exemplos, hum em *Bonet* (*Observat. Septentrion. T. II. L. IV. Sect.* 9. *Observ.* 29 *in Scholio*), e outro nas *Memorias da Acad. das Sciencias de París* no anno de 1746 communicado por Mr. *Chabelard.*

Para evitar a justa censura do célebre Dr. *Joaõ Gregory* Professor d'Edimburgo n'uma das suas sábias *Lições sobre os deveres, e qualificações do Medico*, naõ deixarei de tentar as utilidades, que se podem offerecer neste producto monstruoso para intelligencia de alguma parte da economia animal, e pelo que respeita aos fenomenos da prenhez, e parto, e suas consequencias.

A primeira cousa admiravel foi a copiosa hemorragia uterina, que veio a cessar sem mais remedio do que o descanço, e dieta. Isto parece provar, que se naõ deve em todos os casos da hemorragia precipitar o parto, como muitos aconselháraõ; mas que ao contrario, quando a hemorra-

ra-

ragia naõ ameaça perigo evidentiſſimo, ſe deve temporizar, procurando pelos meios mais ſuaves a ceſſaçaõ della.

Em ſegundo lugar he de notar a purgaçaõ de côr de caffé, que parada a hemorragia continuou até o dia do parto. Parece moſtrar eſte ſucceſſo, que os vaſos, que davaõ larga ſahida ao ſangue, naõ chegáraõ a tapar-ſe de todo, e fôraõ deixando ſahir hum ſôro ſanguinolento, que imitava a côr do caffé, ſem com tudo dar lugar a deſpego maior da placenta; pois que ainda depois do parto ficou tanto tempo retida ſem evacuaçaõ de ſangue nenhuma abſolutamente.

Daqui meſmo naſce eſpontaneamente outro corollario de naõ ſe dever precipitar temerariamente a extracçaõ das ſegundas, ſe naõ ſeguem immediatamente o feto: e que he preciſo dar tempo a que a Natureza por effeito da contracçaõ do utero as faça ſahir, ſe naõ ha hemorragia muito conſideravel. Corollario taõ recommendado pelos ſabios Parteiros, e nunca executado pelos Cirurgiões faltos de principios, e conhecimentos, a quem muitas vezes ſaõ devolvidas eſtas operações.

Parece provar-ſe a pouca neceſſidade de ligar o cordaõ umbilical da parte da mãi: e que por eſta falta nunca, ou rariſſimas vezes ſe ſeguem hemorragias depois do parto.

E ſendo taõ tenue o cordaõ deſte monſtro, falto de huma das arterias umbilicaes, e a que reſtava taõ delgada, chegando entretanto a huma grandeza regular, parece provar-ſe, que o ſangue da mãi naõ paſſa livremente para o feto, e ſó paſſa hum líquido tenue albuminoſo, do qual o feto pela acçaõ dos ſeus vaſos fórma o ſangue, que pela arteria umbilical ſahe para a placenta; e que no monſtro deſcripto iſto naõ ſuccedia ſómente nos primeiros mezes, mas nos ultimos tambem, contra o parecer de alguns Phyſiologiſtas.

He ultimamente hum dos fenomenos ſuccedidos no parto muito attendivel, e de que ſería difficultoſo dar a expli-

plicaçaõ se a natureza inquirida pela dissecçaõ anatomica naõ a désse; vem a ser: as agoas negras que precedêraõ o parto. Porém deixamos notado, que no sitio do embigo havia hum anus sem sphinter, que com leve pressaõ largava o meconio, e sabemos que he final de se appresentar o feto sentado á sahida do meconio (ainda quando muito bem conformado) pelos simples esforços do utero materno. Que muito pois que, ajuntando-se aos esforços a facil sahida pelo anus monstruoso, as agoas viessem pretas?

Deixo á contemplaçaõ dos Sabios se Mr. *Mery*, nas duas Memorias do anno de 1716 já citadas, e outros que o tem seguido, tem toda a razaõ para negar, que haja exomphalos contidos sómente no peritoneo.

LOXODROMIA DA VIDA HUMANA,

OU

MEMORIA

Em que se mostra, qual seja a carreira da nossa especie pelos espaços da nossa presente existencia.

Por José Joaquim Soares de Barros.

SEmpre a Natureza nas ſuas operações moſtra conſtantes os ſeus motivos, e ſempre na ſua dirrecçaõ ella nos indica os ſeus diverſos empregos, naõ obſtante as differenças que muitas vezes ſe encontraõ em alguns dos ſeus reſultados; pois que eſſas meſmas differenças naõ ſaõ mais que outras tantas confirmações da ſua tendencia primitiva, e dos ſeus primeiros intentos. Se ella obraſſe de outra fórma, ſe a ſua acçaõ foſſe incerta, e fortuita, deſtituidos entaõ os animaes de huma lei geral, e huma regular energia para todos em todo o tempo duravel, neſſe eſtado de ſimultaneos, e encontrados impulſos, e ſem hum inſtincto directorio, e hum principio de huma acçaõ decidida, elles naõ ſeriaõ mais que humas maquinas vertiginoſas, ſempre movidas pelo impeto, e deſtruidas pelas ſuas proprias forças, ou conſervadas pelos acaſos; e os homens em taes circunſtancias, em viſtas taõ arriſcadas, e ſem huma norma invariavel, ſempre á razaõ parallela em diſcurſos acertados, ſe moſtrariaõ ſem remorſo indoceis a todo o preceito, e ſem nenhumas moſtras de agrados para o bello eſplendor da verdade. Em huma ſituaçaõ taõ triſte elles naõ gozariaõ dos grandes beneficios das moradas fixas, e das povoações reguladas, ver-ſe-hiaõ eſpalhados ſobre os eſpaços da terra como animaes ſolitarios,

rios, ſem providencia, ſem conſelho, e ſempre errantes, e deſgraçados. Mas graças á poderoſa Natureza, e áquella illuminada faculdade, que do mais ſublime aſſento lhe foi dada, tudo para nós eſtá mui diverſamente ordenado. Eſſa maõ que perpetuamente nos rege ſem reſiſtencia nos ſeus fins, move a toda a humanidade com hum vigor taõ ſeguro, e regulado como ſempre ſe tem viſto em toda a carreira dos Seculos, ſem que os ſeus grandes deſignios tenhaõ ainda em nada mudado. Tudo ao ſeu dominio ſe ſujeita, ao ſeu Imperio immenſamente dilatado, e com tanta facilidade, que a meſma materia bruta aos ſeus preceitos ſe ajuſta com huma ſubordinaçaõ taõ notavel, como todos os dias o eſtamos vendo nas mais ſeguidas funçóes de todo o corpo organizado.

Reproducçaõ de individuos, e conſervaçaõ de eſpecie, ſaõ da Natureza para todos os viventes os ſeus intuitos mais fixos, as ſuas leis invariaveis, em cuja conſtante obſervancia ella em todo o tempo trabalha, naõ obſtante as excepçóes forçadas, e tambem as voluntarias que algumas vezes encontra na noſſa meſma contingencia, ou na eſcolha dos motivos, com que a noſſa intelligencia ſe propoem á noſſa natural liberdade.

Naõ he porém do noſſo intento, nem ſería bem proporcionar eſte papel, o ſeguir as longas viſtas com que aquella maõ ſempre activa eſtá por toda a parte firmando os ſeus diſignios immutaveis em hum taõ vaſto theatro. Naõ trataremos pois das razóes, com que a natureza nos ſeus largos golpes de viſta ſe modera, e ſe limita no meio da Sociedade; nem diremos aqui nada d'aquellas deſproporçóes, que ella muitas vezes deſaprova nos empregos da grande familia do Eſtado; nem faremos taõ pouco mençaõ d'aquelles vinculos, aquellas obrigaçóes com que ſe formaõ, e ajuſtaõ as mais importantes correſpondencias na meſma Sociedade; e nem meſmo huma ſó palavra diremoc da efficacia dos effeitos pelas meſmas leis promettidos para as mais certas garantias dos grandes, e populoſos

lofos Eftados: pois que tudo ifto naõ admitte provas taõ manifeftas, e taõ claras que ellas fe poffaõ difpôr, e tratar com aquellas proporcionalidades de calculo, de que efpecialmente nos fervimos nefte affumpto que temamos, fó defta fórma reductivel ás confiderações defte lugar em toda a extenfaõ, que lhe damos. Affim com femelhante efpirito trataremos nefte papel daquelle conftante vigor, aquelle poder fempre vivo, que inceffantemente revolve a noffa efpecie com huma acçaõ fempre ajuftada a determinados limites, e a permanentes medidas, aquellas que agora nos fervem para fazermos a fua applicaçaõ, naõ fó a coizas, de que a Filofofia puramente por curiofidade fe agrada, mas tambem com efpecialidade áquellas, fobre que efta vafta Sciencia fe diffunde ainda por maiores efpaços, e empregos de utilidade.

Como hum fruto que da fua planta fe fepara, cahe o homem fobre a terra quando nafce deftituido de todo o movimento de providencia, e de toda a acçaõ de confelho neffe tempo da fua maior miferia nos feus dias arrifcados. Naõ baftaõ as ternuras dos Pais, os feus activos cuidados para livrar a idade mais innocente dos feus maiores, e mais eminentes eftragos. He precifo, que a Natureza receba aquelle tributo, que ella tem determinado, e que ella leve logo comfigo no primeiro anno da vida huma grande parte dos que nafcem. Semelhantes facrificios fe vaõ depois repetindo na continuaçaõ de iguaes periodos com menor effeito, naõ ha duvida, em fucceffivas ruinas; porque cada dia vai tomando maior vigor em alentos vitaes aquella acçaõ, que conduz desde os primeiros dias da vida até ao tempo da puberdade, mas effas perdas faõ ainda taõ confideraveis, que he precifo, que a Natureza fem longa perda de tempo fe determine a fazer de infinitos innocentes menos frequentes os feus eftragos, fe ella quer, que a efpecie dos miferaveis humanos naõ veja o feu fim em poucos dias. Com effeito naquelle tempo, naquella época da puberdade taõ admiravelmente affina-

ſinalada ſe moſtra a meſma Natureza como ſentida de tantas deſtruições, e de tal fórma arrebatadas, e ſe determina a nos dar huma nova faculdade, hum grande, e mui activo poder de reparallas.

D'eſta ſorte paſſaõ todos os individuos da noſſa eſpecie, que ſe avançaõ até áquella paſmoſa época, o tempo dos ſeus perigos mais graves, e aſſim vaõ correndo por huma ſorte de trajectoria até tocar naquelle ponto fixo, aquelle alvo onde a Natureza lança a todos os humanos por huma ſorte de Balliſtica. Lá deſſe ponto da noſſa maior elevaçaõ em forças vitaes, e onde ſe encontra o *Maximum* da noſſa potencia de vida, muda aquella trajectoria de inflexaõ, e toma por huma linha recta o ſeu curſo, durante o eſpaço de ſete annos, desde o termo da puberdade até aos ultimos limites do corpo em longitude. Mui raros ſaõ os individuos de huma meſma Naçaõ, que na Europa ſe affaſtaõ com algumas pequenas differenças deſte taõ medido caminho, deſſa lei taõ fortemente promulgada, e hoje para nós com a ſua ſançaõ em proporções taõ claramente conhecidas, e quando eſſas differenças ſe encontraõ mais, ou menos conſideraveis entre duas, ou mais Nações, todas eſſas deſigualdades ſaõ pela ſabia Natureza, quanto á populaçaõ, de tal fórma com outras de outro genero diſpoſtas e preparadas, que pela ſua combinaçaõ todas tendem ſempre a hum meſmo equivalente, e a hum geral reſultado; pois pela obſervaçaõ ſabemos, que ſe huns povos ſe dilataõ nos eſpaços da vida por maior energia em vitalidade, outros ſem tanto vigor para huma mais larga exiſtencia ſe anticipaõ na época da prolificaçaõ com huma mais prompta fecundidade, compenſando aſſim tudo a Natureza em razões de contingencias, que á noſſa primeira viſta naõ formaõ mais que diverſas ſommas de acaſos; mas que na realidade naõ ſaõ mais que os termos, e os limites de diverſas ordens de expectações calculadas, e ſempre mais, ou menos tendentes ao equilibrio da populaçaõ por caminhos mui diverſos, e mui variados gráos de actividade.

Se com ſemelhantes golpes de viſta olharmos para os trabalhos da Natureza empregados na noſſa eſpecie com equações taõ notaveis, vella-hemos ſempre por todos os lugares da terra occupada em preparar deſta forma em reciproca correſpondencia o termo commum da vida com a media expreſſaõ da fecundidade. Verémos, que ſe por huma parte pela differença do clima hum grande numero de individuos collectivamente conſiderados, e como em expreſſaõ de maſſa, ſe anticipa em fecundidade, por outra parte fica logo perdendo em menor duraçaõ de vida, o que na propagaçaõ tinha ganhado em celeridade; e pelo contrario obſervar-ſe-ha, que onde o primeiro termo da ſerie das gerações principia a retardar, a populaçaó ſe compenſa ao meſmo tempo com huma maior expreſſaõ de vitalidade, ou huma mais larga potencia de vida. Obſervar-ſe-ha tambem, que neſta fórma de equilibrio, a época da fecundidade vai ſempre retardando da equinoccial para as vizinhanças do Polo, e que ao contrario ella vai anticipando do Norte para o Sul o tempo daquella data, e afroxando ao meſmo paſſo com proporcionados deſcontos o poder daquelle agente inviſivel, que faz a medida dos noſſos dias, e já ſe entende, que ſe naõ trata aqui de exactas proporções de Geometria, nem de preciſas analogias de calculo; mas de huma quaſi coincidencia a hum ponto fixo, e de huma mui notavel approximaçaõ aos limites da verdade.

Tudo iſto ſe conclue de hum grande numero de obſervações, que ſe tem feito ſobre eſta materia nas maiores, e menores latitudes do Globo, e na maior parte das latitudes intermediarias, cujas obſervações tendem todas a moſtrar a uniformidade de ſemelhantes reſultados. Naõ ha duvida, que pela meſma razaõ que eſſas obſervações concorrem aſſim taõ ajuſtadamente ſobre differentes lugagares do Globo, ſempre correſpondendo em razaõ reciproca com a dos eſpaços da vida á época da fecundidade, por iſſo meſmo parece, que eſſas meſmas épocas deverão moſ-

moſtrar na direcçaõ do ſeu aſſento outro Circulo Maximo com os ſeus Polos naõ mui diſtantes da Ecliptica, ou huma linha curva de outra natureza; pois que de outra fórma ſeria preciſo ſuppôr, que as ditas épocas naõ recebem do differente gráo de calor central nenhuma alteraçaõ ſenſivel, nem tambem nenhuma notavel differença pela maior, ou menor approximaçaõ dos ſeus reſpectivos lugares á linha da congelaçaõ. Mas como naõ he o noſſo intento fazer neſte eſcrito maiores indagações a eſte reſpeito, baſta-nos o que temos dito dos pontos eſſenciaes deſſas épocas, para que ſe poſſa julgar termos por agora ſatisfeito ao que era preciſo moſtrar neſta materia. Naõ deixarei porém de accreſcentar, que ſeria mui conveniente repreſentalla de outra fórma, com outra diſpoſiçaõ, e outro methodo, que até hoje ſe naõ tem feito, pondo em todas eſſas épocas o tempo da puberdade, o commum limite da prolificaçaõ, e o termo ordinario da vida nos ſeus reſpectivos lugares, ſegundo os ſeus meridianos, e os ſeus parallelos, e referindo-as ao comprimento dos lados de triangulos reduzidos a huma meſma eſcala. Aſſim ſe repreſentaráõ mui facilmente em grande quadro, e debaixo de hum ſó golpe de viſta todas as regularidades, e todas as variações obſervadas, e poderemos vêr tantas coizas curioſas marcadas ſobre o Globo bem conformemente ao que já ſe tem praticado com outras, as Cartas dos ventos, e das monções, e as que repreſentaõ as variações da Buſſola, e o ſyſtema do Magnetiſmo.

Eſtas eſpeculações aſſim tratadas ſeriaõ huma ſorte de anatomia comparativa das differentes porções da noſſa eſpecie eſpalhadas com qualidades, e conſtituições taõ diverſas ſobre toda a face da terra. Sem taes conhecimentos, ſem a noticia do que ſe paſſa nos outros povos, ſem eſtas taõ admiraveis relações, que a Natureza eſtabelece, e determina, o homem he pouco mais de nada, e como ſe naõ exiſtíra para tantas coizas uteis, que deſtes conhecimentos ſe derivaõ, e como hum ponto de luz ſem refle-

flexos invisivel, e como em si mesmo escurecido. Sem se saber o que se passa nos outros, que correm na mesma carreira, quaes saõ os nossos passos communs, as nossas perdas, e os nossos riscos. Sem semelhantes principios, sem estas vistas assim terminadas em pontos certos, e sempre fixos, nada se pode saber de hum grande numero de materias mui curiosas, e mui uteis. He preciso sahirmos fóra de nós mesmos, e lançar o pensamento fóra da nossa individual existencia para medirmos pelo que se passa nos outros os nossos mesmos alentos, e as nossas proprias fraquezas nos diversos espaços da vida, e para sabermos onde ha mais que esperar, ou que temer, quaes saõ em diversos tempos os nossos maiores perigos, e quando se devem presentar aquelles, que parecem mais repentinos. Assim por este caminho póde o homem vêr-se a si mesmo, como desde hum ponto brevemente destructivel, e comparar-se com toda a volumosa massa da sua especie espalhada por todos os espaços da terra em existencia sempre fixa.

Desta fórma poderá elle entaõ bem conhecer, naõ aquelles accessos de esperanças, e de riscos nas idades dos particulares, e nas condições dos seus successos respectivos, mas ainda calcular nas revoluções dos grandes Imperios todos os seus pedaços de ruina, quando as causas saõ bem sabidas, naõ só por perdas de batalhas, ou de grandes acontecimentos imprevistos, mas por outras muitas vezes muito maiores, posto que menos promptamente sentidas, como he a falta de actividade, e de industria dos povos, a satisfacçaõ com o puro necessario, e a esperança só no soccorro do dia. A tudo isto chega, a tudo abraça a especulaçaõ da nossa especie calculada nos damnos da nossa mortandade, nas medidas dos nossos perigos, na expectaçaõ de reparallos, na probabilidade de vencellos; em fim a tudo aquillo, em que he preciso applicar o conhecimento das proporções de toda a escala da populaçaõ, aos mais uteis empregos da paz, e ás mais bem medidas providencias da guerra.

Com

Com femelhante conhecimento fe tem adiantado no noffo Seculo a razaõ das Nações mais illuftradas : naõ deixaremos porém de dizer , que efta Filofofia taõ nova , e de tanto bem para a Sociedade , ainda fe naõ acha á proporçaõ das fuas graves confequencias fufficientemente cultivada , e que em muitas occafiões por efta caufa, por menos bem confiderada , e feguida , ou naõ bem ajuftadamente applicada, fe perde muito em adminiftraçaõ publica , e em grandes recurfos do Eftado.

Mas naõ vamos taõ rapidamente fobre tantos objectos diverfos poftos á mefma vifta fobre hum grande quadro , e naõ fupponhamos a refpeito do feu numero , das fuas proporções variadas, e da differença dos feus contraftes tudo o que eftá dito, já de tal fórma conhecido , que para fixar aqui mais a intelligencia naõ feja precifo fobre ifto dizer mais nada. Moftremos com mais alguma demora o efpirito defta nova Filofofia, verfando fobre os feus objectos analogos com mais alguma novidade, e tomemos por fundamentos aquellas obfervações , e aquelles encontros naõ efperados na noffa viagem pelos diverfos efpaços da vida. Moftremos a fua applicaçaõ com alguma novidade a huma doutrina mui notavel, mefmo á fua origem errada , a huma Filofofia myfteriofa , e grandemente decantada nos faftos da maior antiguidade , para que fe veja logo como desde o efcuro véo da quimera chegamos ao tempo da claridade , ao tempo de ouvirmos em fim o que a mefma Natureza falla , deixando no noffo efpirito hum tom de contentamento , naõ fó de pura curiofidade, mas tambem ao mefmo tempo hum numero de inducções mui notaveis , que podem fer applicadas com efperanças mui proveitofas ao ufo da Medicina , e tambem a fervir com algumas utilidades em materia de contingencias calculadas em maior precifaõ de conhecimentos na Logiftica das probabilidades da vida.

Para conveniente preparaçaõ do noffo intento , levemos a noffa recordaçaõ logo de hum golpe de vifta aos

mais remotos fundos da Hiſtoria, e vejamos os Caldeos conhecidos entre os mais antigos Filoſofos, occupados em myſteriofas combinações de numeros, e em tirar de taes reſultados a reſpeito de certos tempos da vida os mais triſtes, e terriveis annuncios dos noſſos maiores eſtragos. Alguns ſeculos depois encontraremos Pithagoras, e Plataõ Filoſofos bem conhecidos, de tal forma entregues a ſemelhantes doutrinas, que dellas formavaõ huma boa parte dos ſeus ſcientificos principios, donde deduziaõ naõ ſó as razões da harmonia das Esferas, e das Republicas, mas tambem as dos noſſos mais arriſcados tempos da vida por funções da Natureza, e da Fortuna. Os numeros 7, e 9, os ſeus quadrados, e os ſeus productos, e as ſuas multiplicações por outros numeros, eraõ por aquellas theoricas os mais perigoſos á continuaçaõ da noſſa exiſtencia, e formavaõ aquelles taõ terriveis como famoſos annos climatericos, quando contavamos outros tantos de vida. Com taõ authorizados annuncios intimidáraõ-ſe notavelmente os homens, e as fraquezas do temor ſe eſpalháraõ por toda a parte até quaſi aos noſſos dias com as fraquezas da doutrina, ſem porém ſe vêr certamente niſſo mais nada, que taõ ſómente o que a imaginaçaõ pintava. Deſprezados em fim de huma vez os myſterioſos numeros, e tudo o mais que parecia Romance na Fyſica, apparecêraõ de huma nova forma as regiões, e os eſpaços da vida. Apparecêraõ longas ſeries de obſervações da mortalidade dos dois ſexos, que devemos á celebre Cidade de Breslau, e as primeiras neſte genero. Outras muito mais populoſas Cidades, e Londres principalmente, naõ tardáraõ muito em ſeguir aquelle exemplo com grande eſcrupulo, e vigilancia, ficando porém ſempre aquellas primeiras Liſtas as mais eſtimadas entre todas. Deſte grande numero de obſervações taõ curioſas tirou logo a Logiſtica os elementos das probabilidades da vida; os fundamentos das rendas; o das annuidades, e o das Tontinas, e das mais notaveis Loterias; mas deſſas obſervações naõ ſe deduzio nada a

ref-

refpeito dos annos climatericos, e depois de tantos feculos de ruido ficáraõ inteiramente efquecidos, excepto daquelles Authores, que ainda depois fe cançáraõ em impugnallos com huma laboriofa erudiçaõ, e mal empregada critica, fem ao menos fufpeitarem, que por meio d'aquellas Liftas, e algumas breves comparações de calculo, poderiaõ logo mui facilmente conhecer o que certamente a efte refpeito fuccede no curfo da noffa vida, e evitar nefta materia os feus taõ fruftrados trabalhos.

Para acabar logo de huma vez o que efte affumpto ha tantos feculos tem caufado de difputas, determinei-me a confultar a Natureza naquelles feus taõ curiofos arquivos, naquellas obfervações taõ notaveis, e naõ me foi precifo grande trabalho para alcançar logo a refpofta, que bufcava. Começando pelo primeiro anno da noffa exiftencia dividindo pelo numero dos mortos o dos que ficaõ em vida, e continuando affim efta divifaõ até ao ultimo termo da idade mais avançada, que fe acha naquellas Liftas, pude logo haver defta forma a expreffaõ da vitalidade refpectiva a todos os annos da vida. Obfervando entaõ todas as variações defta expreffaõ desde o primeiro até ao ultimo termo defta carreira de tanta lida, vim a conhecer os tempos das maiores perdas da noffa efpecie, os lugares dos feus mais perigofos caminhos, e entaõ encontrei os verdadeiros annos climatericos certamente naõ imaginados, nem ficticios, mas fim aquelles degráos, e decadencias da vida, onde toda a noffa efpecie vai encontrar com os feus mais arrifcados dias, como fe pode vêr na Taboa, que ajunto a efte efcrito, que já com huma obra minha fobre femelhante materia foi impreffa em París no Diario Eftrangeiro, por affim m'o ter pedido o celebre Abbade Prêvot, primeiro Author deffa obra periodica.

Naõ he pois por combinações de números, nem em razaõ dos feus encontros em myfteriofos productos, que a a Natureza nos poem naquelles taõ graves perigos, nem tam-

tambem o caminho, que ella nos determina, he nos ſeus decretos de tal forma invariavel, que naõ haja differenças mui notaveis nos intervallos dos tempos, e nas occurrencias dos riſcos. Naõ he poſſivel olhar para eſta materia em toda aquella extençaõ, a que o eſpirito logo alcança, ſem ſahir dos limites da Fyſica, e ſem entrar nos vaſtos, e indeterminados eſpaços da magnifica Ontologia. Mas nem eſte lugar nos permitte excursões taõ deſmedidas, nem a minha confiança he taõ grande, que me atreva a romper por alli novos caminhos. Deixemos o que eſtá para lá do véo para nós ſempre taõ eſcuro, e vejamos taõ ſómente o que para cá nos fica, o que póde ſer examinado, e bem ſeguramente viſto. Vejamos como os annos climatericos, ſendo em qualquer Paiz bem conhecidos por meio de huma ſerie de obſervações dos que annualmente morrem, podem ſer de grande importancia na theorica, e na pratica da Medicina: ſegundo aquella Taboa das minhas obſervações ſobre eſta materia acima referidas, vemos que a paſſagem de 24 para 25 annos he climaterica para a Cidade de Breslau; pois que em vez de hum, de que devêra diminuir a potencia da vida a continuar naquella meſma perda, que ſucceſſivamente em todos os annos antecedentes tinha tido, contados desde o tempo da puberdade, naõ diminue de 1 como devêra diminuir para ſer igualmente ſeguida, mas ſim de 4, 66; decadencia certamente mui notavel neſſe paſſo da vida por ſer maior de 3, 66, que aquella que ſe obſerva em todos os referidos annos precedentes, donde com toda a evidencia ſe conclue, que ha em Breslau huma cauſa certa de conſtante, e regular effeito em maior mortandade naquelle tempo da vida; e daqui por conſeguinte mui facilmente ſe infere, que os perigos das enfermidades, quaesquer que fôrem as cauſas, ſaõ entaõ na meſma razaõ maiores, que os de cada hum dos annos, que a precedêraõ, contados incluſivamente desde o primeiro anno da puberdade. E ſe ſe fizerem os meſmos diſcurſos a reſpeito de todas as mais decadencias

em

em outros eſpaços da vida, marcados naquella ſobredita Taboa, ver-ſe-ha, que quanto aos maiores perigos ſaõ em tudo bem conformes na continuaçaõ dos reſultados, e que daqui ſe tiraõ differentes appreciações, com que deve ſer tratada a Doutrina das probabilidades da vida, ſobre que agora por me faltar o tempo naõ poſſo dizer mais nada. Fazendo ſemelhantes obſervações nas Liſtas da mortalidade de Londres, e ſervindo-me daquellas meſmas inveſtigações ſobre a expreſſaõ da vitalidade, ou potencia da vida, durante o progreſſo da noſſa ſucceſſiva exiſtencia; vi, que aquelles desfallecimentos, aquellas ſubitas decadencias, ſuccediaõ da meſma ſorte naquella Capital, e que os annos climactericos ſe manifeſtavaõ alli igualmente por ſemelhantes eſtragos, ſem outra differença, que a que ſe encontra no numero, e na variaçaõ dos degráos da eſcada da vida, como ſe póde vêr na folha impreſſa, que contém a Taboa das obſervações de Breslau, onde tambem ſeparadamente ſe acha huma pequena Taboa dos annos climactericos de Londres.

Depois daquellas obſervações, que moſtraõ a exiſtencia dos annos climactericos, era mui facil penſar, que pois havia annos climactericos, e a eſta indagaçaõ ſe applicáraõ varios ſugeitos em diverſos Paizes da Europa, e particularmente em Suecia, e em França, onde ſe tem viſto ſerem mais favoraveis para humas idades o mez de Dezembro, e os cinco primeiros do anno, e para outras os do principio do Outono, ſervindo ſempre a idade de 15 annos de termo commum para a comparaçaõ deſſas differenças. Se a eſtas obſervações, que formaõ a baze de huma eſpeculaçaõ notavel, ajuntarmos as de Sydenham ſobre a circulaçaõ das enfermidades periodicas pelos quatro conhecidos eſpaços do anno, que ordinariamente moſtraõ as paſſagens mais ſenſiveis dos caractéres do anno fyſico, teremos huma nova materia de Fyſiologia, certamente muito mais recommendavel, e muito mais digna de ſer attendida, que outras tratadas com mui particular cuidado

na profiſſaõ da Medicina, e que ſeguramente naõ merecem nenhuma attençaõ em quanto ſe naõ juſtificaõ melhor as ſuas utilidades, como por exemplo, aquella que no tempo de certas faſes da Lua tanto eſcrupuliza na pratica.

Saõ bem evidentemente conhecidos os annos climactericos, e os diverſos gráos dos ſeus perigos, demos agora conſolaçaõ a muita gente dizendo, que ha certos tempos na vida, em que a noſſa vitalidade recebe huma certa porçaõ de alentos, e naõ corre taõ grandes riſcos: a eſtes eſpaços da vida, que ſe poderáõ vêr naquellas referidas Taboas chamei anticlimactericos em razaõ do beneficio. Depois de huma tal conſolaçaõ tambem parece bem digno de ſer ſabido, que eſſes anticlimactericos ſe achaõ mais repetidos naquellas povoações, onde em commum he menor a potencia da vida, como ſe acha marcado nas mencionadas Taboas, e que cada hum poderá logo vêr comparando os reſultados deſtas obſervações dos annos anticlimactericos com as do termo da idade mais avançada, ſegundo as ſobreditas Liſtas de Breslau, e de Londres.

Mas depois que ſe publicáraõ aquellas indagações ſobre os annos climactericos, qual he o uſo que diſto ſe tem feito, naõ de tudo o que aqui digo, porque quaſi tudo agora aqui he novo, mas de algumas couzas a reſpeito deſta materia, e que por meio deſſa obra periodica fôraõ logo bem conhecidas? Pelo que até agora tem chegado á minha noticia, tudo ſe acha como eſtava, e parece que eſte aſſumpto tem paſſado como couza ſó de pura curioſidade. Só Mr. *Moheau* no ſeu excellente Tratado da populaçaõ da França, impreſſo alguns annos depois de apparecerem as minhas conſiderações ſobre aquelle aſſumpto no mencionado Diario, ſe applicou a dar em alguns lugares daquella ſua obra taõ util varias Taboas de obſervações ſobre os mezes, e as Eſtações climactericas, e em nada mais eſta materia ſe tem adiantado. Bem conſidero, que ſe tiveſſe entaõ tratado dos annos climactericos, como agora aqui faço, moſtrando á Fyſiologia por eſte caminho

hum

hum novo auxilio, esta materia naõ ficaria talvez para o bem geral facilmente esquecida; mas quando isto mesmo assim succedêra, tambem naõ me admiraria; pois que estou vendo, que huma das Nações mais illustradas, que tanto se distingue no bem da humanidade em largas especulações, e grandes calculos politicos, ainda para o beneficio, que pode tirar de semelhantes observações, naõ tem dado os primeiros passos. De Inglaterra fallo, e particularmente da sua Capital, onde a nossa especie recebe, mais que em nenhuma outra parte da Europa, os maiores estragos. Alli morre logo no primeiro anno da vida quasi a terceira parte dos que nascem, e nada até hoje se tem praticado para se evitarem perdas taõ graves, naõ parecendo isso de nenhuma forma impossivel.

Fundados sobre taes principios, diremos a respeito desta mesma Naçaõ huma estranha novidade, diremos que por essa causa, por taõ grandes perdas logo nos primeiros annos da vida, ella fica mui diminuta em forças; e que suppostas faculdades iguaes entre essa, e outra qualquer Naçaõ, que se ache com a mesma populaçaõ, sempre ficará da parte da outra Naçaõ a vantagem, que depender do effeito de hum maior numero de individuos empregados em acções do maior vigor. Varias couzas pudéra eu dizer a este respeito, mas tudo reduzirei aos ditos termos necessarios de huma só comparaçaõ. Pelo que ultimamente se tem observado em França se sabe, que ametade da populaçaõ desse Reino se acha de vinte annos para cima, e a outra ametade dos mesmos annos para baixo; e pela Lista da mortalidade de Londres consta, que de 1280 pessoas, que nascem, passados vinte annos já naõ existem mais que 462, isto he, taõ sómente a terça parte dos que vieraõ ao Mundo. Donde he facil de vêr as gravissimas perdas, que teria Inglaterra, se a populaçaõ das outras Cidades, e a dos Campos soffrêra semelhantes estragos. Mas para que esses sejaõ já mui notaveis bastaráõ taõ sómente os de Londres, onde de 800000 pessoas, que nascem, passados vinte annos,

faltaõ

faltaõ 553517, numero igual aos dois terços de toda a sua populaçaõ, supposta esta de 800000 almas; em lugar do que París, suppondo-lhe a mesma populaçaõ, aproveita nesse mesmo tempo mais de 150000 pessoas uteis aos empregos da Paz, e da Guerra.

Em fim pelo que manifestámos neste papel, que a populaçaõ de qualquer Paiz he na razaõ directa da potencia de vida, e pelo que agora acabámos de mostrar, podemos seguramente fazer esta insolita proposiçaõ: Que as forças de hum Estado naõ se devem reputar pela sua actual populaçaõ, como até hoje tem calculado todos os Authores de Economia politica, mas sim pelo numero de individuos capazes de o defender, ou de o servir nos empregos de vigor mais uteis: proposiçaõ que para ser admittida como certa, e infallivel naõ he preciso mais que annuncialla.

Naõ tive tempo para acabar esta memoria como eu tinha pensado, e queria; e fica para outra occasiaõ o tratar da Linha Curva das Economias politicas, cuja descripçaõ com as instrucções do seu uso porá logo debaixo de huma simples vista as comparações, e correspondencias mais importantes sobre huma materia taõ util.

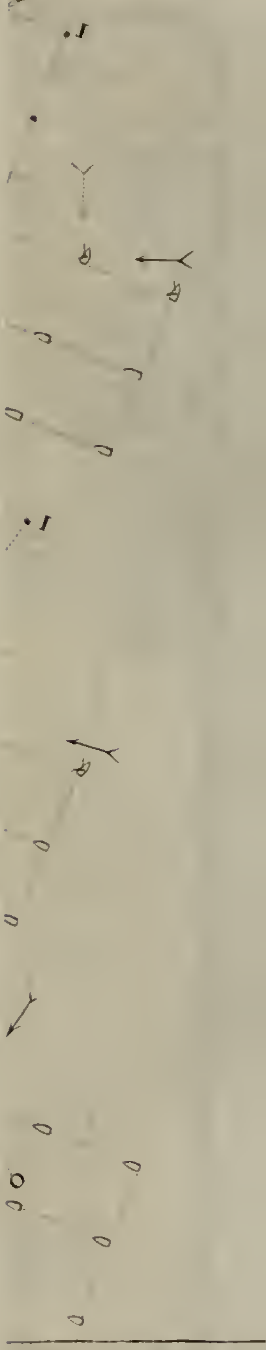
NOTA:

Entre os papeis do Sr. José Joaquim Soares de Barros, se naõ achou copia, nem mesmo borraõ algum de Memoria, ou outro qualquer genero de escrito, em que tratasse da Linha Curva, de que falla neste lugar: nem mesmo nos consta, que se achasse apontamento algum seu sobre esta materia.

ME-

II Pag. 3

ig II



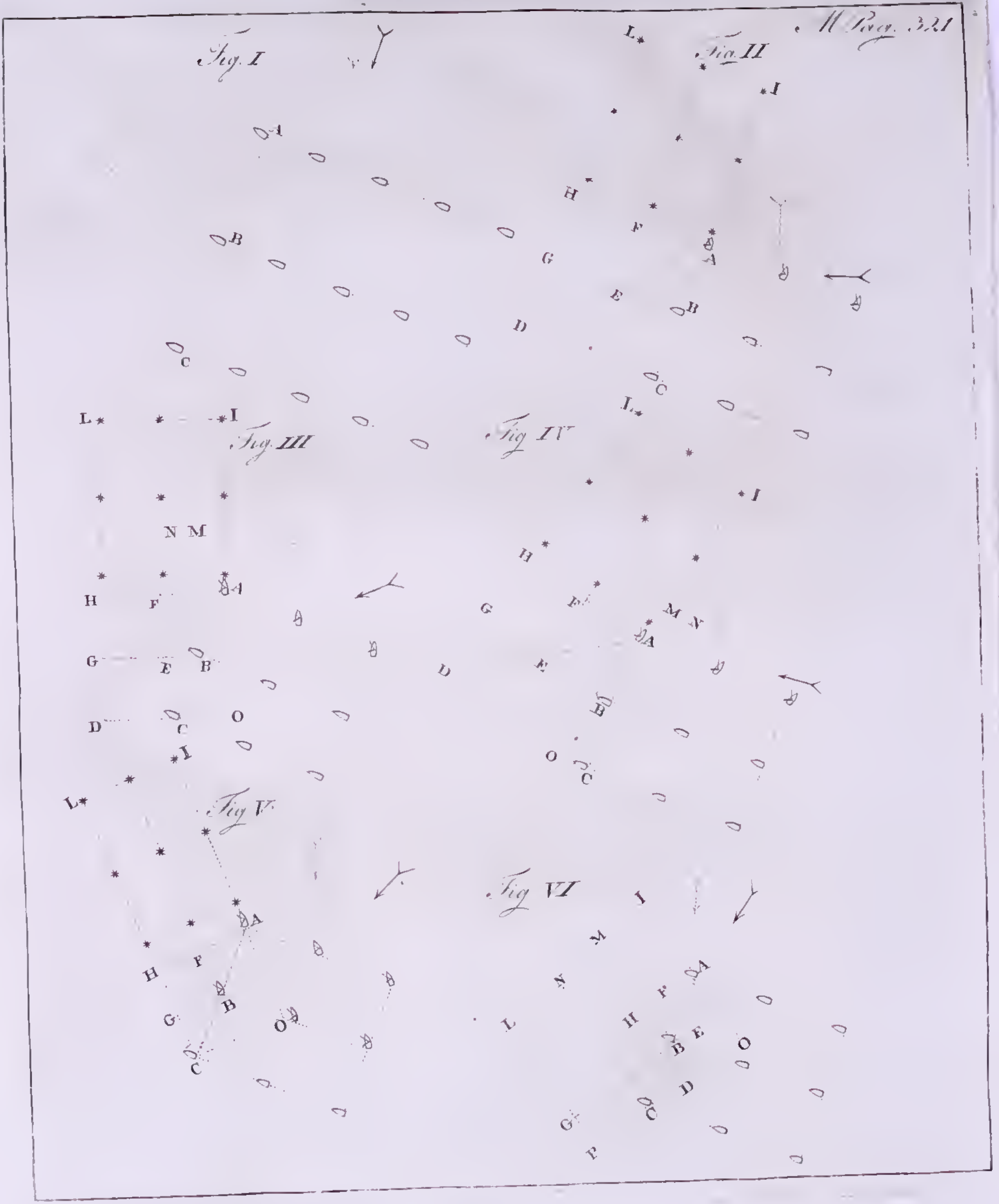


Fig. I
Fig. II
Fig. III
Fig. IV
Fig. V
Fig. VI

TABOA CONSTRUIDA SOBRE AS OBSERVAÇÕES DE BRESLAW

Idades.	Pessoas.	Mortos.	Potencia de vida.	Annos climatericos de
1	1000	145	6,89	
2	855	57	21,00	
3	798	38	24,00	
4	760	28	27,14	
5	732	22	33,27	
6	710	18	39,44	
7	692	12	57,66	
8	680	10	68,00	
9	670	9	74,44	
10	661	8	82,62	
11	653	7	93,31	
12	646	6	107,66	12 *p.ª* 13
13	640	6	106,66	
14	634	6	105,66	
15	628	6	104,66	
16	622	6	103,66	
17	616	6	102,66	
18	610	6	101,66	
19	604	6	100,66	
20	598	6	99,66	
21	592	6	98,66	
22	586	6	97,66	
23	580	6	96,66	
24	574	7	82,00	24 *p.ª* 25
25	567	7	81,00	
26	560	7	80,00	
27	553	7	79,00	
28	546	7	78,00	
29	539	8	67,38	29 *p.ª* 30
30	531	8	66,39	
31	523	8	65,38	
32	515	8	64,38	
33	507	8	63,36	
34	499	9	55,44	34 *p.ª* 35
35	490	9	54,44	
36	481	9	53,44	
37	472	9	52,47	
38	463	9	51,44	
39	454	9	50,44	
40	445	9	49,44	
41	436	9	48,44	
42	427	10	42,70	42 *p.ª* 43

Idades.	Pessoas.	Mortos.	Potencia de vida.	Annos climatericos de	Annos climatericos para a Cidade de Londres.
43	417	10	41,70		12 *p.ª* 13
44	407	10	40,70		20 *p.ª* 21
45	397	10	39,70		24 *p.ª* 25
46	387	10	38,70		29 *p.ª* 30
47	377	10	37,70		39 *p.ª* 40
48	367	10	36,70		75 *p.ª* 76
49	357	10	32,37	49 *p.ª* 50	
50	346	11	31,42		Anticlimatericos.
51	335	11	30,46		
52	324	11	29,46		43 *p.ª* 44
53	313	11	28,46	An. anticlimaterico.	47 *p.ª* 48
54	302	11	30,20	54 *p.ª* 55	54 *p.ª* 55
55	292	10	29,20		61 *p.ª* 62
56	282	10	28,20		70 *p.ª* 71
57	272	10	27,20		76 *p.ª* 77
58	262	10	26,20		
59	252	10	25,20		
60	242	10	24,20		
61	232	10	23,20		
62	222	10	22,20		
63	212	10	21,20		
64	202	10	20,20		
65	192	10	19,20		
66	182	10	18,20		
67	172	10	17,20		
68	162	10	16,20		
69	152	10	15,20		
70	142	11	12,20	70 *p.ª* 71	
71	131	11	11,91		
72	120	11	10,91		
73	109	11	9,91		
74	98	10	8,80		
75	88	10	7,80		
76	78	10	6,80		
77	68	10	6,80		
78	58	9	6,44		
79	49	8	6,12		
80	41	7	5,66		
81	34	6	5,60		
82	28	5	7,66	An anticlimaterico.	
83	23	3		83 *p.ª* 84	
84	20				

MEMORIA

Sobre o Reſtabelecimento da Quinta Ordem de Marcha, alterada por haver alargado o vento.

POR MANOEL DO ESPIRITO SANTO LIMPO.

POucas luzes de Tactica Naval baſtaõ para ſe reconhecer, que a maior difficuldade neſta Arte conſiſte no reſtabelecimento da ordem, depois de mutaçaõ de vento. Se as regras, que haõ de praticar-ſe em taes occaſiões, naõ forem claras, e de facil, e prompta execuçaõ, difficultoſamente deixará de perſiſtir por muito tempo a confuſaõ, da qual reſultará neceſſariamente ou retardaçaõ na expediçaõ, a que ſe deſtina a Armada, ou conſequencia ainda mais funeſta, achando-ſe preſente Armada inimiga de melhor diſciplina. Eſtes inconvenientes haõ de infallivelmente repetir-ſe mais vezes ſe acontecer, que para o reſtabelecimento da formatura, em que mais frequentemente ſe navega, ſe preſcrevaõ regras de ſemelhantes defeitos: eſta formatura he ſem dúvida a Quinta Ordem de Marcha, pois que as primeiras tres difficultaõ a communicaçaõ dos ſignaes por demaſiadamente extenſas, e a quarta exige tempo conſideravel para ſe reduzir á ordem de batalha; e he com effeito para o reſtabelecimento da Quinta Ordem de Marcha, alterada por haver alargado o vento, que grande parte dos Tacticos tem propoſto manobras longas, vagas, obſcuras, difficeis, e erroneas. Eu moſtrarei na primeira parte deſta Memoria a verdade da ultima aſſerçaõ, accreſcentando as correcções, de que algumas das ditas manobras ſaõ ſuſceptiveis; e exporei na ſegunda os methodos verdadeiramente Geometricos, que propõe Mazaredo para reſtabelecer a Quinta Ordem de Marcha, havendo alarga-

gado o vento; eſtabelecendo anticipadamente os principios, em que elles ſaõ fundados, por via de applicaçaõ da Algebra á Geometria, em lugar de uſar de ſimplices conſtrucções geometricas, como o ſeu Inventor. Por eſte meio, ſem dúvida mais fecundo, acharei facilmente mais verdades que aquellas, de que faz mençaõ o dito Author.

PRIMEIRA PARTE.

MOrogues, cuja authoridade entre os da profiſſaõ he bem notoria: Morogues, que ſe explica menos vagamente, e com mais clareza do que outros, manda manobrar no reſtabelecimento da Quinta Ordem de Marcha do meſmo bordo, alterada por haver alargado o vento, da maneira ſeguinte:

I. „ Si le vent vient peu de l'arriere (fig. I.), ... „ la colomne du vent diminuera de voiles, celle du milieu „ conſervera ſa voilure, & la colomne de ſous le vent for- „ cera de voiles. Le premier Vaiſſeau (A) de la colomne „ du vent tiendra le vent; & les têtes (B, C) des co- „ lomnes de ſous le vent, obſervant leur diſtance, vien- „ dront inſenſiblement au lof en ſe tenant par le travers „ du chef de file du vent. Les Vaiſſeaux de chaque co- „ lomne ayant même voilure que le Vaiſſeau de leur tête, ou „ plus-tôt une voilure qui leur procure un ſillage égal, ſe „ mettront ſucceſſivement dans ſes eaux. L'ordre rétabli, „ on corrigera les diſtances. „

II. „ Mais ſi le vent vient beaucoup de l'arriere, ... „ la colomne du vent mettra en panne (fig. II, III, IV.). „ La colomne de ſous le vent forcera de voiles dans la „ perpendiculaire à la nouvelle ligne du plus-près; & „ quand le Vaiſſeau (C) de la tête de cette colomne re- „ levera le chef de file (A) de la colomne du vent qui ſe- „ ra en panne, à 4 rumbs au vent de la ligne du plus- „ près, il reviendra tout à fait au lof (D), & ſa colom-

„ ne

„ ne y viendra également au même point, & dans ses eaux.
„ La colomne du milieu manœuvrera de la même maniere
„ que l'Escadre de sous le vent, observant de ne point
„ parvenir au point (E), où son premier Vaisseau doit en-
„ tierement venir au lof, avant que la tête de la colomne
„ de sous le vent soit elle même parvenue au point, où el-
„ le doit serrer le vent; elle fera donc très petites voi-
„ lès, & mettra même en panne s'il est nécessaire, en at-
„ tendant que le chef de file (C) de sous le vent soit
„ parvenu au point (G) par son travers, & alors les deux
„ colomnes forceront également de voiles au plus-près. En
„ fin lorsque les têtes (F, H) des colomnes de sous le
„ vent tenant le vent, seront parvenues ensemble dans la
„ perpendiculaire du plus-près par le travers du premier
„ Vaisseau (A) de la colomne du vent; alors celle-ci fera
„ servir dans la ligne de la panne, pour que ses Vaisseaux
„ courent largue en se rendant dans les eaux de leur tê-
„ te (A) qui tiendra le vent. Par cette manœuvre, qui est
„ la moins longue, & la moins confuse qu'on puisse exe-
„ cuter, les Vaisseaux ne perdront point au vent, & re-
„ prendront aisément leur distance en se relevant. „

Por ventura por se distinguirem entre si as vozes *pouco*, e *muito* ficaõ por isso distinctos os dous casos, que se consideraõ na soluçaõ precedente? E as idéas representadas pelas mesmas duas vozes, naõ se referem ellas a huma unidade, ou grandeza intermedia, que parece offerecer hum terceiro caso? Ou se este terceiro caso se póde comprehender indifferentemente em qualquer dos outros dous, naõ será necessario determinar o limite em augmento do *pouco*, e o limite em diminuiçaõ do *muito*, ao menos para distinçaõ delles?

Talvez se diga que quando se naõ especifica a unidade, a que se refere o pouco, e o muito, se deve entender por termo de comparaçaõ o estado medio, que no caso actual he de cinco quartas. Poderá tambem lembrar, que a figura, a que o Author refere a descripçaõ da manobra

(fig.

(fig. I.), aſſás moſtra, que o pouco naõ paſſa de 15.° Finalmente talvez lembre dizer, que naõ ha inconveniente em ampliar-ſe o muito, e diminuir-ſe o pouco como bem ſe quizer, e que por tanto naõ he indiſpenſavel a determinaçaõ de ſeus limites.

Mas offerecendo-ſe conjecturas taõ diverſas, a qual dellas ſe dará preferencia? A vacillaçaõ ceſſa por algum tempo, achando-ſe em Mazaredo eſtas palavras: *Alargandoſe el viento una cantidad pequeña, que debe entenderſe haſta dos quartas, ò poco màs.* Como porém a ſimples authoridade em couſas de razaõ he de pouco momento, brevemente ſe torna ao primeiro eſtado de dúvida. Com a luz da Geometria deſapparecem por fim as trévas. Ella moſtra, que a manobra mencionada em ſegundo lugar (II.) ſe naõ póde verificar em todas as ſuas partes, comprehendendo-ſe no *muito* quatro quartas; e que he abſolutamente impoſſivel a ſua execuçaõ, querendo-ſe comprehender no meſmo *muito* menos de 45°: conſequentemente vem a ſer quatro quartas o limite em augmento do pouco, e o limite em diminuiçaõ do muito para ſer praticavel a doutrina de Morogues em todas as circumſtancias. Ella moſtra com igual evidencia, que as diſtancias das columnas ſe naõ alteraõ com a dita manobra havendo alargado o vento oito quartas, e que ficaõ diminutas havendo alargado mais ou menos de 90°, naõ obſtante affirmar Mazaredo nos ſeus *Rudimentos de Tactica Naval*, que quando o vento alarga menos de oito quartas ficaõ as diſtancias das columnas com incremento. Paſſemos pois a manifeſtar eſtas verdades.

A figura II. repreſenta a evoluçaõ para o caſo, em que o vento tem alargado oito quartas. Será logo indicada a nova linha de bolina *AI*, ou *DL* pela linha de frente *CBA*; os chefes de fila *B*, *C* ſeguiráõ as ſuas derrotas *BE*, *CD*; e devendo ſer em *D* o angulo *ADH* de 45° pela deſcripçaõ da manobra (II.), e o angulo *CDH* de 90°, ſeraõ os angulos *ADC*, *CAD* de 45° cada hum, e por conſequencia *CD* = *AC*. Mas o angulo *CAH* he de 90°, por de-

dever confiderar-fe a quilha do navio atraveffado *A* na linha de bolina *AI*: ferá logo a figura *ACDH* hum quadrado, e confequentemente *AH* = *AC*. Conferva pois nefte cafo a nova linha de frente *AH*, ou *IL* a extenfaõ *AC*, que tinha antes da evoluçaõ.

A figura III. indica a evoluçaõ para o cafo, em que o vento tem alargado feis quartas. Faltando pois duas quartas para 90°, formará a nova linha de bolina *IAO*, e fuas parallelas *BM*, *CN*, *EF*, *DL* hum angulo de duas quartas com a linha de frente *ABC*, e confequentemente, caminhando os chefes de fila *B*, *C* pelas rectas *BG*, *CD* perpendiculares a *DL*, podem chegar a pontos *D*, *E*, nos quaes fe verifique a condiçaõ, que exige a manobra (II.), de ferem os angulos *ADH*, *AEF* de 45° cada hum. A figura *AHDO* he hum quadrado, cujo lado *AO* he menor que a recta *AC*, por fer *AC* hypothenufa do triangulo rectangulo *ACO*: terá logo a nova linha de frente *AH*, ou *IL* extençaõ menor que a primitiva, e naõ maior, como affevera Mazaredo quando diz: *Porque faldrá mal en otro qualquiera, quedando demafiado abiertas las columnas, fi es menor de las ocho quartas, y demafiado cerradas fiendo mayor* [Rudimentos de Tactica Naval, n. 237. pag. 154.].

A mefma manobra fe verifica em todas as fuas partes (e tambem a mefma propriedade) quando o vento alarga menos ou mais de feis quartas, dentro dos limites quarenta e finco, e noventa gráos. Havendo porém alargado fó quatro quartas (fig. V.) formará a nova linha de bolina *IAO*, e fuas parallelas *BF*, *CL* hum angulo de 45° com a linha de frente *ABC*; e confequentemente deverá orçar, e cingir logo o vento o tefta de columna *C*, e a columna do centro deve logo atraveffar juntamente com a de barlavento. Naõ tem pois lugar nefte cafo aquella parte da manobra, em que fe ordena que as duas columnas de fotavento caminhem pela perpendicular á nova linha de bolina. As diftancias das columnas ficaõ diminutas por fer o lado *AO* de hum quadrado menor que a fua diagonal *AC*.

Se

Se o vento alargar menos de quatro quartas he impoſſivel a execuçaõ da manobra. A figura VI. repreſenta o caſo, em que o vento alarga tres quartas. Faltando pois cinco quartas para 90°, formará a nova linha de bolina *IAO*, e ſuas parallelas *EF*, *BM*, *DH*, *CN*, *PL* hum angulo de cinco quartas com a linha de frente *ABC*; e conſequentemente, caminhando os chefes de fila *B*, *C* pelas direcçóes *BG*, *CP* perpendiculares a *PL*, ſe apartaráõ cada vez mais das ſituaçóes *E*, *D*, em que ſe verifica a condiçaõ que exige a manobra (II.) de ſerem os angulos *ADH*, *AEF* de 45° cada hum. Sería pois neceſſario que ſeguiſſem rumo oppoſto *BE*, *CD* para conſeguirem os lugares *D*, *E*. Mas ſendo na hypotheſe actual os angulos *ACN*, *ABM* de cinco quartas cada hum, ſerá cada hum dos angulos *ACO*, *ABE* de tres quartas, e por conſequencia diſtará o dito rumo *BE*, *CD* ſó duas quartas da nova origem do vento: he logo rumo do *eſpaço indirecto*, do *eſpaço cruzado*, do *eſpaço naõ graduado*, ou da *parte difficil do horizonte*, adoptando a linguagem de Grenier [*L'Art de la Guerre ſur Mer.*], e por conſequencia naõ ſendo poſſivel dar por elle ſeguimento aos navios, he erronea neſte caſo a regra que aſſim o preſcreve, como tambem naquelles, em que o vento alargar menos de tres quartas, ou mais de tres, ſem chegar a quatro.

A figura IV. repreſenta a evoluçaõ para o caſo, em que o vento tem alargado nove quartas. Havendo pois huma quarta de exceſſo ſobre 90°, formará a nova linha de bolina *BM*, e ſuas parallelas *CN*, *IAO*, *EF*, *DL* com a linha de frente *ABC* hum angulo de 11° 15′, e outro tanto haõ de notar os navios *B*, *C* marcando o teſta *A* da columna de barlavento: demora logo eſte no principio da evoluçaõ huma quarta *ABM*, *ACN* a ſotavento da nova linha de bolina relativamente aos teſtas *B*, *C* das columnas de ſotavento. Caminhando porém os dous ultimos pelas rectas *BG*, *CD* perpendiculares á nova linha de bolina *DL*, como preſcreve a regra (II.), podem chegar a pontos *D*, *E*, em os quaes

quaes o navio *A* lhes demore quatro quartas *AEF*, *ADH* a barlavento da nova linha de bolina. A figura *AHDO* he hum quadrado, cujo lado *AO* he menor que *AC*, e por essa razaõ a nova linha de frente *AH*, ou *IL* tem menor extensaõ que a primitiva *AC*.

Da illustraçaõ precedente se conclue facilmente, que he de absoluta necessidade determinar o *pouco* (I), e o *muito* (II.) da regra de Morogues, e acrescentar o caso intermedio, para que o seu methodo seja praticavel no todo, ou só em parte em quaesquer circunstancias da questaõ actual: devem logo considerar-se os tres casos seguintes:

I. *Restabelecer a Quinta Ordem de Marcha da mesma amura, havendo alargado o vento menos de quatro quartas.*

II. *Restabelecer a Quinta Ordem de Marcha da mesma amura, havendo alargado o vento mais de quatro quartas.*

III. *Restabelecer a Quinta Ordem de Marcha da mesma amura, havendo alargado o vento quatro quartas.*

No primeiro caso, póde manobrar-se como prescreve Morogues para quando o vento alarga pouco; no segundo, como estabelece para quando o vento alarga muito; e no terceiro, da mesma sorte que no segundo, supprimindo-se aquella parte da regra, em que se ordena, que os testas das duas columnas de sotavento naveguem por direcções perpendiculares á nova linha de bolina, sendo seguidos pelos demais navios das mesmas columnas por movimento successivo.

A pezar das precedentes correcções se naõ consegue dar perfeiçaõ ao methodo que Morogues nos propõe. Se o vento alarga entre duas, e quatro quartas, tem os navios das duas columnas de sotavento que correr arcos consideraveis antes de ganharem o travez dos seus correspondentes da columna de barlavento; e se naõ he muito facil conservar os navios em seguimento por hum rumo determinado, como vem advertido no num. 35 do *Compendio de Manobra de Navio*, que dei á luz para instrucçaõ dos Alumnos da Real Academia da Marinha, mais difficil será sem dú-

dúvida conſervar regularidade por caminho curvelineo (*). Eſta he, certamente, a razaõ, por que Mazeredo naõ eſtende o *pouco* ſenaõ a algum tanto mais que duas quartas, ainda que naõ adverte no impoſſivel que ſe ſegue de incluir no *muito* menos de quatro. Será logo mais conveniente manobrar neſtas circunſtancias como no ultimo dos tres caſos, conſiderados precedentemente; e por tanto deve a queſtaõ dividir-ſe, e reſolver-ſe da fórma ſeguinte.

I. *Reſtabelecer a Quinta Ordem de Marcha da meſma amura, havendo alargado o vento naõ mais de duas quartas.*

II. *Reſtabelecer a Quinta Ordem de Marcha da meſma amura, havendo alargado o vento mais de quatro quartas.*

III. *Reſtabelecer a Quinta Ordem de Marcha da meſma amura, havendo alargado o vento mais de duas quartas, ſem paſſar de quatro.*

No primeiro caſo ſe manobra como determina Morogues para quando o vento alarga pouco. No ſegundo como preſcreve para quando o vento alarga muito. E no terceiro da meſma ſorte que no ſegundo, ſupprimindo-ſe parte da manobra, como já fica advertido; iſto he: as duas columnas de barlavento atraveſſaõ; o teſta da columna de ſotavento cinge o vento, e he ſeguido por movimento ſucceſſivo pelos demais navios da ſua columna; e quando o dito teſta chega a pôr-ſe pelo travez do chefe de fila da columna do centro, marêa eſte á bolina, e he ſeguido pelos demais navios da ſua columna por movimento ſucceſſivo: a columna de barlavento ſe regúla pelas outras duas, como a do centro ſe regulou pela de ſotavento. As duas columnas de ſotavento reſtabelecem as diſtancias. [*L'Art des Armées Navales par le P. Hoſte*, *Troiſieme Partie*, §. V., II., *Remarque* 1.]. Se Morogues que ſoube, fallando ge-

(*) Conſidero o horizonte como hum circulo, em cujo centro ſe acha o navio, e os rumos como outros tantos raios do meſmo circulo: por tanto ſupponho nulla a curvatura dos arcos, por que caminhaõ os navios, quando ſeguem o meſmo rumo. Eſta ſuppoſiçaõ he admiſſivel no eſpaço a que ſe póde eſtender huma evoluçaõ.

ralmente, diſtinguir no Tratado do P. Hoſte o verdadeiro util do deſneceſſario, o luxo da theorica do indiſpenſavel na prática, deixou de adoptar nas circunſtancias do terceiro caſo eſte modo de manobrar, foi certamente porque ſe perſuadio da generalidade do methodo, que nos propôs para quando o vento alarga *muito* (II.), e naõ por querer eſtender o *pouco* (I.) a quatro quartas; porque tal intenſaõ naõ póde haver ſem ſe reconhecer o impoſſivel que patenteámos, e occultallo depois de reconhecido ſería indeſculpavel.

Naõ ſería tambem deſacerto ſubdividir o ſegundo caſo em tres, attendendo a que nelle tem humas vezes os teſtas das duas columnas de ſotavento que arribar do alinhamento primitivo de bolina das ſuas reſpectivas eſquadras, outras que orçar, e outras em fim em que tem que continuar as ſuas derrotas para ſe dirigirem aos lugares, aonde devem cingir o vento. Deſta ſorte ficaria a queſtaõ dividida como ſe ſegue:

1.° *Reſtabelecer a Quinta Ordem de Marcha da meſma amura, havendo alargado o vento naõ mais de duas quartas.*

2.° *Reſtabelecer a Quinta Ordem de Marcha da meſma amura, havendo alargado o vento oito quartas.*

3.° *Reſtabelecer a Quinta Ordem de Marcha da meſma amura, havendo alargado o vento mais de oito quartas.*

4.° *Reſtabelecer a Quinta Ordem de Marcha da meſma amura, havendo alargado o vento entre oito e quatro quartas.*

5.° *Reſtabelecer a Quinta Ordem de Marcha da meſma amura, havendo alargado o vento mais de duas quartas ſem paſſar de quatro.*

No 1.° e 5.° caſo naõ ha que advertir. No ſegundo porém devem os teſtas das duas columnas de ſotavento ſeguir as ſuas derrotas até aos pontos, em que ſe haõ de pôr á bolina na conformidade da regra de Morogues para quando o vento alarga muito (fig. II.).

No terceiro orçaõ os ditos teſtas quanto for o exceſ-

ſo

ſo da quantidade, que o vento tiver alargado, ſobre oito quartas (fig. IV.).

No quarto finalmente devem arribar quanto oito quartas excederem a quantidade, que o vento houver alargado (fig. III.).

Depois de tantas, e taõ neceſſarias correcções, eſtá bem longe de merecer toda a approvaçaõ ſemelhante modo de manobrar. Se o vento alarga naõ mais de duas quartas, tem os navios das duas columnas de ſotavento que caminhar por arcos, antes de ganharem o travez dos ſeus correſpondentes da columna de barlavento; e ſe o vento alarga entre duas e oito quartas, ou mais de oito, ficaõ as diſtancias das columnas diminutas: e ainda que na prática ſeja facil corrigir tal defeito, como affirma Morogues, quando diz: *& reprendront aiſement leur diſtance en ſe relevant* (II.), com tudo em rigoroſa theorica he intoleravel. Além diſſo, a generalidade de huma evoluçaõ he que lhe dá toda a elegancia, a facilidade, e promptidaõ lhe fazem merecer toda a preferencia. No methodo precedente devem conſiderar-ſe ao menos tres caſos, que exigem tres modos diverſos de manobrar: naõ he logo geral. Quando o vento alarga oito quartas, o chefe de fila *C* (fig. II.) de ſotavento tem que caminhar, antes de ſe reſtabelecer a formatura, pelas rectas *CD*, *DL*, cuja ſomma he quaſi igual á extenſaõ das tres columnas; he logo nimiamente vagaroſa a evoleçaõ neſte caſo, como tambem naquelles, em que o vento alargar mais de oito quartas. E ſe o vento alarga quatro quartas, ou entre quatro e oito naõ fica, certamente, expedita; pois que no primeiro caſo tem que correr o chefe de fila *C* (fig. V.) da columna de ſotavento mais de ametade da extenſaõ da Armada, antes do reſtabelecimento da ordem, por ſer o lado *CH* do quadrado *AHCO* maior que ametade do comprimento de huma columna, como he facil de reconhecer, repreſantando por *a* o comprimento de huma columna, por *x* o lado do quadrado *AHCO*, e advertindo que a linha de frente *AC* he

igual

igual a $\frac{5}{6}a$ [*Tactique Navale de Morogues*, I. *Partie*, *Chap.* II. n. 28.], donde se deduz $x=\frac{5a}{\sqrt{72}}$; e no segundo caso tem que caminhar espaços ainda maiores, chegando estes a ser em algumas circunstancias pouco menores que a extensaõ das tres columnas: naõ tem logo promptidaõ. Este he com tudo aquelle methodo de que Morogues affirma ser o mais curto, quando diz: *Par cette manœuvre, qui est la moins longue, & la moins confuse qu'on puisse executer*, &c. (II.). Passemos a expôr os de Mazaredo, para que cada hum delles se possa confrontar com as manobras precedentes.

SEGUNDA PARTE.

Mazaredo, que tambem naõ adopta o methodo, que acabei de analysar, naõ por haver conhecido o impossivel que se encontra na manobra em alguns casos, mas taõ sómente pela razaõ de se alterarem por via delle as distancias das columnas, ainda que a alteraçaõ, que ellas soffrem, quando o vento alarga menos de oito quartas, se lhe representasse de huma maneira erronea, nos propõe dous modos de manobrar no restabelecimento da Quinta Ordem de Marcha, depois de haver alargado o vento, que merecem sem dúvida toda a preferencia. A excellencia de hum delles consiste em caminharem os navios direitamente para os lugares, que haõ de occupar na nova formatura; e os principios, em que ambos se fundaõ, saõ os seguintes:

I. PRINCIPIO.

Caminhando á bolina dous navios em linha de travez, e havendo se esta alterado por ter alargado o vento, restabelecer-se-ha o dito travez de bolina, em igual distancia, para se na-

ve-

Fig IX

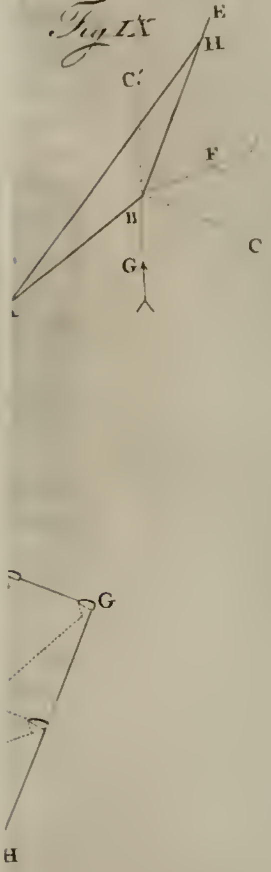


Fig. VII

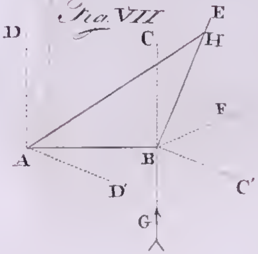


Fig. VIII

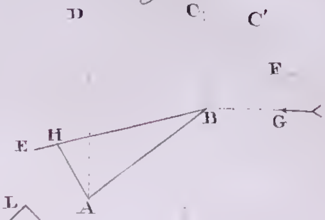


Fig. IX

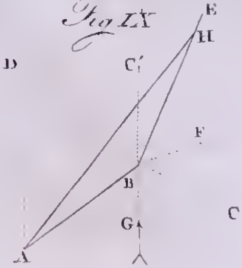


Fig. X

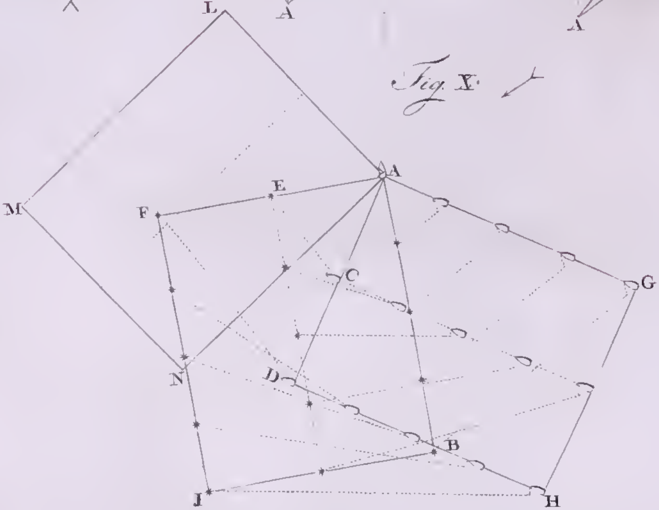
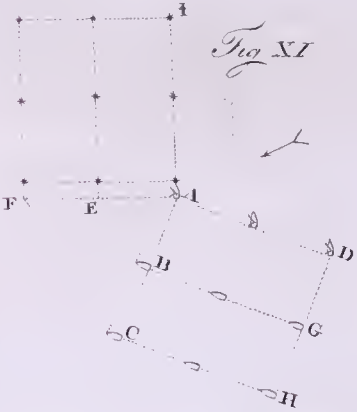


Fig. XI



vegar com amuras do mesmo lado, atravessando o navio que se achava a barlavento antes da mudança do vento, e seguindo o outro hum rumo, que diste igualmente da primitiva, e da nova linha de bolina.

Seja A (fig. VII.) o navio que estava a sotavento antes da mudança do vento, B o de barlavento; AD, BC o rumo de bolina primitivo perpendicular á linha de travez AB; F a origem primitiva do vento, e G o ponto para onde se suppõe ter elle alargado. Forme-se no ponto B da recta BG o angulo $C'BG$ igual a seis quartas, e tire-se do ponto A a recta AD' parallela a BC': levante-se do ponto B a recta BE perpendicular a BC', corte-se della a parte BH igual a AB, e tire-se a recta AH.

Sendo por construcção BC', ou AD' o novo rumo de bolina, e BH, que he igual a AB, a nova linha de travez, será AH o rumo que deve seguir o navio A para restabelecer o travez de bolina com o navio B, em distancia BH, igual á primitiva AB.

Represente m a mudança angular do vento FBG, ou ABH; x o angulo BAH, ou AHB: será $2x + m = 16$ *quartas*, e $x = 8$ *quartas* $- \frac{1}{2}m$. Mas he o angulo $BAD = 8$ *quartas*: logo o angulo DAH será igual a 8 *quartas* $-$ (8 *quartas* $- \frac{1}{2}m) = \frac{1}{2}m$, como se queria demonstrar.

COROLLARIOS.

1.° Pelo mesmo methodo poderáõ os navios A, B restabelecer o travez de bolina, em distancia igual, para navegarem amurados do outro lado, quando o vento houver escaceado. Viraráõ de bordo simultaneamente, suppor-se-ha que se seguia á bolina rumo opposto ao primitivo, e se acharáõ no caso do *Principio* estabelecido: o navio B será eixo do movimento.

2.° Se o vento salta para o outro bordo, e depois de suppor-se, que se navegava á bolina com amuras contrarias, se deva considerar o vento como havendo alargado, po-

dem pelo mesmo methodo os navios *A*, *B* restabelecer o travez de bolina, em distancia igual, para navegarem amurados do outro lado. Supponha-se que se navegava á bolina com amuras contrarias ás primitivas, faça-se *A* eixo do movimento, e manobre o navio *B* como manobrou o navio *A* no caso do Principio.

3.° Se o vento salta para o outro bordo, e depois de suppor-se que se navegava á bolina com amuras contrarias, se deva considerar o vento como havendo escaceado, podem os navios *A*, *B* restabelecer pelo mesmo methodo o travez de bolina, em igual distancia, para navegarem amurados do mesmo lado. Viraráõ de bordo simultaneamente, suppor-se-ha que se seguia á bolina rumo opposto ao primitivo, e se acharáõ no caso do Principio demonstrado: o navio *A* será eixo do movimento.

II. PRINCIPIO.

Se dous navios navegarem á bolina naõ em linha de travez, mas sim indo o de barlavento mais adiantado que o de sotavento em alinhamento tal, que forme constantemente o mesmo angulo agudo com a direcçaõ de bolina, que segue o navio de sotavento, e havendo-se este alterado por ter alargado o vento, restabelecer-se-ha o dito alinhamento, ou o dito angulo agudo, em distancia igual, para se navegar com amuras do mesmo lado, atravessando o navio que se achava a barlavento antes da mudança do vento, e arribando o outro [quando naõ seja necessario orçar, ou continuar a mesma derrota] da sua primeira linha de bolina oito quartas, menos o angulo agudo mencionado, e menos ametade da mudança angular do vento.

Seja *B* (fig. VIII.) o navio que estava a barlavento antes da mudança do vento, *A* o de sotavento; *AD*, *BC* o rumo primitivo de bolina, que fórma com o alinhamento *AB* dos dous navios o angulo *BAD* agudo, e o angulo *ABC* obtuso, supplementos entre si; *E* a origem primitiva do vento, e *G* o ponto para onde se suppõe ter elle alargado.

do. Forme-se no ponto *B* da recta *BG* o angulo *C'BG* de seis quartas, e no ponto *B* da recta *BC'* faça-se o angulo *C'BE* igual ao angulo *ABC*: corte-se da recta *BE* a parte *BH* igual a *AB*, e tire-se a recta *AH*.

Sendo por construcçaõ *BC'* o novo rumo de bolina; e estando *BH*, que he igual á *AB*, inclinada sobre *BC'*, como *AB* sobre *BC*, será *AH* o rumo que deve seguir o navio *A* para restabelecer em *H* o seu alinhamento primitivo com *B*, relativamente á linha de bolina, em distancia igual *BH*.

Represente *m* a mudança angular do vento *FBG*, ou *ABH*; *x* o angulo *BAH*, ou *AHB*; e *r* o angulo agudo *BAD*, de que se fez mençaõ no enunciado do Principio actual: será $2x + m = 16$ *quartas*, e $x = 8$ *quartas* $- \frac{1}{2} m$: he logo o angulo $DAH = 8$ *quartas* $- r - \frac{1}{2} m$; como se queria demonstrar.

COROLLARIOS.

1.° A expressaõ do angulo *DAH* indica que o navio de sotavento *A* (fig. IX.) deve orçar, em lugar de arribar, quando os termos negativos $- r - \frac{1}{2} m$ derem huma somma que exceda o valor do termo positivo 8 *quartas*; e tanto quanto for o dito excesso.

2.° Ella mostra igualmente que o navio de sotavento *A* deve continuar a sua derrota primitiva quando $- r - \frac{1}{2} m$ for igual a 8 *quartas*.

3.° Tambem se deduz da mesma expressaõ, que quando *r* for igual a 8 *quartas* deve orçar o navio de sotavento ametade da mutaçaõ angular do vento, o que concorda com o I. Principio (*).

4.°

(*) Ainda que o primeiro Principio seja hum Corollario do segundo, eu estabeleci aquelle independentemente deste; naõ tanto por imitar Mazaredo, como por ter que deduzir do primeiro alguns Corollarios, dous dos quaes naõ podem verificar-se sempre no segundo Principio, como se adverte no 4.° Corollario, que agora se segue.

4.° Ella moſtra com igual clareza, que quando r for maior que 8 *quartas*, deve neceſſariamente orçar o navio de ſotavento, pois que entaõ ſe verifica, como no Corollario precedente, o que ſe advertio no 1.° Corollario. Mas na hypotheſe actual, naõ he ſempre praticavel o reſtabelecimento do alinhamento primitivo dos dous navios pelo methodo preſcrito; porque o navio de ſotavento naõ póde orçar, para pôr-ſe em ſeguimento, mais do que a mudança angular do vento: determinemos pois a condiçaõ dos caſos poſſiveis.

Pelo Corollario primeiro tem que orçar o navio de ſotavento a quantidade angular $r + \frac{1}{2}m - 8$ *quartas*: logo $r + \frac{1}{2}m - 8$ *quartas naõ* $> m$, ou r *naõ* > 8 *quartas* $+ \frac{1}{2}m$ he a condiçaõ, que deve verificar-ſe para que o caſo ſeja poſſivel.

EXEMPLOS.

Seja $r = 9$ *quartas*, e $m =$ *huma quarta*. Feita a ſubſtituiçaõ ter-ſe-ha 9 *quartas naõ* $>$ 8 *quartas e meia*; o que he abſurdo.

Seja $r = 9$ *quartas*, e $m = 10$ *quartas*. Feita a ſubſtituiçaõ ter-ſe-ha 9 *quartas naõ* $>$ 13 *quartas*: he logo poſſivel.

Seja r *naõ* $> 90°$; ſerá neceſſariamente r *naõ* > 8 *quartas* $+ \frac{1}{2}m$: he por tanto caſo poſſivel.

5.° Se na meſma expreſſaõ do angulo *DAH* (fig. VIII.) ſuppoſermos $r = 0$, o que ſe verifica quando o navio *A* for nas agoas do navio *B*, ter-ſe-ha $DAH = 8$ *quartas* $- \frac{1}{2}m$; e por tanto deve entaõ arribar o navio *A* do ſeu alinhamento primitivo com *B*, oito quartas, menos ametade da mutaçaõ angular do vento; o que concorda exactamente com huma das regras, que ſe coſtumaõ preſcrever nos livros de Tactita Naval, para ſe reſtabelecer a Ordem de Batalha da meſma amura, depois de haver alargado o vento.

Eſtabelecidos pois os dous Principios, e ſeus Corollarios,

rios, paſſarei agora a expôr os Methodos de Mazaredo, fazendo anticipadamente huma advertencia.

ADVERTENCIA.

Quando o vento alargar (o que ſe entende até dez quartas), ou eſcacear (o que ſe entende até ſeis), direi que o vento alargou, ou eſcaceou no primeiro meio círculo; e quando o vento ſaltar para o outro bordo, direi que alargou, ou eſcaceou no ſegundo meio círculo, conforme o vento ſe puder conſiderar como havendo alargado, ou eſcaceado, ſuppondo-ſe, que ſe navegava á bolina com amuras contrarias ás primitivas. Deſta maneira ſe podem enunciar os diverſos caſos clara, e diſtinctamente.

PRIMEIRO METHODO.

O primeiro methodo de Mazaredo, que, ainda que geral na theoria, naõ deve com tudo eſtender-ſe na prática a mais de cinco quartas, póde applicar-ſe, dando-lhe por outra parte a ampliaçaõ poſſivel, aos quatro caſos ſeguintes.

I. CASO.

Reſtabelecer a Quinta Ordem de Marcha da meſma amura, havendo alargado o vento no primeiro meio círculo naõ mais de cinco quartas.

O chefe de fila *A* (fig. X.) da columna de barlavento atraveſſa, e os demais navios da meſma columna arribaõ *oito quartas, menos ametade da mudança do vento* (Cor. 5.° do II. Princ.), para irem metter-ſe com *A* na nova linha de bolina *AB*, aonde atraveſſaõ. Os chefes de fila *C*, *D* das columnas de ſotavento reſtabelecem o travez de bolina com o de barlavento *A*, *ſeguindo o rumo* CE, DF, *que diſta igualmente da primitiva, e da nova linha de bolina* (I. Princ., ou Cor. 3.° do II. Princ.): os demais navios, havendo no-

tado cada hum delles a que rumo lhe demora o eixo da evoluçaõ *A*, como todos se achavaõ a sotavento, antes da mudança do vento, e mais atrazados relativamente ao mesmo eixo, manobraõ huns na conformidade do II. Principio, arribando da sua primeira linha de bolina *oito quartas, menos o angulo agudo* (*r*), *menos ametade da mudança do vento*; outros orçando *quanto oito quartas forem excedidas pelo angulo agudo* (*r*), *sommado com ametade da mudança do vento*, se o caso o pedir; advertindo que a arribada, ou a orçada he nulla nas circunstancias mencionadas no Corollario 2.° do segundo Principio. A' medida que os navios vaõ chegando aos seus lugares atravessaõ, para esperarem que o cabo de fila *H* da columna de sotavento chegue a alcançar o seu, fazendo força de véla: logo que o consegue marêaõ todos á bolina com as amuras primitivas.

II. Caso.

Restabelecer a Quinta Ordem de Marcha da amura contraria, havendo alargado o vento no segundo meio circulo naõ mais de cinco quartas.

Supponha-se que se nevegava á bolina com amuras contrarias ás primitivas, e manobre-se como no caso precedente, sendo eixo da evoluçaõ o Chefe de fila *D* da columna, que estava a sotavento antes da mudança do vento.

III. Caso.

Restabelecer a Quinta Ordem de Marcha da amura contraria, havendo escaceado o vento no primeiro meio circulo naõ mais de huma quarta.

Todos os navios viraõ de bordo simultaneamente; suppõe-se que se seguia á bolina rumo opposto com amuras contrarias ás primitivas: e manobre-se como no primeiro caso, sendo eixo da evoluçaõ o navio *G*, que era cabo de fi-

fila da columna de barlavento, antes de se ter virado de bordo.

IV. Caso.

Restabelecer a Quinta Ordem de Marcha da mesma amura havendo escaceado o vento no segundo meio circulo naõ mais de huma quarta.

Todos os navios viraõ de bordo simultaneamente; suppõe-se que seguia á bolina rumo opposto com as amuras primitivas; e manobra-se como no primeiro caso, sendo eixo da evoluçaõ o navio *H*, que era cabo de fila da columna *DH*, que actualmente se acha a barlavento, antes de se haver virado de bordo.

Escolio.

Se o vento alarga no primeiro meio círculo menos de quatro quartas, he possivel, e poderá ser conveniente manobrar como se disse no III. caso. Se alarga menos de quatro quartas no segundo meio círculo he possivel, e poderá ser vantajoso manobrar como no IV. caso. Se o vento alargar quatro quartas seja no primeiro, ou no segundo meio círculo, virando simultaneamente de bordo todos os navios, e pondo-se todos logo á bolina, ficará a ordem restabelecida. Se o vento saltar para além da prôa seis quartas, basta mudar de amuras para a ordem se restabelecer.

Este he o methodo mais prompto, que póde imaginar-se para se restabelecer a Quinta Ordem de Marcha, alterada por haver alargado o vento naõ mais de cinco quartas; pois que o caminho mais curto entre dous pontos he o rectilineo; e a recta que se tirar do lugar, que hum navio occupa no principio de huma evoluçaõ, para o que deve occupar depois della executada, he sensivelmente a mesma cousa que o arco de Loxodromia, ou de círculo maximo comprehendido entre os ditos lugares. Eu naõ fiz mais do que dar huma fórma mais regular aos Principios,

pios, em que elle he fundado; pôr em equaçaõ o angulo *DAH* (fig. VII, VIII.) com a ſua expreſſaõ para deduzir facilmente as conſequencias que o Author menciona, e outras naõ de menos importancia, como as do 4.°, e 5.° corollario do II. Principio; e dizer de que maneira ſe eſtende a applicaçaõ do dito methodo aos caſos, em que o vento alarga no ſegundo meio círculo naõ mais de cinco quartas, como tambem a aquelles, em que o vento eſcacêa no primeiro, ou no ſegundo meio círculo naõ mais de huma quarta.

Fiz eſta applicaçaõ do primeiro methodo de Mazaredo aos caſos, em que o vento eſcacêa naõ mais de huma quarta em hum, ou outro meio círculo, naõ tanto para ſe praticar em taes occaſiões, como para deſcrever a manobra, a que algumas vezes ſe deve dar preferencia alargando o vento entre duas e quatro quartas, ou menos, ſeja no primeiro, ou no ſegundo meio círculo, como advertí no Eſcolio, e para repetir mais vezes, que o dito methodo ſe naõ deve adoptar quando o vento alarga mais de cinco quartas em qualquer dos meios circulos.

A fig. X. repreſenta diſtinctamente a evoluçaõ no caſo de haver alargado o vento cinco quartas no primeiro meio círculo. O rectangulo *AGHD* indica a formatura primitiva, *AFIB* moſtra a ordem reſtabelecida. A recta *HI*, medida da duraçaõ da manobra, he pouco maior que o comprimento de huma columna. Os navios naõ ſe confundem nos ſeus movimentos, e nenhum delles ſe vê preciſado a ſeparar-ſe do ſeu rumo para naõ atracar com outros. Naõ ſuccederia porém a meſma couſa querendo-ſe applicar o meſmo methodo, ainda que geral na theoria, a ſeis, e mais quartas.

O rectangulo *ALMN* repreſenta a ordem reſtabelecida, depois da alteraçaõ occaſionada por haver ſaltado o vento para a poppa. A diſtancia *HM*, que mede o tempo da evoluçaõ, he pouco maior que o comprimento de duas columnas. Mas ſería neceſſario que a materia foſſe pene-

netravel para que alguns navios já atravessados, ou proximos a atravessar nos seus respectivos lugares, naõ obstassem ás derrotas que outros seguem, dirigindo-se para os seus lugares, que se achaõ mais remotos. E querendo-se evitar semelhante inconveniente, proporcionando cada hum dos navios o seu panno á distancia que tem que correr, persistiria sempre constrangimento nos movimentos, confusaõ na evoluçaõ, e risco de abordagens. Para evitar estes inconvenientes se faz indispensavel outro modo de manobrar quando o vento alargar mais de cinco quartas.

SEGUNDO METHODO.

Pelo segundo methodo de Mazaredo se restabelece a Quinta Ordem de Marcha, alterada por haver alargado o vento, atravessando á columna de barlavento para esperar, que os testas das columnas de sotavento restabeleçaõ o travez de bolina com o chefe de fila da de barlavento, caminhando cada hum delles pelo rumo medio entre a primitiva, e a nova linha de bolina, na conformidade do II. Principio, e sendo seguidos por movimento successivo pelos demais navios das columnas respectivas. Este segundo methodo, ainda que geral, tanto na theorica, como na prática; deve adoptar-se sómente quando o vento alargar mais de cinco quartas, e só pela razaõ de naõ ser entaõ conveniente a prática do primeiro, que he o mais curto de quantos podem imaginar-se. Os quatro casos considerados acima, por occasiaõ do primeiro methodo, offerecem outros quatro ao segundo.

I. CASO.

Restabelecer a Quinta Ordem de Marcha da mesma amura, havendo alargado o vento mais de cinco quartas no primeiro meio círculo.

A columna de barlavento *AD* (fig. XI.) atravessa; os

teſtas *B*,*C* das columnas de ſotavento caminhaõ (forçando de véla o ultimo *C*) pelo rumo medio *BE*,*CF* entre o primitivo *BG*,*CH*, e novo rumo de bolina *AI*, e ſaõ ſeguidos por movimento ſucceſſivo pelos demais navios das ſuas columnas *BG*,*CH*; e quando os ditos teſtas *B*,*C* chegaõ aos pontos *E*,*F*, aonde reſtabelecem o travez de bolina com o teſta *A* da columna atraveſſada (I. Princ.), cingem todos tres o vento, e ſaõ ſeguidos por movimento ſucceſſivo pelos demais navios das columnas reſpectivas.

II. CASO.

Reſtabelecer a Quinta Ordem de Marcha da amura contraria, havendo alargado o vento no ſegundo meio circulo mais de cinco quartas.

Supponha-ſe que ſe navegava á bolina com amuras contrarias ás primitivas, e manobre-ſe como no caſo precedente, ſendo eixo no reſtabelecimento do travez de bolina dos tres chefes de fila *A*,*B*,*C*; o teſta *C* da columna, que eſtava a ſotavento antes da mudança de vento.

III. CASO.

Reſtabelecer a Quinta Ordem de Marcha da amura contraria, havendo eſcaceado o vento no primeiro meio circulo mais de huma quarta.

Todos os navios viraõ de bordo ſimultaneamente: ſuppõe-ſe que ſe ſeguia á bolina rumo oppoſto com amuras contrarias ás primitivas; e manobra-ſe como no primeiro caſo, ſendo eixo no reſtabelecimento do travez de bolina dos tres novos chefes de fila *D*,*G*,*H*, o teſta *D*, que era cabo de fila da columna de barlavento antes de ſe ter virado de bordo.

IV.

IV. Caso.

Reſtabelecer a Quinta Ordem de Marcha da meſma amura, havendo eſcaceado o vento no ſegundo meio circulo mais de huma quarta.

Todos os navios viraõ de bordo ſimultaneamente; ſuppõe-ſe que ſe ſeguia á bolina rumo oppoſto com as amuras primitivas; e manobra-ſe como no primeiro caſo, ſendo eixo no reſtabelecimento do travez de bolina dos tres novos chefes de fila *D*, *G*, *H*, o teſta *H*, que era cabo de fila da columna *CH*, que actualmente ſe acha a barlavento, antes de ſe haver virado de bordo.

Escolio.

Se o vento ſalta para a pôppa, como entaõ ſe póde conſiderar o vento como havendo alargado no primeiro, ou no ſegundo meio círculo, manobrar-ſe-ha como no I., ou no II. caſo, conforme for conveniente. Se ſalta paɹa a prôa, póde manobrar-ſe como no III., ou IV. caſo, pois que entaõ ſe póde conſiderar o vento como havendo eſcaceado no primeiro, ou no ſegundo meio círculo.

Ainda que fiz applicaçaõ do ſegundo methodo de Mazaredo ao terceiro, e ao quarto caſo, em que o vento ſe ſuppõe haver eſcaceado mais de huma quarta em hum, ou outro meio círculo, naõ he minha intençaõ preferir a prática delle em taes circumſtancias, aſſim como a naõ tive de adoptar o primeiro methodo, quando o appliquei aos caſos, em que o vento ſe ſuppoz ter eſcaceado naõ mais de huma quarta em qualquer dos meios circulos: a manobra que preſcreve Morogues para ſe reſtabelecer a Quinta Ordem de Marcha da meſma amura, alterada por haver eſcaceado o vento [*Tactique Navale*, *I. Partie*, *Chap. IX. n.* 80.], he aſsaz facil, e prompta, naõ obſtante haverem-ſe de reſtabelecer os travezes dos navios correſpondentes, e as diſtancias

cias das columnas tornadas diminutas. Só tive por fim principal apontar os casos, em que se podem adoptar, sem inconveniente, os ditos methodos, os quaes prefiro ás regras, que referi na Primeira Parte desta Memoria, por prescreverem manobras, que tem os caracteres, que constituem huma evoluçaõ perfeita, quaes saõ *Facilidade*, *Exacçaõ*, *Promptidaõ*, *Generalidade*.

Com effeito no primeiro methodo de Mazaredo ha *facilidade*; porque cada navio segue hum rumo determinado, sem que vá confundir-se com outros navios, alargando o vento naõ mais de cinco quartas, que he o caso em que elle he adoptado. Ha *exacçaõ*; porque as distancias das columnas naõ saõ alteradas. Ha *promptidaõ*, e a maior que he possivel; porque os navios caminhaõ direitamente para os lugares, que haõ de occupar na nova formatura. He *geral* na theoria; e na prática só está sujeito a inconveniente, e naõ a impossivel absoluto, quando o vento alarga mais de cinco quartas.

O segundo methodo de Mazaredo tem *facilidade*, naõ só porque os navios seguem determinado rumo, mas tambem porque basta que cada hum dos testas das columnas tenha cuidado em caminhar exactamente pelo rumo devido, pois que os demais navios das columnas respectivas vaõ metter-se nas suas agoas por movimento successivo. Tem *exacçaõ*; porque as distancias das columnas naõ saõ alteradas. Tem *promptidaõ*: elle he pelo menos mais curto, do que aquelle que prescreve Morogues para quando o vento alarga muito, se o vento alargar mais de cinco quartas, que he o caso em que elle he adoptado. He *geral* tanto na theoria, como na prática, ainda que se naõ adopte quando o vento alarga naõ mais de cinco quartas, por se dar entaõ preferencia ao primeiro como mais expedito.

Finalmente naõ póde obstar ao primeiro methodo de Mazaredo dizer-se, talvez, que para elle ser excluido da prática basta a obrigaçaõ, que se impõe aos Officiaes, de terem sempre presentes os rumos, a que lhes demoraõ,

ou

ou devem demorar os eixos da evoluçaõ *A*, *D*, *H*, *G* (fig. X.), assim como tambem os termos da expressaõ 8 *quartas* $- r - \frac{1}{2} m$, de que nem todos poderáõ fazer uso. Porque além de bastarem olhos para se distinguir na bussola a que rumos demoraõ os objectos, e de ser facil de traduzir em linguagem vulgar a dita expressaõ, como se vê no primeiro caso das applicaçóes do sobredito methodo; pelas sábias providencias de S. MAGESTADE na creaçaõ de duas Academias de Marinha, e pelo zelo, que anima todo o Corpo da nossa Marinha Real, podem seguramente contar-se tantas pessoas versadas nas Mathematicas como Officiaes.

OBSERVAÇÕES ASTRONOMICAS, E METEOROLOGICAS

Feitas na Cidade do Rio de Janeiro no anno de 1784

POR BENTO SANCHES DORTA.

ESTE he o quarto anno, que affiduamente obfervo os fenomenos, que a athmosfera d'efte Paiz nos offerece. Nefte anno faltaõ as obfervações do mez de Janeiro, por ainda exiftir o mefmo obftaculo, que obrigou a naõ fe obfervar o mez de Dezembro do anno de 1783, de cuja caufa eu naõ fou culpado: com tudo efte anno he mais aventajado pelas obfervações do Barometro, as quaes fe naõ fizeraõ nos tres annos preteritos, pelo motivo de naõ haver efte inftrumento na Collecçaõ d'elles, que me foi entregue por ordem de S. Mageftade em Janeiro de 1781.

Logo que recebi o Barometro, comecei a ter conta com a variaçaõ do pezo da athmosfera; e ainda que efta feja pequena, como ordinariamente fuccede na Zona torrida, com tudo he muito frequente; e por efte motivo vejome obrigado a alterar o plano de obfervações, que tinha adoptado, ifto he, de obfervar d'aquí em diante oito vezes cada dia, em lugar de fete como pratiquei até agora.

Efte Barometro he de huma nova conftrucçaõ do Senhor Joaõ Jacintho de Magalhães, Correfpondente d'efta Academia, o qual na verdade excede em muito aos até agora ufuaes: e ainda que o feu verdadeiro objecto feja para medir alturas, eu o confagrei a Meteorologia. Naõ me canço em fazer a fua defcripçaõ, pelo ter feito o feu fábio inventor no Tractado, que publicou em Londres no anno de 1779; e fó me compete declarar, que efte Baro-

ro-

rometro he compoſto de duas eſcalas huma Franceza, e outra Ingleza, e que eu me ſirvo da primeira.

Neſte anno ſuccedêraõ fenomenos incomparaveis com os dos mais annos. Nos mezes de Setembro, Outubro, e Novembro ſubſiſtio huma nevoa, ou vapor mui denſo, que nos occultou de dia o Sol, de noite as Eſtrellas; de maneira que havendo neſtes tres mezes 48 Eclipſes dos Satellites de Jupiter viſiveis neſte Meridiano, eu naõ pude lograr mais de tres no fim de Setembro. Eſte nevoeiro muitos dias foi humido, lançando hum continuo orvalho; e quando deixava de orvalhar, ſempre os Hygrometros indicavaõ grande humidade na athmosfera, e eſta tornava-ſe de côr avermelhada.

No dia 11 do mez de Agoſto pelas 7^h da noite formou-ſe da parte do S. O. hum negrume, e depois de formado começou a inflammar-ſe, e ao meſmo tempo ouvíraõ-ſe horriveis trovões: a iſto ſeguio-ſe chover ſaraiva em grande quantidade, cujas pedras eraõ do tamanho de amendoas. Toda a noite continuou em chover, e trovejar: na meſma occaſiaõ cahíraõ neſta Cidade algumas materias incendiadas, porém gozámos a felicidade de naõ cauſarem damno.

A 19 do meſmo mez ás 10^h da manhã começou a chover, e continuou ſem deſcanço pelo eſpaço de 38^h. A 22 o Ceo eſteve coberto, e pelas $7^h. 45'$ da noite, principiou todo o Hemisferio a incendiar-ſe, e tomou huma côr ſemelhante a hum ferro em braza; e aſſim permaneceu por tempo de $30'$, no fim dos quaes começou a deſvanecer-ſe pouco a pouco, até total extinçaõ.

Os dias 16, 17, e 18 de Setembro fôraõ notaveis, naõ ſó pelo muito que choveu continuamente, pois começando ás 8^h da manhã no dia 16, findou no dia 19 ás 4^h da madrugada, completando 68^h; mas pela grande elevaçaõ do mar, pois ſubio mais do ſeu ordinario treze palmos: o vento era N. e N. O. A Lua achava-ſe no

Equi-

Equinoccio afcendente, quero dizer no Signo de Libra em 14° até 26°.

A 5 de Outubro ás 7^h da noite tornou a athmosfera a accender-fe, como a 22 de Setembro, com a differença que ao paffo, que fe augmentava a inflammaçaõ, relampejava com maior força, e acceleraçaõ: ás 10^h trovejou rijamente em cima d'efta Cidade, e choveu. O Barometro confervou-fe todo efte tempo na altura de $28^{Pol.}\ 4^{Lin.}$

A 15 de Dezembro o mar ao tempo da fua primeira enchente fubio mais tres palmos do feu ordinario: o Barometro eftava na altura de $28^{Pol.}\ 4^{Lin.}$, 82: o vento era S.: A Lua achava-fe em 3° 28′ do Signo de Aquario; dia e meio pouco mais ou menos antes do feu Perigeu.

O maior calor, que aqui foffremos annunciado no Thermometro de Fahrenheit, foi de 94° (Tab. II.) no dia 9 de Fevereiro ás 2^h da tarde: o Ceo eftava coberto, e o vento corria de O. Excedeu ao do anno paffado em $4°\frac{1}{2}$.

Até agora ainda o mefmo Thermometro me naõ moftrou gráo de frio, pois he certo que o gráo 55 nefta efcala annuncia o temperamento medio do ar, ifto he, onde naõ ha calor, nem frio, e toma-fe como cifra a refpeito do calor: ifto pofto, no dia 12 de Julho ás 4^h, e 6^h da manhã vimos o Mercurio eftacionar-fe a 55°. (Tab. II.) O Ceo achava-fe cheio de nuvens, e o vento affoprava de O. O anno de 1783 foi o menor calor de 59°, logo fe tivemos mais do que o anno paffado $4°\frac{1}{2}$ de calor, a Natureza nos recompenfou dando-nos tambem 4° de mais frio.

A differença do maximo ao minimo calor he 39°.

Foi o calor medio de todo o anno 73°, 72 refultado de 1ȹ005 obfervações, ou tres cada dia: mas o mefmo calor medio tambem foi de 73°, 6 refultado de 2ȹ345 obfervações, ou fete cada dia. (Tab. II. e III.)

O

O calor medio da manhã 71°, 1: da tarde 75°, 18.

No tempo, em que se obſervou, ſempre o maior calor foi ás 4^h da tarde (Tab. III.)

As irregularidades, que eſte anno vimos no Thermometro, as demonſtramos nas tres linhas curvas *AB*, *CD*, e *EF*; que moſtra a eſtampa, que vai aqui incluſa. O eixo das curvas, ou as Abſciſas moſtraõ o tempo, e as Ordenadas a altura: a primeira e maxima ordenada de Fevereiro vai dividida em gráos para ſervir d'eſcala.

Neſtes onze mezes do anno houveraõ 43 dias claros, 151 variaveis, 90 nublados, 50 cobertos, 48 de relampagos ſem ſe ouvirem trovões, 40 de trovoada, 133 de chuva, 133 de nevoa, 4 de Aurora Auſtral, e 12 de Luz Zodiacal. (Tab. IV.)

A quantidade d'agoa, que choveu (Tab. V.) foi $50^{Pol.}$ $1^{Lin.}$, 4. Dezembro he o mez, em que mais choveu; Fevereiro o de menos chuva.

A vaporaçaõ (Tab. V.) chegou a $17^{Pol.}$ $8^{Lin.}$, 4. Dezembro foi o mez de maior vaporaçaõ, Agoſto o de menos.

A chuva excedeu a vaporaçaõ em $32^{Pol.}$ $3^{Lin.}$

O vento dominante de manhã foi variavel, e N.O.; de tarde S.E. quaſi conſtante. (Tab. VI.)

A trovoada deixou-ſe ouvir a 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, e 15 de Fevereiro; a 8, 10, e 11 de Março; a 12, e 13 de Abril; a 4, 5, 22, e 31 de Julho; a 12 de Agoſto; a 6, 7, 11, e 13 de Setembro; a 3, 5, 28, e 30 de Outubro; a 14, 19, 20, 21, e 22 de Novembro; a 1, 2, 13, 22, 24, 26, 27, e 31 de Dezembro.

A Aurora Auſtral appareceu a 7, e 25 de Julho; a 10 de Agoſto, e a 30 de Dezembro: a de 25 de Julho, e 10 de Agoſto foraõ mui luminoſas, as outras com luz fraca.

Luz Zodiacal vio-ſe a 22 de Fevereiro; a 20 de Abril;

a 11, e 18 de Maio; a 6, 13, 15, 16, e 19 de Julho; a 7 de Agosto; a 30 de Setembro, e a 31 de Outubro.

O maior calor medio, que concorreu com os pontos Lunares, (Tab. VII.) foi no 2.° quarto, e no 2.° Oitante. O menor no Perigeu, e 1.° Oitante. O maior numero de dias chuvosos no Equinoccio ascendente, e Lunistico Austral, o menor no 1.° quarto, Apogeu, e 4.° Oitante.

Vento dominante SE. em todos os pontos Lunares. (Tab. VII.)

Nos cinco mezes, que observei o Barometro (Tab.I.) chegou a sua maior altura a 28 Pol. 7 Lin., 6; a media 28 P. 3 L., 24; a menor a 27 Pol. 10 Lin., 7.

Differença da maxima á minima altura 8 Lin., 9

A maior declinação Oriental da Agulha-magnetica foi de 6° 57′, a 8 de Março ás 4^h da tarde: o Ceo estava coberto, e chovia: o Thermometro achava-se em 83°, e o vento assoprava do SE. (Tab. IX.)

A menor foi de 6° 23′ a 31 de Outubro ás 6^h da manhã: o Céo nublado: o Thermometro em 75°: o vento N.

Declinação media de todo o anno 6° 37′ 54″, resultante de 1ↀ005 observações: mas a mesma declinação tambem foi de 6° 37′ 42″, resultante de 2ↀ345 observações. (Tab. X.)

Declinação media da manhã (Tab. IX.) 6° 35′ 59″: ao meio dia 6° 38′ 53″: de tarde 6° 38′ 1″.

No dia 14 de Outubro a Agulha-magnetica perdeu o seu equilibrio inclinando-se para o Pólo do Sul. Não determinei o angulo, que fazia com o horizonte, pela falta de instrumento competente; pois o não ha na Colleção, que se me confiou. &c.

Obser-

Obſervações dos Eclipſes dos Satellites de Jupiter, feitas com hum Oculo achromatico de Dolond *de* 17 *pollegadas de fóco, que augmenta os objectos quaſi* 70 *vezes.*

Anno 1784		Satel-lites.	Tempo verdadeiro. Hor. Min. Seg.		Circunſtancias das obſervações.
Março.	29	2.°	16 2 40	Im.	Ceo pouco ſereno, o Planeta ondeando por cauſa de algum vapor.
Abril.	3	3.°	15 9 12	Im.	. . . . pouco ſereno, e muito Luar.
Maio.	9	1.°	14 19 17	Im.	. . . . muito cheio de vapores; as faxas do Planeta naõ ſe percebiaõ.
	9	3.°	14 56 50	Em.	Idem.
	23	1.°	18 6 12	Im.	Ceo pouco ſereno, porém as faxas do Planeta bem viſiveis.
	25	2.°	13 7 4	Im.	. . . . muito ſereno.
Junho.	8	1.°	16 18 53	Im.	Idem.
	17	1.°	12 39 14	Im.	Idem.
	24	1.°	14 31 2	Im.	Idem.
	26	2.°	12 48 46	Im.	Ceo pouco ſereno.
	28	3.°	15 18 44	Im.	Ceo pouco ſereno.
Julho.	3	1.°	10 51 13	Im.	Idem.
	3	2.°	15 24 28	Im.	Ceo ſereno.
	17	1.°	14 37 12	Im.	. . . muito ſereno, as faxas do Planeta bem diſtintas.
	19	1.°	9 5 20	Im.	. . . pouco ſereno, o Planeta ondeando por cauſa dos vapores da athmosfera, e da pouca altura acima do horizonte.
	21	2.°	9 54 22	Im.	. . . muito ſereno, as faxas do Planeta bem vizives.
	24	1.°	16 30 55	Im.	Idem.
	26	1.°	10 58 47	Im.	Ceo pouco ſereno. . .
Agoſto.	9	1.°	14 48 15	Im.	. . . muito ſereno, as faxas do Planeta percebiaõ-ſe perfeitamente.
	10	3.°	15 20 22	Im.	Idem.
	11	1.°	9 17 0	Im.	Ceo pouco ſereno.
	11	2.°	17 46 12	Im.	Ceo pouco ſereno.
	15	2.°	7 5 20	Im.	. . . ſereno.
	27	1.°	9 54 18	Em.	. . . ſereno, o Satellite ſahio muito proximo do Planeta.
Setemb.	26	1.°	12 13 22	Em.	. . . ſereno, o Planeta bem claro.
	28	1.°	6 42 44	Em.	Idem.
	30	2.°	15 3 17	Em.	Ceo muito pouco ſereno.

Anno 1784	Satellites.	Tempo verdadeiro. Hor. Min. Seg.	Circumſtancias das Obſervações.
Dezẽbr. 3	3.°	8 5 35 Im.	. . . ſereno , as faxas do Planeta bem viſiveis.
3	3.°	11 18 40 Em.	... pouco ſereno, Plan. mal terminado.
6	1.°	7 30 36 Em.	... ſereno , porém muito vento , que fazia tremer o Oculo.
29	1.°	7 36 19 Em.	. . . muito ſereno.
Eclipſe do Sol obſervado , antes do ſeu Occaſo 23′			
Fever. 20	Principio do Eclipſe.	5 51 14	Eſta determinaçaõ naõ he muito exacta , por eſtar o Sol muito proximo do Horizonte.
Obſervaçaõ do Eclipſe parcial da Lua.			
Março. 6	Principio do Eclipſe.	11 22 5	O Ceo eſtava ſemeado com muitas nuvens.
	Fim do Eclipſe.	13 44 10	: . : : :
	Fim da penumbra.	13 48 0	Naõ obſervei macula alguma , por cauſa de muitas nuvens.

Em 8 de Janeiro de 1784 ás 9^h da noite deſcobri por caſualidade á viſta ſimples hum Cometa entre as Eſtrellas γ do Pavaõ , e α do Tocano , igualmente diſtante de huma , e outra , tendo paſſado de dia pelo Meridiano : eu continuei a vêllo até o dia 25 do dito mez. A ſua cauda me pareceu ſer pouco mais ou menos de 6°.

Eu achava-me neſte tempo diſtante deſta Cidade 12 legoas , ſem inſtrumento algum capaz de poder determinar a ſua verdadeira poſiçaõ : porém recolhendo-me depois , o obſervei nas noites de 22 , 23 , 24 , e 25 ; e o comparei com a Eſtrella β da Baleia. Eu reſervo para outra occaſiaõ tratar deſtas obſervações.

Ha quem affirme neſta Cidade ter viſto eſte Cometa no dia 1. de Janeiro ás 3^h da manhã ; de que eu naõ fico por fiador : mas ſendo iſto aſſim podemos colligir , que já apparecia em Dezembro de 1783.

DIA-

DIARIO METEOROLOGICO.

FEVEREIRO de 1784.

Dias do mez.	Vent. domin. manh.	Vent. domin. tarde.	Thermometro. manh.	Thermometro. meio dia.	Thermometro. tarde.	Quantidade de chuva.	Quantidade de vapor.	Eſtado do Ceo.
			°	°	°	Linh.	Linh.	
1	Var.	S. E.	78,16	80,5	81,66	.	1,5	Nublado, e trovões.
2	Var.	S.	79,16	81.	81,66	.	0,75	Variavel, e trovões.
3	Var.	S.	78,66	80.	82,83	0,3	0,75	Nub. trov., e orvalho.
4	Var.	S. E.	79,33	82,5	83,33	.	1	Var., e trovões.
5	N. O.	S. E.	83,41	88,25	89,41	.	1,5	Var., e relampagos.
6	Var.	Var.	83,75	87.	86.	.	1,5	Nub., e trovões.
7	Var.	Var.	80,66	83.	83,33	0,2	1	Var., trov., e orvalho.
8	N.	S. E.	82,66	89.	90,66	.	2	Nub., e trovões.
9	Var.	O.	85,16	89,5	92,16	6	2,5	Var., trov., e chuva.
10	S.	Var.	78,66	78.	77,5	1,25	.	Cob., e chuva.
11	Var.	S.	73,83	75.	74,25	1	.	Idem.
12	Var.	S.	74,16	75.	74,83	10	.	Cob., relamp., e chuva.
13	Var.	S. E.	74,16	76.	77,66	0,3	0,8	Nub., relamp., e orvalho. A Lua com ſua corôa.
14	N.	S. E.	77,5	79.	80,5	.	1	Var., e relampagos.
15	Var.	S. E.	78,5	80.	82.		1,5	Var., e trovões.
16	N.	S. E.	78,16	81,5	83,33	.	1,4	Nub., e relamp.
17	Var.	S. E.	79,16	83.	84	.	2	Clar., e relamp.
18	N. O.	S. E.	80.	82,5	83,66	.	1,8	Clar., e nevoa.
19	Var.	S. E.	79,66	81,5	83,16	.	1,7	Nub., e nevoa.
20	Var.	S. E.	78,66	80,5	83.	.	1,8	Idem.
21	N. O.	S. E.	78,75	81,5	83,16	.	2	Nub., e relamp.
22	N. O.	S. E.	79,33	83.	86,66	.	2	Clar., e relamp. Luz-Zodiacal 3h 30′ da madrugada.
23	N. O.	S.	81,66	84.	84,33	1	1,8	Var., relamp., e chuva.
24	Var.	S. E.	79,16	81.	81,16	3	0,6	Idem.
25	N. O.	S. E.	76,33	77.	77,33	0,4	0,5	Idem.
26	N. O.	S. E.	74,16	75.	75,16	0,2	0,5	Nub., e orvalho.
27	Var.	S. E.	74.	74.	74.	.	0,6	Nub.
28	Var.	S. E.	72,16	74,5	74,33		1	Clar.
29	N.	S. E.	73,33	74,5	79.	.	0,8	Idem.

Búſſola no dia 2, 6° 45′ 50″; no dia 8, 6° 40′; no dia 13, 6° 36′ 27″. no dia 16, 6° 41′ 23″; no dia 25, 6° 32′ 33″; e no dia 30, 6° 30′.

DIARIO METEOROLOGICO.

MARÇO de 1784.

Dias do mez.	Vent. domin.		Thermometro.			Quantidade de chuva.	Quantidade de vapor.	Eſtado do Ceo.
	manh.	tarde.	manh.	meio dia.	tarde.	Linh.	Linh.	
			°	°	°			
1	Var.	S. E.	73,5	77.	79,5	.	0,8	Nub., e nevoa.
2	N. E.	S. E.	76,83	80.	83.	.	1,5	Var., e nevoa.
3	Var.	S. E.	77,66	81,5	85,16	.	1,5	Var., e relampagos.
4	Var.	S. E.	78,83	84.	84,5	.	2	Nub., e nevoa.
5	Var.	S. E.	79,33	82.	85.	.	2	Var., e nevoa.
6	Var.	S. E.	79.	82,5	85,83	.	2,4	Nub. nevoa, e relampagos.
7	N. E.	S. E.	82,33	85.	86,33	.	2,5	Nub., e nevoa.
8	Var.	S. E.	81,58	83.	83.	2	1	Nub. trovões, e chuva.
9	Var.	S. E.	79,33	81.	82,33	.	1,5	Var. nevoa, e relampagos.
10	N. O.	S. E.	78,66	80.	81,33	1	1	Var. trovões, e chuva.
11	N. E.	S.	78,66	80.	81,5	7	0,3	Cob. trovões, e chuva.
12	Var.	L.	75,83	76.	76.	5	.	Cob., e chuva.
13	S. E.	S. E.	75,33	77.	77.	4	.	Var., e chuva.
14	N. E.	S. E.	76,33	78.	78,66	.	0,5	Nub., e nevoa.
15	L.	S. E.	75,66	76,5	77,33	0,4	0,6	Cob., e orvalho.
16	N.	S.	76,83	79,5	78,33	4	.	Var., e chuva.
17	Var.	S. E.	73,66	76.	77,33	0,2	0,6	Var., e orvalho.
18	L.	S. E.	75,16	77.	76,66	.	1	Nub., e nevoa.
19	L.	S. E.	75.	77.	78.	.	1	Clar.
20	Var.	S. E.	72,66	76.	78.	.	0,5	Clar., e nevoa.
21	L.	S. E.	73,5	76.	77,66	.	1	Var.
22	N.	S. E.	74,33	77.	76,66	.	0,4	Nub., e nevoa.
23	L.	Var.	73,66	77.	77,5	.	0,3	Var., e nevoa.
24	N.	S. E.	75,16	77.	76.	0,3	0,3	Cob., e orvalho.
25	N. E.	S. E.	74.	76,25	76,66	.	0,4	Var.
26	Var.	S. E.	73,66	77.	78,66	1,5	0,3	Cob., e orvalho.
27	Var.	L.	74,16	77.	79,83	.	1	Nub., e nevoa.
28	N.	S. E.	75.	79.	80,66	.	1,5	Var.
29	N.	S.	74,33	78,5	79,16	.	1	Idem.
30	N.	S. E.	74,66	78.	79,5	.	0,8	Idem.
31	Var.	S. E.	74.	77,5	78,66	.	0,6	Clar.

Buſſola no dia 2, 6° 32′; no dia 8, 6° 41′ 17″; no dia 15, 6° 34′ 53″. no dia 25, 6° 40′ 20″; no dia 26, 6° 34′; e no dia 30, 6° 38′ 37″.

DIA-

DIARIO METEOROLOGICO.

ABRIL de 1784.

Dias do mez.	Vent. domin.		Thermometro.			Quantidade de chuva.	Quantidade de vapor.	Eſtado do Ceo.
	manh.	tarde.	manh.	meio dia.	tarde.			
			°	°	°	Linh.	Linh.	
1	Var.	N. O.	74,5	78.	80.	.	1,5	Nub., e nevoa.
2	O.	S. E.	77.	78.	78,33	.	0,5	Nub.
3	N. O.	S. O.	72,33	76,5	77,83	.	0,5	Var.
4	Var.	S.	72,82	76.	77,5	.	0,3	Idem.
5	N. O.	S.	71,83	74.	75,33	.	0,3	Var., e nevoa.
6	N. O.	S. E.	72,66	75.	76,66	4	0,2	Var., e chuva.
7	Var.	S. E.	73.	74.	75,66	1	0,2	Idem.
8	Var.	S. E.	74.	76,5	77.	0,4	0,3	Idem.
9	N. O.	S. E.	74,33	78.	79,16	.	0,7	Nub.
10	Var.	S. E.	75,66	78,5	80,66	.	1	Idem.
11	Var.	S. E.	77.	78,5	79,66	.	1,5	Var., e nevoa.
12	N. O.	S. E.	76,83	80.	82,33	2	1,5	Var., trovões, e chuva.
13	Var.	S. E.	77,33	79.	77.	2	.	Idem.
14	Var.	S. E.	73,33	76.	76,16	0,5	0,2	Var., e chuva.
15	Var.	S. E.	73,8	75,5	77,85	.	0,5	Var.
16	Var.	S. E.	75,33	78.	80,33	.	0,5	Var., e relampagos.
17	Var.	S. E.	77,58	81.	82,83	.	1	Clar., nevoa, e relampagos.
18	Var.	S. E.	77,83	81.	82,66	.	1	Clar., e relampagos.
19	Var.	Var.	78.	80,5	83,5	.	1,5	Clar.
20	N. O.	Var.	78,16	82.	84,33	.	1,5	Nub., e relampagos. Luz-Zodiacal muito forte.
21	N. O.	S. E.	80,75	85.	85,83	1	2	Clar., relamp., e chuva.
22	N. O.	S. E.	78,83	80.	80.	2	.	Cob., chuva, e relamp.
23	Var.	S. E.	78,33	80.	80,66	.	0,4	Var.
24	N. O.	S. E.	79,33	80,5	81,33	.	0,6	Nub., e nevoa.
25	Var.	Var.	79,33	83.	83,16	.	1	Idem.
26	Var.	S.	77,33	79.	77,66	4,5	.	Var., e chuva.
27	N. O.	S. E.	73,5	76.	76.	.	0,2	Nub.
28	Var.	Var.	74,8	75.	75,66	1,5	.	Nub., e chuva.
29	N. O.	O.	72,66	75.	76,66	7	.	Idem.
30	N. O.	O.	72,5	73,75	74,16	1,5	.	Var., e chuva.

Buſſola no dia 3, 6° 32′ 40″; no dia 5, 6° 40′ 33″; no dia 6, 6° 34′ 23″. no dia 25, 6° 42′ 7″; no dia 27, 6° 36′ 20″; e no dia 30, 6° 41′ 20″.

DIA-

DIARIO METEOROLOGICO.

MAIO de 1784.

Dias do mez.	Vent. domin. manh.	Vent. domin. tarde.	Thermometro. manh.	Thermometro. meio dia.	Thermometro. tarde.	Quantidade de chuva.	Quantidade de vapor.	Eſtado do Ceo.
						Linh.	Linh.	
1	N. O.	O.	71.°	73.°	74,66°	0,5	.	Var., e chuva.
2	N.	S. E.	70,66	73,5	75.	.	0,3	Clar., e nevoa.
3	Var.	S.	73.	76,5	78.	.	0,4	Clar.
4	N.	Var.	72,33	76,5	80,16	2	.	Var., e chuva.
5	Var.	S. O.	69,5	70.	68,5	8	.	Cob., e chuv.
6	Var.	Var.	66,75	68.	69,33	0,7	0,2	Var., e chuv.
7	Var.	Var.	67.	68.	71,33	.	0,3	Nub.
8	Var.	Var.	69,16	71,5	73.	.	0,3	Var.
9	Var.	S. E.	69,91	73.	74,33	.	0,4	Var. A Lua com ſua corôa.
10	Var.	S. E.	69,66	72,5	74,66	.	0,4	Clar.
11	N. O.	S.	69,5	72.	73,33	.	0,3	Var. Luz-Zodiacal.
12	N. O.	S. E.	67,83	70.	72,66	.	0,3	Var.
13	S.	S. O.	67,66	69.	69.	3,6	.	Cob., e chuv.
14	S.	S. O.	67.	68.	69,66	0,5	0,2	Idem.
15	Var.	Var.	66,66	69,5	72.	.	0,2	Var.
16	N. E.	S.	69.	72.	72.	0,6	0,3	Var., e alguns orvalhos.
17	Var.	S.	69,5	71.	71,25	.	0,2	Var.
18	Var.	S. E.	69.	71.	72.	.	0,3	Var. Luz-Zodiacal.
19	Var.	S. E.	71,16	71,5	72.	2,5	.	Cob., e chuv.
20	Var.	S. E.	66,66	68.	69,33	.	0,2	Var.
21	N. O.	S. E.	64,16	68.	69.	1	0,2	Var., e chuv.
22	N. O.	S.	67,16	69.	70,66	1	0,2	Idem.
23	N. O.	Var.	67,16	69.	71,16	.	0,2	Nub., e nevoa.
24	Var.	S. E.	67.	69.	71,5	.	0,3	Var., e nevoa.
25	N. O.	S. E.	67.	69,5	72.	.	0,2	Idem.
26	N. O.	S. E.	69.	70,5	71.	0,4	0,2	Var., nev., e orvalho.
27	N. O.	S. E.	70,5	73.	74,16	.	0,3	Nub., e nevoa.
28	Var.	S. E.	72,83	76.	76,83	.	0,4	Nub.
29	N. O.	S. E.	71,66	72,5	74,33	.	0,3	Var.
30	N. O.	S. E.	69,5	70,5	71,66	.	0,3	Idem.
31	O.	S. O.	66,33	69,5	70,33	.	0,3	Clar., e nevoa.

Buſſola no dia 1°, 6° 37′ 27″; no dia 10, 6° 45′ 40″; no dia 13, 6° 37′ 13″. no dia 19, 6° 42′ 37″; no dia 29, 6° 35′ 3″; e no dia 31, 6° 38′ 20″.

DIARIO METEOROLOGICO.

JUNHO de 1784.

Dias do mez.	Vent. domin.		Thermometro.			Quantidade de chuva.	Quantidade de vapor.	Eſtado do Ceo.
	manh.	tarde.	manh.	meio dia.	tarde.			
						Linh.	Linh.	
1	S. O.	O.	67°,5	68.°	70.°	1	0,2	Variavel, nevoa, e chuva.
2	S. O.	S.	66.	68.	70,33	.	0,2	Variavel.
3	Var.	Var.	64,5	68.	70,66	.	0,2	Var., e nevoa
4	Var.	S. E.	65.	69.	71,33	.	0,1	Clar.
5	Var.	S. E.	64,16	68.	69,33	.	0,2	Idem.
6	N. O.	S. E.	64,66	68.	70,66	.	0,3	Idem.
7	N. O.	S. E.	63,66	67,75.	71.	.	0,3	Clar., e nevoa.
8	N.	S. E.	70,16	74.	79,33	.	0,3	Clar. A Lua com ſua corôa Luminoſa.
9	N. O.	N. E.	73.	75.	80.	.	0,5	Clar.
10	N. O.	N. E.	74.	78.	80,66	.	1,5	Idem.
11	Var.	S. E.	75,66	77.	75.	10	.	Var. nevoa, e chuva.
12	S. O.	S. O.	68,66	66,5	65,33	2	.	Cob., e chuva.
13	S. E.	L.	65,83	67.	67,66	.	0,3	Var.
14	Var.	Var.	66,83	68.	71,16	.	0,2	Nub.
15	Var.	S. E.	66,5	69,5	71,83	.	0,5	Nub., e nevoa.
16	N. O.	Var.	66,66	70.	73,33	.	0,5	Clar., e nevoa.
17	N. O.	Var.	66,5	69,5	73,33	.	0,4	Idem.
18	N. O.	S. E.	71,16	70.	73,33	.	0,5	Nub.
19	N. O.	S. E.	70.	74.	74,33	.	0,5	Clar.
20	N. O.	S. O.	70,33	74.	73,66	6	0,2	Var., e chuva.
21	N. O.	N. O.	68,66	68,5	69,66	.	0,2	Var.
22	N.	S.	66,66	67,5	70.	.	0,2	Idem.
23	Var.	Var.	65.	67,5	69,75	1,5	.	Var., nevoa, e chuva.
24	N. O.	S.	67.	70.	67.	0,4	0,1	Cob., e alguns orvalhos.
25	Var.	S. E.	63,33	65.	66,25	.	0,2	Var.
26	Var.	Var.	63,	64,5	67.	.	0,3	Nub., e nevoa.
27	N. O.	S. E.	63,5	68.	71,33	.	0,3	Clar., e nevoa.
28	Var.	S. E.	65,16	69.	72.	.	0,3	Var., e nevoa.
29	N. O.	S. O.	69,33	69.	68,66	11	.	Cob., nevoa, e chuva.
30	N. E.	S. E.	66.	66.	67.	2	.	Cob., e chuv.

Buſſola no dia 3, 6° 34′ 37″; no dia 4, 6° 42′ 13″; no dia 8, 6° 37′ 57″. no dia 13, 6° 44′ 27″; no dia 19, 6° 35′ 20″; e no dia 23, 6° 49′ 20″.

DIARIO METEOROLOGICO.

JULHO de 1784.

Dias do mez.	Vent. domin. manh.	Vent. domin. tarde.	Thermometro. manh.	Thermometro. meio dia.	Thermometro. tarde.	Quantidade de chuva.	Quantidade de vapor.	Estado do Ceo.
						Linh.	Linh.	
1	Var.	S. O.	66°,33	68°,25	73°,33	0,6	0,3	Var. com algum orvalho.
2	O.	S. O.	65,83	66.	66.	.	0,2	Var.
3	Var.	Var.	62,5	65.	65,83	.	0,2	Var. A Lua com corôa.
4	Var.	Var.	62,16	66.	72.	6	0,3	Nub., nevoa, e fortissima tormenta de trovões, chuva, e vento.
5	Var.	S. O.	66.	66.	66.	3	.	Cob., trovões, e chuva.
6	O.	S. E.	62,5	64,5	66.	.	0,2	Var. Luz-Zodiacal.
7	Var.	Var.	58.	62,5	67,66	.	0,3	Clar., e nevoa. Aur. Austral bem resplandecente.
8	Var.	S. E.	60,5	64.	68,5	.	0,2	Clar., nevoa, e relampagos.
9	N. O.	S. E.	62,16	70.	72,66	.	0,2	Clar., e nevoa.
10	Var.	S. O.	68,16	70.	70,33	.	0,2	Var.
11	S. O.	S. O.	64,16	68.	70.	.	0,2	Cob.
12	Var.	L.	57,83	64.	66.	.	0,1	Var.
13	Var.	S. E.	59,5	66.	67,66	.	0,3	Clar. Luz-Zodiacal.
14	Var.	S. E.	60.	66,5	69,33	.	0,3	Clar.
15	N. O.	N. E.	63,66	70,5	75.	.	0,3	Clar. Luz-Zodiacal muito luzente.
16	Var.	S. E.	64,66	70.	73.	.	0,4	Var. Luz-Zodiacal.
17	N. O.	N. O.	69.	71.	74,66	.	0,5	Var., e nevoa.
18	N. O.	S.	68,33	72,5	74.	.	0,5	Idem.
19	Var.	S. E.	68,33	73.	75,33	.	0,5	Var. Luz-Zodiacal.
20	N. O.	N. O.	69,5	73.	77,66	.	0,5	Var.
21	N. O.	N.	73,66	76.	80,33	.	0,8	Nub.
22	Var.	N. O.	74.	75.	73,66	6	.	Var., trovões, e chuva.
23	S. O.	S. E.	70,33	71.	73,33	.	0,2	Var., e chuva.
24	Var.	S. E.	66,66	69.	71,66	.	0,4	Var.
25	N. O.	N. E.	65.	72.	76.	.	0,4	Nub., e nevoa. Aur. Aust.
26	Var.	Var.	72,66	76.	81,33	.	1	Nub., e nevoa.
27	Var.	O.	72,33	68.	70.	4	.	Cob., e chuva.
28	O.	S. O.	63,83	66,5	64,66	1	0,4	Var., e chuva.
29	Var.	S.	62.	64.	67.	3	.	Var., e chuva. Neste dia houve huma grande maré.
30	Var.	S. E.	59,5	66,5	71.	.	0,4	Var., e nevoa.
31	Var.	Var.	69,33	70.	71,16	2	0,2	Var., trovões, e chuva.

Bussola no dia 2, 6° 36′ 27″; no dia 5, 6° 45′ 27″; no dia 7, 6° 48′ 20″; no dia 14, 6° 36′; no dia 24, 6° 34′ 37″; no dia 26, 6° 40′ 40″; e no dia 29, 6° 34′ 16″.

DIA-

DIARIO METEOROLOGICO.

AGOSTO de 1784.

Dias do mez.	Vent. domin. manh.	Vent. domin. tarde.	Thermometro. manh.	Thermometro. meio dia.	Thermometro. tarde.	Quantidade de chuva.	Quantidade de vapor.	Estado do Ceo.
						Linh.	Linh.	
1	O.	S.	65°,5	67°.	66°,33	3	.	Var., e chuva.
2	O.	S. O.	61.	64,5	64.	4	.	Idem.
3	Var.	S. O.	61,33	65.	64.	3	.	Cob., e chuva.
4	Var.	L.	61,66	64,5	65,66	.	0,2	Nub.
5	Var.	S. E.	61,66	65.	65,66	.	0,2	Clar.
6	Var.	S. E.	61,16	69.	69.	.	0,3	Idem.
7	N. O.	Var.	65.	68.	72,33	.	0,2	Var. Luz-Zodiacal muito luzente. A Lua com sua corôa.
8	Var.	S. O.	69.	70.	70,83	0,5	.	Var., e chuva.
9	Var.	Var.	68,91	69.	69,33	0,4	0,2	Idem.
10	Var.	S. E.	64,16	70.	71.	.	0,2	Clar., e nev. Aur. Aust.
11	N. O.	S.	65,33	72.	73,33	.	0,2	Var. Fallarei d'este dia em outra parte.
12	Var.	S. O.	69,5	72.	70,33	10	.	Var., e chuva.
13	Var.	S. E.	66.	67.	66,66	0,5	.	Var., e chuva.
14	Var.	S.	60.	66.	68.	.	0,2	Var.
15	N. O.	S. E.	60,66	65.	68.	.	0,3	Clar.
16	N. O.	S. E.	65,83	73.	71,66	.	0,3	Clar., e nevoa.
17	Var.	S. E.	68,66	71.	72.	.	0,3	Var., e nevoa.
18	Var.	N.	72,16	74.	77.	.	0,5	Var., nev., e relampagos.
19	Var.	S. O.	72,66	71.	69.	3	.	Var., e chuva.
20	S. O.	S. O.	64,66	65.	64.	8	.	Cob., e chuva.
21	L.	S.	62,5	64.	63.	2	.	Idem.
22	Var.	Var.	62,66	63,5	64,13	3,5	.	Idem.
23	Var.	L.	66,66	71,5	69,66	.	0,2	Var.
24	N.	Var.	66,33	72.	73.	0,8	0,3	Var., e chuva.
25	Var.	Var.	71.	72.	72,25	.	0,1	Var., e nevoa.
26	Var.	Var.	69,66	72,5	73,66	.	0,3	Var., e nev. A Lua com sua corôa amarella, descorado.
27	Var.	N.	73,66	80,5	77.	.	0,3	Idem.
28	S. O.	S. E.	73,58	74.	73,66	.	0,2	Var.
29	Var.	S.	68,83	70,5	71,83	.	0,2	Idem.
30	Var.	S. E.	69,83	71,25	73.	.	0,2	Idem.
31	N. E.	S. E.	70,33	71,5	75.	.	0,3	Idem.

Bussola no dia 3, 6° 40′ 20″; no dia 8, 6° 33′ 33″; no dia 13, 6° 32′ 27″; no dia 23, 6° 38′ 23″; e no dia 28, 6° 33′ 27″.

DIA-

DIARIO METEOROLOGICO.

SETEMBRO de 1784.

Dias do mez.	Vent. domin. manh.	Vent. domin. tarde.	Thermometro. manh.	Thermometro. meio dia.	Thermometro. tarde.	Quantidade de chuva.	Quantidade de vapor.	Estado do Ceo.
						Linh.	Linh.	
1	Var.	Var.	71.°	73.°	74,66°	.	0,2	Nub., e nevoa.
2	Var.	Var.	70,83	73.	76,08	.	0,3	Idem.
3	N. O.	S. E.	72,66	74,5	75,5	.	0,3	Nub.
4	Var.	Var.	71,5	75.	76.		0,4	Var.
5	N. O.	S. E.	73,5	75,5	75,58		0,4	Nub.
6	N. E.	Var.	73,5	74.	74,83	1	0,3	Var., trovões, e chuva.
7	Var.	Var.	72.	72.	71.	10	.	Cob., trov., e chuv.
8	Var.	S. E.	68,66	69.	68,5	4	.	Cob., nevoa, e chuv.
9	S. O.	Var.	67,33	68.	67,83	5		Idem.
10	Var.	Var.	66,5	67.	66,5	2,5		Idem.
11	Var.	S. E.	64,5	64,5	64,16	7		Cob., trovões, e chuv.
12	N. O.	S. E.	64,83	69.	71.	0,5	0,3	Var., nev., relamp., e orv.
13	Var.	Var.	70,5	71.	71,16	2,5		Cob., nev., trov., e chuv.
14	Var.	S.	66,33	66.	65,66	0,3	0,2	Var., e nevoa, e orvalho.
15	Var.	S. O.	63,33	64,5	65.	0,2	0,2	Idem.
16	N. E.	S. E.	63.	63.	62.	17,5	.	Nev. todo o dia, com seu orvalho.
17	Var.	N. O.	61.	62.	62,33	5	.	Idem.
18	Var.	L.	62,5	64.	63,33	17	.	Idem.
19	Var.	S. E.	63.	65.	64,33	2	.	Idem.
20	L.	S. E.	63,5	66.	65,16	.	0,1	Nub.
21	Var.	S. E.	61,33	67,5	68.	.	0,2	Clar.
22	N. O.	S. O.	71,33	72,5	71,16	3	.	Nub., nevoa, e chuva.
23	Var.	S. E.	66,66	70,5	67,83	0,5	.	Nev. todo o dia, e orvalho.
24	L.	L.	66,66	68.	69.	2	.	Idem.
25	N. O.	O.	69,16	70,5	72,33	2	.	Cob., nevoa, e chuva.
26	Var.	S. E.	69.	70.	70,83	.	0,2	Var., e nevoa.
27	Var.	S. E.	68,66	71,5	72,33	.	0,2	Nub., e nevoa.
28	Var.	S. E.	69,83	71,5	72,33	.	0,3	Idem.
29	Var.	S. E.	69,66	72,5	74,33	.	0,5	Var.
30	Var.	Var.	70,16	75,5	79,16	.	1	Nub. Luz-Zodiacal.

Bussola no dia 1, 6° 35′ 10″; no dia 7, 6° 40′ 50″; no dia 14, 6° 38′; no dia 18, 6° 36′ 47″; no dia 26, 6° 43′ 13″; e no dia 28, 6° 40′ 7″.

DIA-

DIARIO METEOROLOGICO.

OUTUBRO de 1784.

Dias do mez.	Vent. domin. manh.	Vent. domin. tarde.	Thermometro. manh.	Thermometro. meio dia.	Thermometro. tarde.	Quantidade de chuva.	Quantidade de vapor.	Eſtado do Ceo.
						Linh.	Linh.	
1	Var.	Var.	73.°	80.°	83,33	.	0,5	Nub.
2	Var.	S. E.	74,33	76.	77,16	.	0,3	Nub., nevoa, e relampag.
3	Var.	S.	74,16	75.	73,66	3,5	.	Cob., nev., trov., e chuva.
4	S. E.	L.	66,66	68,5	68.	.	0,3	Cob., e nevoa.
5	Var.	S. E.	67,33	71.	71,33	2,5	.	Nub., nev., trov., e chuv.
6	S. E.	O.	71,10	73.	72.	1	.	Var., nev., relamp., e chuv.
7	Var.	S. E.	68,5	69,5	68,66	0,5	.	Cob., nevoa, e orvalho.
8	Var.	S. E.	69.	71.	71,33	.	0,3	Nub, e nevoa.
9	Var.	S. E.	70,66	73,5	76.	.	0,3	Idem.
10	N. O.	S. E.	73,66	77.	76,66	.	0,4	Nub., nev., e relamp.
11	N. O.	S. E.	76,33	77.	77.	0,5	.	Var.,nev., relamp., e chuv.
12	S. O.	S. O.	73.	74.	72,83	3	.	Cob., nevoa, e chuva.
13	S.	S.	69,5	71.	70.	0,3	.	Var., nevoa, e orvalho.
14	Var.	S.	69,5	70.	68,41	4,7	.	Cob., nevoa, e chuva.
15	N. O.	S. E.	69,83	71.	72.	0,8	0,3	Var., nev., relamp., e chuv.
16	N. O.	S. E.	69.	73.	73,16	0,2	0,3	Var., nev., relamp., e chuv.
17	Var.	S. E.	70,16	73.	75,16	0,2	0,2	Idem.
18	Var.	Var.	74,33	85.	78,38	8	.	Idem.
19	Var.	S. O.	64,66	66.	65,62	0,5	.	Cob., nevoa, e chuva.
20	Var.	Var.	64,66	65,5	66.	.	0,2	Var., e nevoa.
21	Var.	S. E.	64,66	68.	67,92	.	0,3	Idem.
22	N. O.	S.	67.	69,5	70,5	.	0,3	Nub., e nevoa.
23	Var.	S. E.	67,83	71,5	71,75	.	0,3	Var., e nevoa.
24	Var.	S. E.	68,33	72.	74,37	.	0,3	Idem.
25	Var.	S. E.	71,33	73.	74,6	.	0,4	Nub., e nevoa.
26	Var.	Var.	72	74.	75,5	.	0,4	Idem.
27	N. O.	Var.	70,83	75,25	77,56	.	0,4	Idem.
28	N. O.	Var.	75,16	80,5	79.	8	.	Var., nev., trov., e chuv.
29	Var.	Var.	73.	74,5	74,19	.	0,4	Var., e nevoa.
30	S. O.	S. E.	73,5	75,25	76,87	.	0,4	Nub., nev., trov. ao longe.
31	Var.	S. E.	75,58	77,5	79,12	.	0,5	Var., e nev. Luz-Zodiacal.

Buſſola no dia 1, 6° 40′; no dia 11, 6° 45′ 13″; no dia 16, 6° 33′ 23″; no dia 22, 6° 37′ 35″; no dia 28, 6° 35′ 8″; e no dia 31, 6° 30′ 7″.

DIARIO METEOROLOGICO.

NOVEMBRO de 1784.

Dias do mez.	Vent. domin. manh.	Vent. domin. tarde.	Thermometro. manh.	Thermometro. meio dia.	Thermometro. tarde.	Quantidade de chuva.	Quantidade de vapor.	Eſtado do Ceo.
						Linh.	Linh.	
1	Var.	Var.	76,33°	79.°	80.°	.	1	Var., e nevoa.
2	Var.	Var.	76,33	78,5	79,25	.	0,8	Nub., e nevoa.
3	Var.	S. E.	76,66	78.	79,62	.	1	Nub., nev., e relampagos.
4	N. O.	Var.	77,33	81,25	80,25	0,3	1,2	Var., nevoa, relampagos, e orvalho.
5	Var.	S. E.	78.	80.	80,75	.	1	Var.
6	Var.	S. E.	76,5	79,5	79,5	.	1	Nub., e relampagos.
7	Var.	S.	75.	76,5	76.	0,4	0,8	Var., nevoa, e orvalho.
8	Var.	S.	73,66	74.	74,65	2	.	Cob., nevoa, e chuva.
9	Var.	S. E.	74,33	75.	75.	2,5	.	Var., nevoa, e chuva.
10	L.	S. E.	74,5	76,5	78,9	.	1	Var., e nevoa.
11	Var.	Var.	77,33	79.	78,75	24	.	Var., nevoa, e chuva.
12	Var.	Var.	76.	77,5	78.	2,5	.	Var., e chuva.
13	N. O.	N. O.	75.	78.	81.	0,5	1,5	Var., relamp., e orvalho.
14	N. O.	N. O.	78,83	82.	82.	1	0,8	Var., trovões, e chuva.
15	Var.	S. E.	78,16	81.	82,12	.	2	Nub., nevoa, e relamp.
16	Var.	S. E.	77,16	78,5	80,22	0,6	1	Var., nevoa, e orvalho.
17	N. O.	S. E.	76,66	78,5	80,62	.	2	Var., nev., e relampagos.
18	Var.	S. E.	79,58	83.	85,5	.	2,5	Idem.
19	Var.	S. E.	82,75	88.	86,12	2	.	Var., trovões, e chuva.
20	Var.	S. E.	81,5	85.	85,12	11	.	Idem.
21	N. O.	S. E.	80,33	82.	82,44	5	.	Idem.
22	Var.	S.	79,91	81,5	81.	16	.	Idem.
23	Var.	S. E.	76,83	78.	78.	0,7	1	Var., e chuva.
24	Var.	S. E.	75,33	78.	80,87	.	1,5	Var., e nevoa.
25	Var.	Var.	79.	79.	77,12	5	.	Cob., nevoa, e chuva.
26	Var.	Var.	73,33	73.	73.	0,2	0,3	Idem.
27	Var.	S. E.	71,16	74.	76,25	.	0,5	Nub.
28	Var.	S. E.	74,16	77.	77,12	2	.	Var., nevoa, e chuva.
29	Var.	S. E.	71,33	73,75	74,12	0,7	0,4	Idem.
30	N. O.	S. E.	72.	73.	75.	4	.	Idem. O mar muito luminoſo.

Buſſola no dia 1, 6° 31′ 10″; no dia 5, 6° 29′ 2″; no dia 19, 6° 37′ 12″; no dia 25, 6° 32′ 25″; e no dia 30, 6° 35′.

DIA-

DIARIO METEOROLOGICO.

DEZEMBO de 1784.

Dias do mez.	Vent. domin.		Thermometro.			Quantidade de chuva.	Quantidade de vapor.	Estado do Ceo.
	manh.	tarde.	manh.	meio dia.	tarde.			
						Linh.	Linh.	
1	Var.	S. E.	73°,83	76°.	78°,37	0,5	1	Nub., trovões, e chuva.
2	N. O.	Var.	76,41	77,5	78.	30	.	Var., trovões, e chuva.
3	Var.	Var.	74,83	76.	76,5	0,4	0,5	Var., e chuva.
4	N. O.	S. E.	70,16	75,5	77.	.	1	Nub.
5	N. O.	S. E.	71,5	75.	77,37	.	1	Nub., e nevoa.
6	N. O.	S. E.	74,66	78.	78,12	.	0,8	Clar.
7	N. O.	S. E.	75,66	79.	80.	.	1	Nub.
8	Var.	S. O.	78,16	79.	79,5	.	0,8	Cob., e nev. O mar summamente luminoso.
9	N. O.	S. E.	77,5	79.	80,22	.	1,5	Var., e nevoa.
10	Var.	S. E.	76,66	79.	80,76	.	1,6	Nub., e nevoa.
11	N. O.	S. E.	76,33	80.	81.	.	2	Nub.
12	Var.	S. E.	77,5	81.	80,75	.	2,5	Var.
13	Var.	S. O.	79,83	82.	81,75	42	.	Var., trovões, e chuva.
14	Var.	S. O.	67,83	69.	68,75	7	.	Cob., e chuva.
15	Var.	S.	66,66	67,5	67.	2	.	Idem.
16	Var.	S. E.	64,5	68.	69,62	.	0,4	Nub.
17	Var.	S. E.	66,83	69.	71,37	.	1	Idem.
18	N.	S. E.	70,16	73.	74,75	0,3	0,8	Var., e orvalho.
19	N.	S. E.	72,83	76.	78,25	.	1,5	Var., e relampagos.
20	Var.	S. E.	76,33	78,5	79,12	0,5	1	Var., nev., e orvalho.
21	N. O.	S. E.	76,5	79.	81,12	.	1,5	Nub., e relampagos.
22	N.	S. E.	80,33	84.	84.	.	2	Nub., e trovões. A Lua com sua coröa.
23	N.	S. E.	81,16	83,5	83.	.	2	Var., e relampagos.
24	Var.	Var.	79,83	82.	81,9	.	2	Var., e trovões ao longe.
25	Var.	S. E.	78,5	79,5	81,05	.	1,5	Nub., nevoa, e relamp.
26	N. O.	S. E.	78,16	80,5	82,5	5	.	Nub., trovões, e chuva.
27	N. O.	S. E.	79,83	84.	84,75	0,6	3	Var., trovões, e chuva.
28	N. O.	S. E.	80.	83.	83,5	.	2,5	Var.
29	N. O.	S. E.	76,33	80.	80,5	.	3	Idem.
30	Var.	S. E.	76,16	79.	81,5	0,3	3	Nub., nevoa, e orvalho. Aur. Aust. O mar muito luminoso.
31	N. O.	S. E.	80,83	87.	85,2	0,6	3	Var., trovões, e chuva.

Bussola no dia 5, 6° 39′ 15″; no dia 9, 6° 36′; no dia 18, 6° 34′ 13″; no dia 21, 6° 38′ 20″; e no dia 31, 6° 33′ 47″.

BA-

BAROMETRO.

TABOA I.	Elevaçaõ maxima.	Elevaçaõ minima.	Elevaçaõ media.	Elevaçaõ da manhã.	Elevaçaõ ao meio dia.	Elevaçaõ da tarde.
	Pol. Lin.	Pol. Lin.	Pol. Lin.	Pol. Lin.	Pol. Lin.	Pol. Lin.
Agosto	28 6,1	28 1, 1	28 4,33	28 4,53	28 4,53	28 4,21
Setembro.	28 7,6	28 0,75	28 3,97	28 4,14	28 3,95	28 3,77
Outubro.	28 6	27 11, 6	28 3,53	28 3,61	28 3,59	28 3,39
Novembro.	28 4,8	27 10, 7	28 1, 7	28 1,81	28 1,78	28 1,52
Dezembro.	28 5,9	27 11, 2	28 2,68	28 2,87	28 2,65	28 2,52

THERMOMETRO.

TABOA II.	Calor maximo	Calor minimo.	Calor medio do mez.	Calor medio da manhã.	Calor medio ao meio dia.	Calor medio da tarde.
Feverciro.	94°	71°,5	80°,25	78°,35	80°,69	81°,71
Março.	87	71	78,21	76,07	78,68	79,87
Abril.	86,5	70,5	77,67	75,64	78,18	79,19
Maio.	80,5	63	70,76	68,87	71	72,41
Junho.	82	62,5	69,46	67,29	69,47	71,63
Julho.	82	55	68,47	65,37	68,63	71,32
Agosto.	80,5	58	68,54	66,44	69,39	69,81
Setembro.	80,5	58	69,73	67,75	69,51	69,96
Outubro.	85	62	72,44	70,61	73,25	73,47
Novembro.	88,5	68	78,13	76,51	78, 6	79,28
Dezembro.	88	61	77, 4	75,86	77,55	78,36

Ca-

Calor medio de duas em duas horas.

TAB. III.	6 horas da manhã.	8 horas da manhã.	10 hor. da manhã.	12 hor. da manhã.	2 horas da tarde.	4 horas da tarde.	6 horas da tarde.	do dia.
Fevereiro.	77°,43	78°,17	79°,47	80°,69	81°,65	82°,25	81°,27	80°,17
Março.	75,1	76,01	77,15	78,68	79,7	80,37	79,67	78,1
Abril.	74,8	75,4	76,66	78,18	79,06	79,41	79,08	77,51
Maio.	68,3	68,72	69,58	71.	72.	72,79	72,48	70,7
Junho.	65,8	66,8	67,95	69,47	70,9	71,9	71,31	69,17
Julho.	64,25	64,9	67,14	68,73	70,71	72,56	71,35	68,58
Agosto.	65,3	66,08	68,03	69,39	69,45	70,41	69,53	68,31
Setembro.	67.	67,47	68,78	69,51	70.	70,2	69,53	68,93
Outubro.	69,96	70,51	71,8	73,25	73,62	73,76	73,23	72,4
Novembro.	75,77	76,77	77,5	78,6	79,37	80,2	79,26	78,3
Dezembro.	74,3	75,21	76,56	77,55	79,12	79,22	78,88	77,36

Número dos dias.

TABOA IV.	Claros.	Variaveis.	Nublados.	Cobertos.	Relampagos.	Trovões.	Chuva.	Nevoa.	Aurora Austral.	Luz Zodiacal.
Fevereiro.	5	11	10	3	12	9	10	3	*	1
Março.	3	14	9	5	4	3	10	14	*	*
Abril.	5	13	10	2	6	2	12	6	*	1
Maio.	5	15	7	4	*	*	11	7	*	2
Junho.	12	9	5	4	*	*	9	12	*	*
Julho.	6	16	6	3	1	4	9	9	2	5
Agosto.	5	20	1	5	1	1	11	6	1	1
Setembro.	1	7	10	12	2	4	18	21	*	1
Outubro.	*	14	11	6	10	4	13	29	*	1
Novembro.	*	19	8	3	7	5	19	19	*	*
Dezembro.	1	13	13	3	5	8	11	7	1	*

Quan-

Quantidade de chuva, e vaporaçaõ.					Ventos dominantes.		
TABOA V.	Chuva.		Vaporaçaõ.		TABOA VI.	Manhã.	Tarde.
	Pol.	Lin.	Pol.	Lin.			
Fevereiro.	2	3,65	3	1,8	Fevereiro.	Variavel.	S. E.
Março.	2	5,4	2	9,3	Março.	Var.	S. E.
Abril.	2	7,4	1	8,9	Abril.	Var., e N. O.	S. E.
Maio.	5	3,2	0	7,2	Maio.	Var., e N. O.	S. E.
Junho.	3	3,9	0	8	Junho.	Var.	Var.
Julho.	2	5,6	0	9,3	Julho.	Var.	Var.
Agoſto.	4	7	0	4,9	Agoſto.	Var.	Var., e S. E.
Setembro.	8	2	0	5	Setembro.	Var.	Var., e S. E.
Outubro.	3	3,7	0	6,8	Outubro.	Var.	S. E.
Novembro.	8	0,4	1	9,8	Novembro.	Var.	S. E.
Dezembro.	8	9,2	3	7,4	Dezembro.	Var.	S. E.

Influencia correſpondente aos pontos Lunares.

TABOA VII.	Calor medio.	Ventos dominantes.							
Pontos Lunares.		N.	N. E.	N. O.	S.	S. E.	S. O.	L.	O.
Lua em conjunçaõ.	73,32°	5	5	18	13	28	3	8	2
Lua em oppoſiçaõ.	74,16	5	6	15	8	19	8	6	13
I. Quarro.	73,83	9	7	15	4	29	4	4	7
II. Quarto.	75,5	6	10	27	6	24	1	1	3
Apogeu.	73,46	10	6	20	5	36	3	2	4
Perigeu.	72,58	4	9	18	8	38	2	4	5
Luniſtico Auſtral.	73,64	1	7	20	3	32	2	13	7
Luniſtico Boreal.	74,45	8	1	17	5	28	4	14	1
Equinoccio aſcendente.	72,96	6	3	10	16	24	13	2	5
Equinoccio deſcendente.	74,02	12	8	14	12	33	*	5	3
I. Oitante.	72,91	8	6	25	6	22	5	5	2
II. Oitante.	74,45	6	4	16	7	26	3	6	19
III. Oitanre.	73,71	3	*	22	8	34	8	10	3
IV. Oitante.	73,14	5	4	23	7	24	6	7	3

In-

Influencia correspondente aos pontos Lunares.

TABOA VIII.	Numero dos dias.									
Pontos Lunares.	Claros.	Variaveis.	Nublados.	Cobertos.	Relampagos.	Trovões.	Chuva.	Nevoa.	Aurora Austral.	Luz-Zodiacal.
Lua em conjunçaõ.	3	5	1	2	*	*	4	4	*	*
Lua em opposiçaõ.	*	5	4	2	*	3	5	6	*	*
I. Quarto.	*	5	6	*	1	1	2	4	1	*
II. Quarto.	2	7	2	*	3	2	4	4	*	2
Apogeu.	1	8	2	1	*	2	2	4	*	*
Perigeu.	3	6	3	*	1	1	4	6	*	*
Lunistico Austral.	3	5	3	1	1	2	6	4	*	*
Lunistico Boreal.	2	3	4	2	2	2	3	5	*	*
Equinoccio ascendente.	2	5	2	2	*	1	7	6	*	*
Equinoccio descendente.	3	8	1	*	4	1	3	4	*	*
I. Oitante.	*	5	4	2	2	*	4	4	*	*
II. Oitante.	*	9	2	1	1	3	5	5	*	*
III. Oitante.	1	3	6	2	*	2	4	4	1	*
IV. Oitante.	2	3	3	3	3	*	2	5	*	1

Declinaçaõ Oriental d'Agulha-Magnetica.

TABOA IX.	Declinaçaõ maxima.	Declinaçaõ minima.	Declinaçaõ media do mez.	Declinaçaõ media da manhã.	Declinaçaõ media do meio dia.	Declinaçaõ media da tarde.
	° ′	° ′	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″
Fevereiro.	6 55	6 25	6 38 16	6 35 59	6 41 28	6 37 20
Março.	6 57	6 27	6 36 30	6 34 16	6 38 34	6 36 39
Abril.	6 52	6 28 30″	6 38 34	6 37 29	6 39 43	6 38 29
Maio.	6 52	6 34	6 39 55	6 39 21	6 41 3	6 39 22
Junho.	6 55	6 33	6 41 53	6 41 16	6 42 39	6 41 43
Julho.	6 52	6 30 30	6 39 19	6 38 58	6 39 31	6 39 28
Agosto.	6 43	6 27	6 35 26	6 35 46	6 35 19	6 35 13
Setembro.	6 48	6 33	6 39 27	6 39 10	6 39 54	6 39 16
Outubro.	6 46	6 23	6 36 43	6 35 5	6 37 54	6 38 11
Novembro.	6 39	6 26	6 33 43	6 32 42	6 33 59	6 34 28
Dezembro.	6 46	6 31	6 37 13	6 35 50	6 37 47	6 38 1

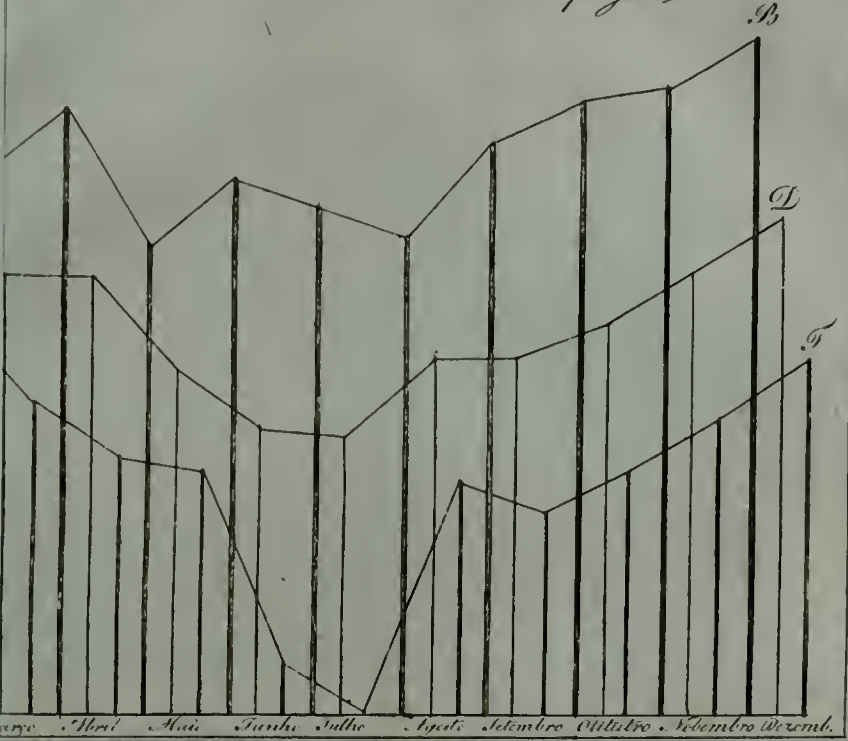
De-

Declinaçaõ media de duas em duas horas.

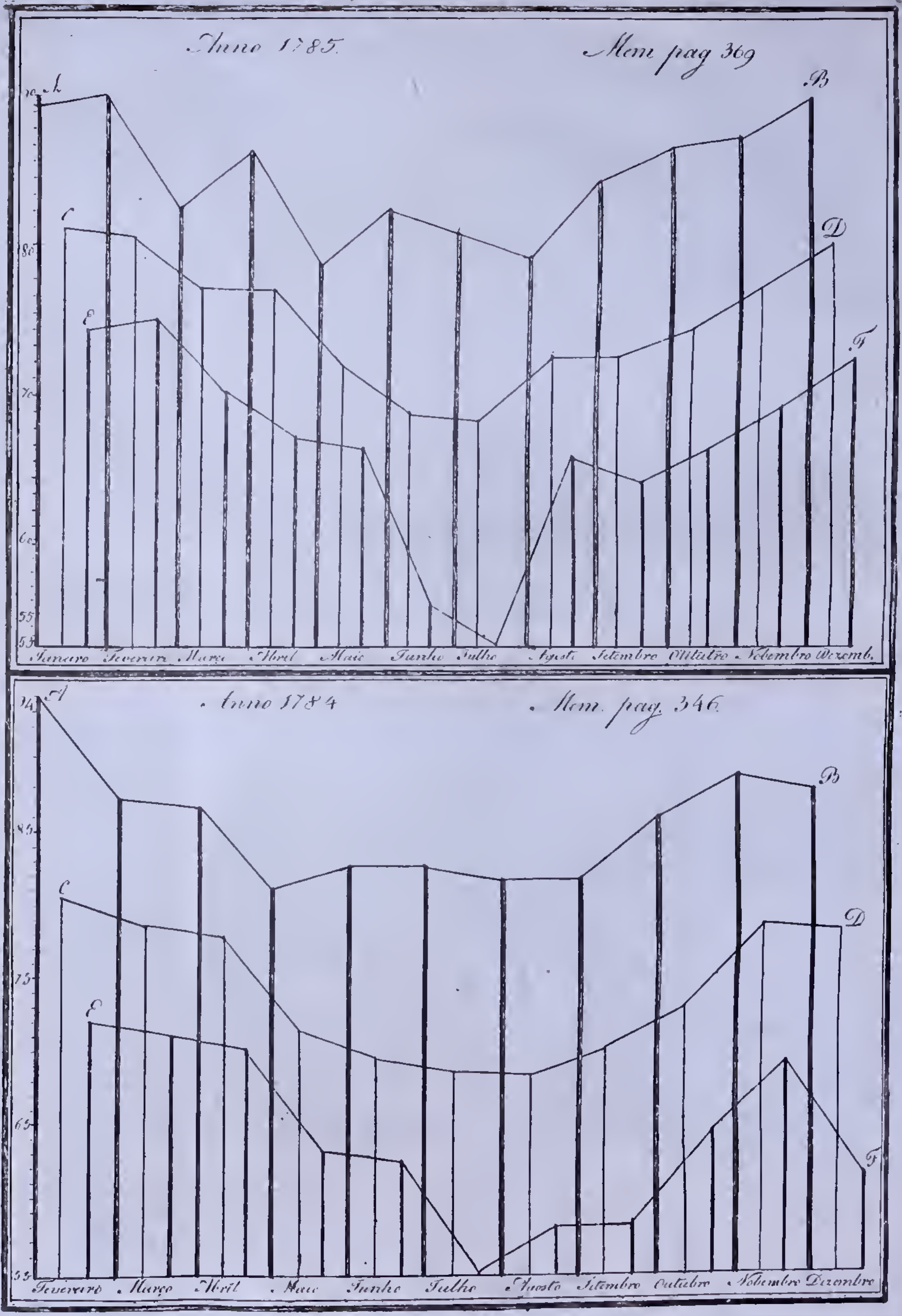
TAB. X.	6 horas da manhã.	8 horas da manhã.	10 horas da manhã.	12 horas da manhã.	2 horas da tarde.	4 horas da tarde.	6 hòras da tarde.	do dia.
	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	° ′ ″
Fever.	6 35 57	6 37 21	6 38 7	6 41 28	6 39 27	6 37 11	6 35 0	6 37 47
Março.	6 33 19	6 34 12	6 35 17	6 38 34	6 37 25	6 36 34	6 35 48	6 35 54
Abril.	6 37 28	6 37 24	6 37 15	6 39 43	6 39 8	6 38 48	6 38 30	6 38 20
Maio.	6 39 33	6 39 42	6 38 41	6 41 3	6 40 14	6 39 22	6 38 38	6 39 36
Junho.	6 41 6	6 41 36	6 41 3	6 42 39	6 41 52	6 41 22	6 40 44	6 41 29
Julho.	6 38 48	6 39 10	6 38 55	6 39 31	6 39 35	6 39 44	6 38 58	6 39 14
Agosto.	6 36 4	6 36 2	6 35 14	6 35 19	6 35 5	6 35 25	6 35 7	6 35 28
Setemb.	6 39 7	6 39 20	6 38 59	6 39 54	6 39 46	6 39 22	6 39 20	6 39 24
Outubr.	6 32 6	6 34 42	6 35 15	6 37 54	6 39 7	6 38 5	6 37 9	6 36 20
Nov.	6 32 58	6 32 14	6 33 7	6 33 59	6 34 31	6 34 38	6 34 26	6 33 46
Dez.	6 35 27	6 36 2	6 36 23	6 37 47	6 38 12	6 38 15	6 37 53	6 37 26

OBSER-

Anno 1785 — Mem pag 369



Anno 1784 — Mem. pag. 346.


Anno 1785.
Mem pag 369
A
B
C
D
E
F
Janeiro Fevereiro Março Abril Maio Junho Julho Agosto Setembro Outubro Novembro Dezemb.
Anno 1784
Mem. pag. 346.
A
B
C
D
E
F
Fevereiro Março Abril Maio Junho Julho Agosto Setembro Outubro Novembro Dezembro

OBSERVAÇÕES ASTRONOMICAS, E METEOROLOGICAS

Feitas na Cidade do Rio de Janeiro no anno de 1785

Por Bento Sanches Dorta.

Resumo das Taboas das Observações.

1 O Temperamento d'este anno, he quente, e humido: elle he notavel pela athmosfera se conservar tantas noites incendiada, principalmente em quasi todo o mez de Setembro: e pelas muitas nevoas permanentes de dia e de noite; havendo mezes, em que naõ pude descobrir Planetas, e Estrellas: de modo, que nos ultimos quatro mezes, havendo visiveis neste Meridiano 53 Eclipses dos Satellites de Jupiter, só observei 12.

2 O maior calor, que indicou o Thermometro de Fahrenheit, foi de 90° duas vezes neste anno: a 1.ª no primeiro dia de Fevereiro pelas 2^h da tarde, estando o Ceo com algumas nuvens; e o vento correndo do N. E.: a 2.ª no dia 27 de Dezembro ás 4^h da tarde; o Ceo achava-se nublado; o vento assoprava do S. E. Este gráo de calor he menor 4°, do que o anno preterito.

No dia 14 de Outubro ás 3^h da tarde, expuz o Thermometro aos raios directos do Sol, e annunciou 114.°

3 O menor calor annunciado no mesmo instrumento he de $52°\frac{1}{2}$; no dia 3 de Julho ás 6^h da manhã: o Ceo estava coberto com huma espessa nevoa; o vento vinha do N. O. Este he o maior frio, que tem aqui havido, depois que me occupo nestas observações.

A differença do maximo ao minimo he de $37^{\circ}\frac{1}{2}$. Esta differença he menor, que a do anno passado $1^{\circ}\frac{1}{2}$.

4 O calor medio chegou a $75^{\circ},22$, somma de 2920 observações, ou 8 cada dia. Excedeu o do anno passado de $1^{\circ},62$.

5 Foi o calor medio da manhã $72^{\circ},88$: ao meio dia $75^{\circ},1$: da tarde $76^{\circ},2$.

Em todos os mezes d'este anno, exceptuando Novembro, e Dezembro sempre o maior calor do dia foi ás 4^{h} da tarde: e nos mencionados mezes ás 2^{h}.

As tres linhas curvas *AB*, *CD*, *EF* da estampa inclusa, deixaõ bem claramente vêr as variedades do calor que aquí soffremos. As Abcisas mostraõ o tempo, as Ordenadas a altura : a primeira vai dividida em gráos para servir de peti-pé.

6 A maior elevaçaõ do Mercurio no Barometro, foi observada de $28^{Pol.}\ 7^{Lin.},35$; a 23 de Agosto á meia noite : o Ceo estava com sua nevoa, o Thermometro mostrava 73°: o vento vinha do S. E.

7 A menor elevaçaõ foi de $27^{Pol.}\ 10^{Lin.}$; a 25 de Outubro ás 4^{h} da tarde : o Ceo estava nublado : o Thermometro em 75°: o vento era S. O.

A differença entre as alturas extremas do Azougue he de $9^{Lin.},35$.

8 A altura media do Barometro resultado de 2920 observações, ou 8 cada dia foi de $28^{Pol.}\ 2^{Lin.},96$.

9 A elevaçaõ media da manhã he de $28^{Pol.}\ 3^{Lin.},1$; ao meio dia $28^{Pol.}\ 3^{Lin.},03$; da tarde $28^{Pol.}\ 2^{Lin.},83$.

10 Neste anno houveraõ dias serenos 69; variaveis 146; nublados 87; cobertos de todo 63; de relampagos naõ se ouvindo trovões 47; de trovoada ao longe e ao perto 38; de chuva 150; de nevoas seccas, e molhadas 111; de Auroras Austraes 3; em fim de Luz-Zodiacal 9.

11

11 Choveu mais neſte anno, do que em nenhum dos antecedentes, que ſe obſerváraõ, ſendo a altura total da chuva 55 Pol. 0 Lin.,63. Março foi o mez de mais chuva, Agoſto de menos.

Na noite de 12 de Março choveu notavelmente, pois no eſpaço de $3^h \frac{1}{4}$ chegou a ſua altura a 4 Pol. 2 Lin.

12 A vaporaçaõ chegou a 35 Pol. 2 Lin.,29: Janeiro foi o mez de maior vaporaçaõ, Junho da menor.

A chuva excedeu á vaporaçaõ 19 Pol. 8 Lin.,34.

13 O Vento da manhã foi muitas vezes Variavel, e outras N. O.; de tarde dominou S. E. menos em Junho, e Setembro.

14 Ouvíraõ-ſe trovões a 1, 3, 4, 9, 11, 16, e 17 de Janeiro; a 1, 2, 7, 10, 11, e 25 de Fevereiro, a 5, e 30 de Março; a 20 de Junho; a 8, 9, 10, e 18 de Setembro; a 13, 24, 25, e 29 de Outubro; a 4, 6, 13, 14, 15, 19, 20, 22, e 27 de Novembro; a 2, 3, 9, 16, e 24 de Dezembro.

15 Houve neſte anno 3 Auroras Auſtraes, e ſummamente radiantes, e todas no mez de Agoſto a 20, 29, e 31: a de 29 começou muito luminoſa, e eſpalhando-ſe por todo o Hemisferio, o incendiou de tal maneira, que todo elle parecia em fógo: os Planetas que entaõ ſe achavaõ no Horizonte pareciaõ como ferro em braza: principiou eſta Aurora ás $2^h\ 25'$ da manhã, findou com o dia. A' noite tornou a incendiar-ſe o Hemisferio todo; mas a ſua inflammaçaõ em menor gráo do que a da manhã. A 31 do meſmo mez á $1^h\ 28'$ da manhã começou a apparecer a Aurora Auſtral muito avermelhada, e augmentando-ſe pouco a pouco, chegou a formar como huma grande foguelra na altura de 30° pouco mais ou menos; e aſſim ſe conſervou por tempo de 20': depois foi diminuindo de inflammaçaõ, e acabou totalmente ás $2^h\ 20'$. O Ceo eſtava muito obſcurecido por toda a mais parte; porém

rém summamente tranquillo, pois naõ corria o menor vento.

Naõ houve só estes meteoros igneos; outro fenomeno muito mais admiravel pela sua raridade ví no Ceo no dia 15 de Fevereiro ás 6^h 10′ da manhã: consistia este em hum arco Iris correndo do S. O. ao N., todo de huma vivissima côr vermelha, sem mistura de outra alguma côr: durou até ás 6^h 25′; depois tomou as mais côres do arco Iris ordinario. O Ceo achava-se ao mesmo tempo semeado de barras purpureas, e o intervallo do Ceo, que havia entre estas, parecia sanguineo.

16 Observou-se a Luz-Zodiacal a 22 de Janeiro; a 15, e 16 de Abril; a 5, e 8 de Junho; a 31 de Julho; a 23 de Setembro; a 1 de Outubro; e a 8 de Novembro. A de 15 de Abril, e 5 de Junho fôraõ muito brilhantes, as outras pouco luzentes.

17 A influencia da Lua nos seus pontos observados, a respeito do maior gráo de calor, teve lugar no Lunistico Boreal, e Perigeu: e o menor no II. Quarto. Pelo que pertence á elevaçaõ do Barometro, concorreu a maxima no I. Quarto, e I. Oitante: a minima no II. Oitante.

18 A Lua em todos os pontos concorreu com a chuva quasi igualmente, exceptuando o I. Quarto, pois este ponto foi, em que menos choveu.

19 Treze vezes se offereceu neste anno a Lua aos meus olhos com sua corôa: humas brancas, outras alguma cousa amarellas: neste fenomeno excedeu aos mais annos, que tenho observado; porque no anno de 1784 ví 7; no de 83 ví 6; e no de 82 ví 5.

20 A maior declinaçaõ Oriental, que se observou na Agulha-Magnetica este anno foi de 6° 46′ no dia 19 de Dezembro ao meio dia: o Ceo estava coberto; o Barometro achava-se na altura de 27 Pol. 11 Lin. ,4; e o Thermometro em 78°: o vento assoprava S.

21 A menor declinaçaõ foi de 6° 20′ duas vezes neste anno: a 1.ª no dia 28 de Janeiro ás 6^{h} da manhã: achava-se o Ceo nublado, o Barometro na elevaçaõ de $28^{Pol.}$ $3^{Lin.}$,1; o Thermometro annunciava 80°: o vento corria de L.: a 2.ª a 2 de Junho ás 2^{h} da tarde, tempo em que o Ceo estava coberto, e chovia: o Barometro na altura de $28^{Pol.}$ $5^{Lin.}$,3; o Thermometro 71°,5: o vento vinha de L.

A differença da maior declinaçaõ, á menor he de 26′.

22 A declinaçaõ media de todo o anno somma de 2920 observaçóes he de 6° 34′. Parece constante ir sendo a declinaçaõ da Agulha menor neste Meridiano.

23 Foi a declinaçaõ media da manhã 6° 35′ 4″: ao meio dia 6° 34′ 58″: da tarde 6° 34′ 26″.

Eis-aquí agora as variedades da athmosfera desde 18 de Abril de 1784, até 18 de Abril de 1785, na Ilha da Trindade situada na Latitude Austral de 20° 30′: e na Longitude approximada de 348° 25′ contados da Ponta mais Occidental da Ilha do Ferro, a qual Ilha nós povoámos no principio do anno de 1783.

Dias nublados 270; cobertos 76; variaveis 25; chuvosos 124; e por consequencia nem hum só dia houve claro.

Na noite do 1.° de Março de 1785 sentíraõ-se dous tremores de terra, com direcçaõ segundo pareceu do Occidente para o Oriente; o 1.° ás 9^{h}; e o 2.° mais sensivel ás 9^{h} 20′: ambos instantaneos.

No dia 26 do mesmo mez de Março pela tarde descarregou-se sobre a Ilha huma tromba d'agoa.

Estas observaçóes communicou-m'as hum Official de Artilheria d'esta Praça, que esteve de guarniçaõ nesta Ilha todo este tempo.

Observações dos Eclipses dos Satellites de Jupiter, feitas com hum Oculo achromatico de Dolond de 17 pollegadas de foco, que augmenta os objectos quasi 70 vezes.

Anno 1785		Satel-lites.	Tempo verda-deiro. H. M. S.		Circunstancias das Observações.
Abril.	25	3.°	16 42 58	Im.	Ceo sereno.
Maio.	26	2.°	15 26 12	Im.	Ceo muito sereno, as faxas do Planeta visiveis: havia Luar claro.
	28	1.°	16 9 51	Im.	Idem.
	31	3.°	15 33 52	Em.	Ceo muito sereno.
Junho.	4	1.°	18 2 6	Im.	. . . . pouco sereno.
	13	1.°	14 23 2	Im.	. . . . muito sereno.
Julho.	6	1.°	14 27 40	Im.	. . . . pouco sereno.
	13	3.°	15 24 28	Em.	. . . . muito sereno.
	13	1.°	16 20 31	Im.	Idem.
	20	3.°	16 47 46	Im.	Ceo sereno.
	20	1.°	18 13 35	Im.	Idem.
Agosto.	5	1.°	16 30 11	Im.	Ceo muito sereno, as faxas do Planeta bem distinctas.
	5	2.°	17 30 13	Im.	Idem.
	6	4.°	15 28 52	Im.	Idem.
	6	4.°	17 34 21	Em.	Idem.
	7	1.°	10 58 27	Im.	Ceo muito pouco sereno, as faxas do Planeta mal se percebiaõ.
	14	1.°	12 53 58	Im.	Ceo muito sereno, as faxas do Planeta visiveis.
	21	1.°	14 49 20	Im.	Idem.
	23	4.°	11 43 19	Em.	Idem.
	23	2.°	12 8 24	Im.	Idem.
	25	3.°	12 58 11	Im.	Idem.
	25	3.°	15 26 37	Em.	Idem.
	28	1.°	16 44 54	Im.	Idem.
Setembro.	1	3.°	16 59 34	Im.	Ceo pouco sereno.
	6	1.°	13 10 9	Im.	Idem.
	13	1.°	15 6 55	Im.	Ceo muito sereno, as faxas do Planeta percebiaõ-se perfeitamente.
	22	1.°	11 32 47	Im.	Idem.

Anno

Anno 1785		Satellites.	Tempo verdadeiro. H. M. S.	Circunſtancias das Obſervações.
Outubro.	1	1.°	7 58 33 Im.	Ceo ſereno. O Satellite muito proximo do Planeta. Duvidoſa.
	10	1.°	6 35 15 Em.	Ceo pouco ſereno, e forte crepuſculo.
	12	2.°	9 19 46 Em.	Ceo pouco ſereno, as faxas do Planeta naõ ſe diviſavaõ. Duvidoſa.
	26	2.°	14 35 16 Em.	Ceo muito ſereno, as faxas do Planeta bellamente viſiveis.
Novembro.	5	3.°	7 46 56 Em.	Ceo ſereno.
Dezembro.	2	1.°	8 57 34 Em.	Ceo pouco ſereno. Duvidoſa.
	25	1.°	9 2 56 Em.	Ceo ſereno.
	25	3.°	9 33 45 Im.	Ceo pouco ſereno.

O tempo verdadeiro d'eſtas obſervações, e de todas as dos outros annos paſſados, he determinado pelas alturas correſpondentes, tomadas tres dias conſecutivos: a ſaber, antes do dia da obſervaçaõ, no dia da obſervaçaõ, e no dia depois da obſervaçaõ. A Pendula he excellente, porém ella padece alterações bem ſenſiveis, por cauſa da continua variedade da athmosfera, pelo que pertence ao calor; influindo muito na dilataçaõ dos metaes.

Naõ tendo eu eſte anno de 1785, outras Ephemerides por onde me guiaſſe nas meſmas obſervações, mais do que o *Connoiſſance des temps*; e vendo que no ſeu annuncio do Eclipſe do Sol a 9 de Fevereiro, ſó o fazia viſivel na Africa, e Aſia; procurei ſaber ſe tambem o ſeria neſte Meridiano; e com effeito depois de ſe ter calculado graficamente com toda a exactidaõ, achou-ſe ſer tambem aqui viſivel.

Eis-aqui a ſua determinaçaõ.

Principio do Eclipſe do Sol a 9 de Fevereiro ás 7^h 0′ da manhã.

Meio . . . . ás 8^h 10′ da . . .

Fim . . . . ás 9^h 26′ da . . .

Grandeza . . . . 10^d 40′

Eu me diſpuz a obſervar eſte Eclipſe ao Oculo do Quadrante, ſeguindo o conſelho de Mr. de la Lande §. 2485: cujas obſervações ſaõ as ſeguintes.

Obſer-

Observações do Eclipse do Sol no dia 9 de Fevereiro de 1785.

Tempo verdadeiro. H.	M.	S.	
			O principio do Eclipse naõ foi visto, por estar o Ceo com huma espessa nevoa.
7	40	47	Passagem do limbo precedente do Sol ao fio vertical do oculo do Quadrante.
7	42	0	. . . . . da 1.ª ponta da Lua ao fio horizontal.
7	42	10	. . . . . da 1.ª ponta da Lua ao fio vertical.
7	42	53	. . . . . do limbo superior do Sol ao fio horizontal.
7	47	46	Principio da Immersaõ de huma grande mancha do Sol.
7	48	0	Passagem do limbo seguinte da Lua ao fio vertical.
7	48	0	. . . . . da 2.ª ponta da Lua ao fio horizontal.
7	48	24	Immersaõ total da mancha do Sol.
7	52	0	Passagem do limbo precedente do Sol ao fio vertical.
7	52	22	. . . . . da 1.ª ponta da Lua ao horizontal.
7	53	12	. . . . . do limbo precedente da Lua ao vertical.
7	54	31	. . . . . do limbo inferior do Sol ao horizontal.
7	58	4	. . . . . do limbo seguinte do Sol ao vertical.
7	58	4	. . . . . da 2.ª ponta da Lua ao vertical.
7	58	57	. . . . . do limbo precedente do Sol ao vertical.
7	59	27	. . . . . da 1.ª ponta da Lua ao vertical.
8	0	5	. . . . . do limbo precedente da Lua ao vertical.
8	1	30	. . . . . do limbo superior da Lua ao horizontal.
8	1	41	. . . . . do limbo superior do Sol ao horizontal.
8	18	12	. . . . . do limbo precedente do Sol ao vertical.
8	18	45	. . . . . do limbo superior da Lua ao horizontal.
8	19	0	. . . . . da 1.ª ponta da Lua ao horizontal.
8	19	25	. . . . . da 2.ª ponta da Lua ao vertical.
8	20	32	. . . . . do limbo precedente do Sol ao vertical.
8	21	12	. . . . . do limbo inferior do Sol ao horizontal.
8	21	25	. . . . . do limbo precedente da Lua ao vertical.
8	23	27	. . . . . do limbo precedente do Sol ao vertical.
8	23	47	. . . . . do limbo inferior do Sol ao horizontal.
8	24	16	. . . . . do limbo inferior da Lua ao horizontal.
8	24	22	. . . . . do limbo precedente da Lua ao vertical.

Naõ se observou o fim do Eclipse, porque o Ceo tornou a cubrir-se de nevoa espessa, como no principio.

Todos os limbos, de que observei as passagens verticaes, e horizontaes, saõ apparentes, porque o oculo do Quadrante inverte os objectos.

De-

Determinação da differença de Longitude de Lisboa ao Rio de Janeiro, pelas Observações correspondentes dos Satellites de Jupiter, e Eclipse da Lua.

Anno 1781.	Observações feitas no Rio de Janeiro.	Observações feitas ou reduzidas em Lisboa.	Differença em tempo entre os dous Meridianos.	
	Tempo verdadeiro.			
	H. M. S.	H. M. S.	H. M. S.	
Agosto 17	6 4 20	8 20 59	2 16 39	Emersaõ do 1.° Satellite.
20	6 36 20	8 52 33	2 16 13	Emers. do 1.° Sat.
1782.				Immersaõ do 1.° Satel.
Março 17	12 49 2	15 5 9	2 16 7	
Maio 25	13 27 29	15 44 5	2 16 36	Immers. do 1.° Satel. Observaçaõ reduzida à de 18 em Lisboa.
Julho 3	14 0 50	16 17 40	2 16 50	Emers. do 1.° Satel. Observaçaõ reduzida à de 5 em Lisboa.
28	8 41 40	10 58 32	2 16 52	Emers. do 1.° Satel.
Agosto 13	7 3 48	9 20 10	2 16 22	Emers. do 1.° Satel.
1784.				
Março 6	11 22 5	13 38 49	2 16 44	Principio do Eclipse da Lua.
6	13 48 0	16 4 19	2 16 19	Fim do Eclipse da Lua.
Junho 17	12 39 14	14 55 13	2 15 59	Immers. do 1.° Satel.
Julho 3	10 51 13	13 7 41	2 16 28	Immers. do 1.° Satel.
1785.				
Junho 4	18 2 6	20 18 31	2 16 25	Immers. do 1.° Satel. Observaçaõ reduzida à de 6 em Lisboa.
Julho 20	18 13 35	20 29 56	2 16 21	Immers. do 1.° Satel. Oservaçaõ reduzida à de 22 de Lisboa.
Agosto 7	10 58 27	13 15 20	2 16 53	Immers. do 1.° Satel.
14	12 53 58	15 10 4	2 16 6	Immers. do 1.° Satel.
21	14 49 20	17 5 37	2 16 17	Immers. do 1.° Satel. Observaçaõ reduzida à de 23 de Lisboa.
23	12 8 24	14 25 5	2 16 41	Immers. do 2.° Satel.
			H. M. S. T.	
			2 16 27 16	Differença media dos meridianos de Lisboa, e Rio de Janeiro.

NOTA.

Todas as Obſervações de Lisboa foraõ feitas pelos Senhores Ciera pai, e filho. Entre muitas, que eſtes Senhores nos remettêraõ, achei correſpondentes ás minhas, como ſe vê na Taboa preſente.

Como naõ tenho correſpondente á minha Obſervaçaõ de 25 de Maio de 1782; eu empreguei a Obſervaçaõ feita em Lisboa a 18 do meſmo mez, accreſcentando-lhe quatro revoluções do 1.° Satellite, conforme as Taboas $7^d, 1^h, 54', 24''$ (Aſtron. de la Lande), que dá a Obſervaçaõ em Lisboa a 25 de Maio ás $15^h, 44', 5''$ correſpondentes á do Rio de Janeiro.

Igualmente naõ achei correſpondente á minha Obſervaçaõ de 3 de Julho de 1782; pelo que vali-me da feita em Lisboa a 5 do meſmo mez, diminuindo-lhe huma revoluçaõ do 1.° Satellite tirada das meſmas Taboas $1^d, 18^h, 28', 36''$, de que reſulta a Obſervaçaõ em Lisboa a 3 de Julho ás $16^h, 17', 40''$ correſpondente á do Rio de Janeiro feita no meſmo dia.

O meſmo ſuccedeo ás outras minhas Obſervações de 4 de Junho, 20 de Julho, e 21 de Agoſto de 1785: pelo que tomei as feitas em Lisboa a 6 de Junho, 22 de Julho, e 23 de Agoſto de 1785; e diminuindo-lhes em cada Obſervaçaõ huma revoluçaõ do 1.° Satellite, por eſte artificio ficáraõ ſendo correſpondentes ás minhas.

Eu faço uſo deſtas Obſervações reduzidas, bem perſuadido que hum número grande de factos, dá huma maior quantidade de relações, e ſegura ſummamente as conſequencias.

Se algum dia chegarem á minha maõ mais algumas Obſervações feitas no noſſo Meridiano de Lisboa, ou em outro qualquer, naõ duvido fazer nova combinaçaõ: por agora devo ſeguir o reſultado, que eſtas me appreſentaõ.

DIA-

DIARIO METEOROLOGICO.

JANEIRO de 1785.

Dias do mez.	Vent. domin. manh.	Vent. domin. tarde.	Thermometro. manh.	Thermometro. meio dia.	Thermometro. tarde.	Quantidade de chuva.	Quantidade de vapor.	Eſtado do Ceo.
						Linh.	Linh.	
1	N.	S. O.	77°,66	80°.	79°.	7	.	Coberto, chuva, e trovões.
2	Var.	S. E.	77,33	79.	79,87	.	1,5	Variavel.
3	Var.	S. E.	75,16	78.	80,75	.	2	Var., e trovões de noite.
4	N. O.	S. E.	79,41	82.	81,94	0,3	0,5	Nub., trovões, e chuva.
5	N. O.	S. E.	79,83	80.	79.	0,25	0,5	Cob., nev. com ſeu orvalho.
6	N. O.	S. E.	77.	78,5	80,12	5	.	Cob., nev. de manhã, de tarde chuva.
7	Var.	S. E.	78,16	80.	80,25	.	1,5	Var., e nev. de manhã.
8	Var.	S. E.	77.	79,5	80,62	0,25	0,5	Nub., orv., e relamp. O mar algum tanto luminoſo.
9	N. O.	S. E.	78,33	81.	80.	0,17	0,8	Nub., trovões, e orv.
10	S.	S. E.	77,66	78,5	80.	0,17	0,5	Var., orv., e relamp.
11	Var.	S. E.	79,41	82.	80,4	27	.	Var., trovões, e chuva.
12	O.	S. E.	75,75	77,5	76,12	7	.	Cob., e chuva. Mar muito luminoſo.
13	Var.	S. E.	74,33	75,5	77,75	0,2	1	Cob., e orv.
14	N. O.	S. E.	77,66	82.	86.	.	2,5	Nub., nev., e relampagos.
15	Var.	S. E.	81,33	85.	85,4	.	3	Nub., e relampagos.
16	N. O.	S. E.	80,16	84,5	87,4	.	5	Var., e relampagos.
17	Var.	Var.	82,83	84,5	84,12	4	.	Var., trov., e chuva.
18	Var.	S. E.	79,33	80.	80,75	5	.	Idem.
19	Var.	S. E.	78,16	81.	82,75	.	1,5	Nub.
20	Var.	S. E.	78,83	83.	84.	.	5	Idem.
21	Var.	Var.	81,5	85.	82,5	0,2	1,8	Var., e algum orv.
22	Var.	S. E.	80,33	83.	87,62	.	5	Nub. Luz-Zodiacal ás 3h da manhã, á noite relampag.
23	N. O.	S. E.	81,5	86.	86.	.	4	Nub.
24	Var.	S. E.	81,83	84.	84,37	.	2	Idem.
25	Var.	S. E.	80,16	82,5	84,62	.	3	Sereno.
26	N. O.	S. E.	80,25	82,5	85,4	.	4,5	Idem.
27	N.	S. E.	81,5	85.	86.	.	2	Var. De noite o Ceo algum tanto avermelhado. O Mar hum pouco luminoſo.
28	Var.	Var.	80,66	83.	83,62	.	2,8	Nub., e relampagos. Mar luminoſo.
29	N. O.	S. E.	79.	82.	83,4	.	4	Nub., e relampagos.
30	Var.	S. E.	79,16	84.	86,12	.	3	Nub. Mar muito luminoſo.
31	Var.	S. E.	81,16	84,5	88,31		5	Sereno.

DIA-

DIARIO METEOROLOGICO.

FEVEREIRO de 1785.

Dias do mez.	Vent. domin. manh.	Vent. domin. tarde.	Thermometro. manh.	Thermometro. meio dia.	Thermometro. tarde.	Quantidade de chuva.	Quantidade de vapor.	Eſtado do Ceo.
						Linh.	Linh.	
1	Var.	Var.	82°,83	86.°	87.°	0,3	3,5	Var., trovões, e chuva. O mar luminoſo.
2	N. E.	S. E.	81.	85.	84,25	0,25	4,6	Var., trovões, e algum orv.
3	N. O.	S. E.	79,16	81,5	80,9	7	.	Cob., e chuva.
4	Var.	S. E.	76,66	77,5	78,02	0,2	1	Cob., nevoa, e orvalho.
5	N. O.	S.	77,16	79,5	80.	.	1	Cob., e nevoa.
6	Var.	O.	78.	79,5	81,25	2	.	Cob., nevoa de manhã, de tarde chuva.
7	Var.	Var.	79,5	82.	82,9	.	3	Var., nevoa, e trovoada.
8	L.	S. O.	79,83	80,5	80,75	0,3	1,5	Var., nev. com ſeu orvalho.
9	N. O.	N. O.	79,16	81,5	82.	.	4,5	Nub., nev., e relampagos.
10	N. O.	S. E.	78,5	80.	81,6	4	.	Var., nev., depois trovões, e chuva.
11	S. E.	S. E.	78,5	80.	80,5	4	.	Idem.
12	N. O.	Var.	76,83	78.	78.	4	.	Cob., nevoa de manhã, depois chuva.
13	N. O.	S. E.	76.	76.	76,4	6	.	Idem.
14	N.	S. E.	75,16	77.	78,6	.	1	Nub., e nev. de manhã.
15	Var.	S. E.	77,33	81.	81,75	0,2	0,5	Var., nev., e orv. Neſte dia appareceo hum fenomeno, que deſcreverei em outra parte.
16	N. O.	S. E.	78.	80,5	82,25	.	2	Nub. A Lua com ſua corôa amarela.
17	N. O.	S. E.	78.	80,5	82.	.	2	Cob.
18	N. O.	S. E.	77,5	80,5	82,75	.	2,5	Ser.
19	N. O.	S. E.	79.	82.	84.	.	4	Ser. De noite relampagos.
20	N. O.	N.	80.	83.	83.	0,25	0,8	Var. com ſeu orv.
21	N. O.	Var.	77.	78.	79,4	2	.	Var., e chuva.
22	N. O.	S. E.	79,5	83,5	83,25	.	1,5	Nub. A Lua com corôa branc.
23	N. O.	S. E.	79.	81,5	82,75	.	2	Var.
24	N. O.	Var.	80.	83,5	83,75	.	3,5	Ser. De noite relampagos.
25	N. O.	S. O.	80,41	84.	83.	.	4	Nub. De tarde trovoada.
26	N. O.	Var.	78,33	81.	80,9	9	.	Cob., nev., e chuva. O mar muito levantado.
27	S. O.	S. O.	78,33	78,5	78.	13	.	Cob., e chuva.
28	Var.	S. O.	77.	78,5	78,6	18	.	Nub., e chuva.

DIA-

DIARIO METEOROLOGICO.

MARÇO de 1785.

Dias do mez.	Vent. domin. manh.	Vent. domin. tarde.	Thermometro. manh.	Thermometro. meio dia.	Thermometro. tarde.	Quantidade de chuva.	Quantidade de vapor.	Estado do Ceo.
						Linh.	Linh.	
1	Var.	S. E.	76°,5	77°,5	78°.	0,17	0,5	Cob., orvalho.
2	Var.	S. E.	77.	79,5	80,25	.	3	Nub.
3	N. O.	S. E.	77,8	80.	79,25	0,25	0,4	Var., orv., e relampagos.
4	N. O.	S. E.	76,83	79.	80.	3	0,3	Var., chuv., e relampagos.
5	Var.	S.	78,66	80,5	81 25	4 .	.	Var., chuva, e trovões.
6	O.	S.	77,5	78	79,5	.	1	Cob., e relampagos.
7	N. O.	S. E.	77,83	80,5	80.	.	2	Var., e relampagos.
8	Var.	S. E.	77,83	80.	80.	1	.	Var., chuva, e relampagos.
9	Var.	S. E.	76,66	79.	79,61	2	.	Idem.
10	Var.	S. E.	76,5	78.	78,87	2,5	.	Idem.
11	N. O.	S. E.	75,5	76.	77,75	10	.	Idem.
12	N. O.	O.	76,5	77.	76,4	47	.	Cob., e chuva.
13	Var.	S. E.	75.	75,5	75.	5,5	.	Idem.
14	Var.	Var.	73,33	75.	74.	7	.	Nub., e chuva.
15	Var.	S.	74,5	75,5	74.	3	.	Cob., e chuva.
16	Var.	Var.	71,66	74.	74,1	2	.	Var., e chuva.
17	Var.	L.	70,83	73,5	73,5	2,5	.	Idem.
18	Var.	S. E.	73.	73,5	74.	1	.	Idem.
19	Var.	S. O.	71,33	72,5	72,4	0,5	.	Cob., e chuva.
20	N. O.	S. E.	72,5	73.	73,25	2,5	.	Nub., e chuva.
21	N. O.	S. O.	73,66	74.	75.	1	.	Cob., e chuva.
22	S.	S.	73,5	75.	74,5	1,5	.	Idem.
23	L.	S.	73,66	75,5	76.	0,5	.	Nub., e chuva.
24	S. E.	S. E.	75,33	76.	76.	0,25	.	Var., e chuva.
25	Var.	S. E.	74,33	75.	75,5	0,33	0,2	Idem.
26	Var.	S. E.	75.	76,5	77,5	.	0,8	Nub.
27	N. O.	S. E.	75,33	77,5	78.	.	1	Idem.
28	N. O.	S. E.	77,5	79,5	79,75	.	1,5	Nub., nev., e relampagos.
29	Var.	S. O.	77,66	79.	77,75	1	.	Var., nev., e chuva.
30	Var.	S. E.	76,16	78.	77,9	49	.	Var., trovoada, e chuva.
31	S. E.	S. E.	76,66	77,5	78, 4	.	0,8	Nub., e relampagos.

DIARIO METEOROLOGICO.

ABRIL de 1785.

Dias do mez.	Vent. domin.		Thermometro.			Quantidade de chuva.	Quantidade de vapor.	Eſtado do Ceo.
	manh.	tarde.	manh.	meio dia.	tarde.	Linh.	Linh.	
1	N. O.	S. E.	76°,5	78°.	78°.	.	1	Nub., nev., e relampagos.
2	L.	S. O.	76,16	76,5	75.	18	.	Cob., e chuva.
3	L.	S.	72,16	72,5	72,75	4	.	Gob., nevoa, e chuva.
4	N. O.	S. E.	72,33	74,5	75,12	0,13	.	Var., e chuva.
5	Var.	N.	75,33	78.	81,75	.	0,3	Nub.
6	Var.	S.	78,5	81.	80.	24	1,5	Nub. De noite chuva.
7	L.	S. O.	76,16	77.	77.	10	.	Var., e chuva.
8	O.	S.	72.	73.	74.	3,5	.	Idem.
9	Var.	S. E.	73,16	75.	76.	2,5	.	Idem.
10	Var.	Var.	73,33	74,5	74,62	.	0,5	Nub.
11	N. O.	S. E.	72,16	74.	75,5	.	0,5	Nub., e nevoa.
12	N. O.	S. E.	72,66	74.	76,25	.	0,8	Idem.
13	N. O.	S. E.	73,83	77.	78,62	.	1	Ser.
14	N. O.	S. E.	75,16	78,5	80,25	.	0,8	Ser., nev., e relamp.
15	N.	N.	76,33	77.	78,5	.	1	Var. Luz Zodiacal mui radiante ás $7^h \frac{1}{4}$ da noite.
16	L.	S. E.	75,5	78.	79,75	.	1	Ser. Luz Zodiacal ás 7^h da noite.
17	Var.	S. E.	76,5	80.	82,4	.	1,5	Ser., e nevoa.
18	N. O.	Var.	77,66	81,5	84,15	.	0,8	Ser.
19	N. O.	S. E.	79.	81.	83,15	.	0,7	Var., e relampagos.
20	O.	S.	77,66	81.	80,15	0,25	1	Var., relamp., e chuva.
21	N. O.	S. E.	75,66	78.	79.	.	0,9	Var.
22	N. O.	S. E.	77,33	79.	81.	.	0,5	Var., e relampagos.
23	Var.	S. E.	76,5	78.	79,75	.	2	Var., e nevoa.
24	N.	S. E.	75,33	77,5	79,75	.	1	Idem.
25	N. O.	S. E.	73,66	77,5	79,5	.	0,8	Ser.
26	N. O.	S. E.	74,5	77,5	79,75	.	0,5	Idem.
27	N. O.	S. E.	76,15	79.	81,25	.	0,8	Ser., e nevoa.
28	N. O.	S. O.	77.	80.	78,4	12	.	Var., e chuva.
29	S. O.	S. E.	69,83	71.	71,25	0,25	0,3	Idem.
30	N. O.	S. E.	66,83	69.	71,4	.	0,4	Nub.

DIA-

DIARIO METEOROLOGICO.

MAIO de 1785.

Dias do mez.	Vent. domin.		Thermometro.			Quantidade de chuva.	Quantidade de vapor.	Estado do Ceo.
	manh.	tarde.	manh.	meio dia.	tarde.			
						Linh.	Linh.	
1	N.	S. E.	69°,66	72.°	74.°	.	0,5	Nub., e nevoa.
2	N. O.	Var.	70,5	74.	75.	.	0,4	Var.
3	Var.	S. E.	72.	72.	73.	0,17	.	Cob., e orvalho.
4	N. O.	S. E.	70.	70,5	72,75	.	0,4	Var.
5	N. O.	S. E.	69,5	71.	73.	.	0,5	Nub.
6	Var.	S. E.	68,16	71.	73,25	.	0,6	Nub., e nevoa.
7	N. O.	S. E.	70,5	73.	75.	.	1	Ser., e nevoa.
8	N. O.	Var.	72,66	75,5	77,6	.	1	Nub., e nevoa.
9	Var.	Var.	74,33	77.	75,6	2	.	Cob., e chuva.
10	Var.	Var.	72,66	71,5	71.	12	.	Idem.
11	S. O.	S. E.	68,5	69.	70,5	4	.	Var., e chuva.
12	N. O.	S. E.	69,33	70,5	73.	3	.	Var., nevoa, e chuva.
13	N. O.	N. O.	70.	69,5	69,6	4	.	Cob.
14	N. O.	S. E.	67,33	69.	70,75	.	0,3	Var.
15	N. O.	S. E.	66,83	68,5	69,25	0,13	0,2	Nub., nev. com seu orvalho.
16	N. O.	S. E.	68,33	70.	71,75	.	0,5	Var.
17	N. O.	S. E.	66,5	69.	71,5	.	0,5	Ser., e nevoa.
18	N. O.	S. E.	68,5	70.	72,5	.	0,25	Ser. A Lua no principio da noite com sua coroa amarella, e depois branca.
19	Var.	Var.	68,66	73.	73,63	.	0,5	Nub., e nev. A Lua com coroa branca.
20	N. O.	N.	68.	71.	73,5	.	0,8	Nub., e nevoa.
21	Var.	S. E.	68.	70,5	73.	.	0,5	Ser., e nevoa.
22	Var.	S. E.	68.	70,5	73,5	.	0,8	Ser.
23	O.	S. E.	68.	70,5	75,62	.	0,5	Ser., e nevoa.
24	Var.	S. E.	70.	72.	75.	.	1	Idem.
25	N.	Var.	72,5	73,5	76.	.	1	Var., e nevoa.
26	N. E.	S. E.	72,5	73.	76.	.	0,4	Ser., e nevoa.
27	N.	S. E.	71,5	72,5	73,6	.	0,5	Ser.
28	Var.	Var.	69,16	70,5	74,5	.	0,4	Ser., e nevoa.
29	N. O.	S. E.	68.	70,5	73.	.	0,4	Ser.
30	N.	S. E.	67,5	69,5	72.	.	0,6	Ser., e nevoa.
31	Var.	S. E.	67.	69.	72.	.	0,5	Idem.

DIA-

DIARIO METEOROLOGICO.

JUNHO de 1785.

Dias do mez.	Vent. domin.		Thermometro.			Quantidade de chuva.	Quantidade de vapor.	Eſtado do Ceo.
	manh.	tarde.	manh.	meio dia.	tarde.			
			°	°	°	Linh.	Linh.	
1	Var.	Var.	69,33	69,5	71.	1,5	.	Var., nevoa, e chuva.
2	Var.	Var.	69,5	71.	71,62	.	0,4	Var., e nevoa.
3	N.	S. E.	70.	72.	74.	.	2	Idem.
4	O.	N.	70.	71,5	73,75	.	0,4	Sereno.
5	Var.	S. O.	69,66	71,5	72.	.	0,2	Var., e nev. Luz-Zodiacal mui reſplandecente, ás $5^h \frac{1}{2}$ da manhã.
6	Var.	S. E.	69,16	70.	71.	:	0,2	Var.
7	Var.	S. E.	68,16	69,5	70,75	.	0,3	Ser., e nevoa.
8	S. O.	S. E.	66,83	69.	71,4	.	0,2	Ser. Luz-Zodiacal ás $4^h \frac{1}{4}$ da manhã.
9	N. O.	S. E.	67.	67,5	70,4	:	0,3	Ser., e nevoa.
10	N. O.	S. E.	67.	68.	71.	.	0,25	Idem.
11	Var.	S. E.	62,66	69.	72,6	.	0,35	Idem.
12	N. O.	S. E.	68,5	70.	72,4	.	0,18	Idem.
13	N. O.	S. E.	68.	70.	72,4	.	0,26	Idem.
14	N. O.	Var.	65,66	70.	74,62	.	0,3	Idem.
15	Var.	N. O.	72,33	76,5	79,5	.	1	Nub., e relampagos.
16	N. O.	S.	74,16	73,75	76,62	0,13	0,5	Var., orv., e relamp.
17	Var.	S. E.	69.	72.	71,12	.	0,4	Ser., e nevoa.
18	Var.	N. O.	74.	76.	81,25	.	1,6	Var., e relampagos.
19	N. O.	Var.	73.	76.	80,25	.	0,8	Var.
20	N. O.	S. O.	72,83	75.	76,88	1	.	Var., trovoada, e chuva.
21	S.	Var.	71,66	71.	69,9	2	.	Cob., nev., e chuveiros.
22	Var.	S. E.	65,66	65.	66.	4	.	Cob., e chuva.
23	O.	S. E.	60.	64.	66.	.	0,4	Nub.
24	N. O.	S. E.	59.	60.	61,25	.	0,2	Nub., e nevoa.
25	Var.	Var.	58,91	64.	66,75	.·	0,2	Ser., e nevoa.
26	Var.	S. E.	63,66	65.	61.	2,5	.	Cob., nevoa, e chuva.
27	O.	O.	57.	60,5	60,12	2	.	Var., e chuveiros.
28	N. O.	S. E.	60.	62,5	63,25	.	0,2	Var.
29	Var.	N. E.	57,66	62.	60,25	2	.	Ser., e chuva de noite.
30	Var.	S.	56,8	61.	59,4	4	.	Var., e chuveiros.

DIARIO METEOROLOGICO.

JULHO de 1785.

Dias do mez.	Vent. domin. manh.	Vent. domin. tarde.	Thermometro. manh.	Thermometro. meio dia.	Thermometro. tarde.	Quantidade de chuva.	Quantidade de vapor.	Estado do Ceo.
						Linh.	Linh.	
1	Var.	S.	56°,8	60°.	62°.	0,5	.	Var., e chuva.
2	N. O.	S. E.	58,16	62.	63,6	.	0,2	Ser., e nevoa.
3	N. O.	S. E.	55,91	60.	62,75	.	0,3	Idem.
4	Var.	Var.	62.	65.	62,75	1,5	.	Cob., e chuva.
5	N. O.	S. E.	61,33	62.	62.	1	.	Idem.
6	N. O.	S. E.	61,5	64.	65,87	1,5	.	Nub., e chuva.
7	N. O.	S. E.	62.	65.	65,75	.	0,3	Nub., e nevoa.
8	N. O.	S. E.	62,33	66.	68,25	.	0,3	Idem.
9	N. O.	S. E.	66.	67.	69,5	.	0,2	Var.
10	N. O.	S. E.	66,66	69,5	70,12	.	0,5	Ser.
11	N. O.	S. E.	62,83	66,5	69,25	.	0,5	Nub., e nevoa.
12	S. O.	S. E.	65.	67.	66,5	0,14	0,6	Var., e nevoa com seu orv.
13	N. O.	S. E.	64,66	67,5	70,25	.	0,3	Nub., e nevoa. A Lua com duas corôas na mesma noite.
14	N. O.	S. E.	63.	67,5	70.	.	0,4	Ser.
15	Var.	S. E.	65,66	68.	70.	.	0,5	Nub., e nevoa.
16	N. O.	S. E.	66.	68.	69,75	.	0,5	Idem.
17	Var.	S. E.	67.	69.	74,62	.	0,8	Var.; e nevoa.
18	N.	S. O.	70,66	71.	71,12	.	0,7	Sereno.
19	N. O.	S. E.	67.	68,5	70.	.	0,3	Nub., e nevoa.
20	Var.	S. E.	62.	67,5	70,62	.	0,5	Idem.
21	N. O.	S. E.	68.	72.	72,5	.	0,5	Nub., e nevoa.
22	N. O.	S. O.	68,5	73,5	78,25	.	0,8	Idem.
23	Var.	S. O.	71,33	71.	68,75	0,2	.	Cob., e orvalho.
24	Var.	L.	67.	69.	69,75	.	0,3	Var.
25	N. O.	S. E.	66,83	69.	72,5	.	0,6	Nub.; e nevoa.
26	N. O.	S. E.	70,16	71.	74,5	.	0,8	Ser., e nevoa.
27	N. O.	S. E.	70,83	72.	75,25	.	0,7	Idem.
28	N. O.	S. E.	72.	74,5	76,5	.	0,8	Ser.
29	N. O.	S. E.	70.	72.	73,25	.	0,8	Ser., e nevoa.
30	N. O.	S. E.	69.	71.	73,5	.	0,6	Idem.
31	N. O.	S. E.	69,5	72.	75,5	.	0,8	Ser. Luz-Zodiacal pouco luminosa ás 8^h, e 10′ da noit.

DIARIO METEOROLOGICO.

AGOSTO de 1785.

Dias do mez.	Vent. domin.		Thermometro.			Quantidade de chuva.	Quantidade de vapor.	Estado do Ceo.
	manh.	tarde.	manh.	meio dia.	tarde.			
						Linh.	Linh.	
1	N. O.	N. O.	70°,83	74°.	77°,75	.	0,5	Ser.
2	N.	S. O.	72,66	75,5	75.	.	0,8	Var.
3	Var.	S. E.	70,66	73.	74,62	.	0,7	Var.
4	Var.	S. E.	72.	73,5	72,62	.	1	Nub., e nevoa.
5	N.	S. E.	70,33	71,5	74.	.	1,5	Idem.
6	N. O.	S. E.	68,5	70,5	72,87	.	0,8	Nub.
7	Var.	Var.	67,87	71.	74.	.	1,3	Ser.
8	N. O.	S.	71,16	73.	74,12	.	0,8	Nub.
9	Var.	Var.	68,83	72,5	74,37	.	1	Nub. A Lua com sua corôa.
10	N. O.	Var.	69.	74.	77.	.	1,5	Nub.
11	Var.	S. E.	73.	75,5	76,12	.	1,3	Nub.
12	Var.	S. O.	71,5	74.	74.	.	0,4	Var., nev., com seu orv.
13	O.	S.	70.	71.	71.	0,17	0,4	Var., e nevoa.
14	N. O.	Var.	68,83	71.	74,25	.	0,5	Ser.
15	Var.	S. E.	69,5	73.	77.	.	0,6	Var.
16	N. O.	N. O.	71.	74.	77,75	.	1	Ser., e nevoa. A Lua com sua corôa.
17	Var.	Var.	72,5	74,5	74.	.	0,5	Nub., e nevoa.
18	Var.	S. O.	71,66	71,5	72,75	0,33	0,1	Var., com seu orvalho.
19	L.	S. E.	70,5	73.	73,12	.	0,3	Var.
20	Var.	Var.	67,83	72.	75,5	.	0,4	Ser., e nevoa.
21	N. O.	N. O.	71,33	74.	76.	.	0,5	Idem. Aurora Aust. mui radiante começou ás 4^h $10'$, findou com a manhã.
22	Var.	S. E.	70,66	72.	73,62	.	0,3	Nub., e nevoa.
23	N. O.	S. E.	70,16	73.	73,25	.	0,5	Idem.
24	N. O.	S. E.	70,16	71,5	72,12	.	0,7	Ser., e nevoa.
25	Var.	S. E.	67,33	70.	71.	.	0,4	Idem.
26	N. O.	S. E.	67,66	69.	70,62	.	0,7	Idem.
27	N. O.	S. E.	66,66	69.	74,5	.	1	Ser.
28	Var.	S. E.	66,83	71,5	72.	.	0,8	Ser.
29	Var.	N.	67,16	72.	76,25	.	0,8	Ser., e nev. Aurora Austral summamente luminosa.
30	Var.	S. E.	69,83	74.	74,45	.	1	Nevoa todo o dia.
31	Var.	S.	72,16	74,5	76,25	.	1,3	Nev. todo o dia. Aur. Aust. mui incendiada.

DIA-

DIARIO METEOROLOGICO.

SETEMBRO de 1785.

Dias do mez.	Vent. domin. manh.	Vent. domin. tarde.	Thermometro. manh.	Thermometro. meio dia.	Thermometro. tarde.	Quantidade de chuva.	Quantidade de vapor.	Estado do Ceo.
						Linh.	Linh.	
1	N. O.	N. O.	73°,83	78°,5	82°,5	.	2,5	Nevoa todo o dia.
2	Var.	N. O.	74,33	77.	81,5	.	2,25	Nevoa todo o dia, de noite o Ceo avermelhado como ferro em braza.
3	N. O.	S.	76,83	78.	78.	.	1,8	Idem.
4	Var.	S. E.	74,16	75,5	74,25	.	2	Cob., e nevoa.
5	Var.	S. E.	71,5	74.	72,5	.	1,4	Var., e nevoa.
6	Var.	S. E.	72.	74,5	74,75	.	1	Nub., nev., e relamp. O Ceo todo incendiado.
7	N. O.	N. O.	73,33	75,5	78,37	.	1	Nub., e nev. O Ceo incendiado toda a noite. A Lua com sua corôa.
8	Var.	S. E.	74,83	78.	80,12	.	1,5	Nub., nev., e trov. O Ceo como no dia antecedente.
9	Var.	S. E.	77,16	82,5	80,75	0,2	1,3	Cob., e nev. De noite o Ceo muito incendiado; e depois trovões, e chuva.
10	S.	S. O.	74,33	73.	73,62	4	.	Cob., trov., e chuva: parte da noite esteve o Ceo incendiado.
11	S. E.	Var.	70,66	71,5	71,25	1,5	.	Cob., e chuva.
12	Var.	Var.	70,33	71.	69.	4,5	.	Idem.
13	Var.	Var.	66,66	69,5	69.	.	0,4	Var.
14	Var.	Var.	67,33	69,5	71,25	.	0,3	Var.
15	Var.	S.	69,5	71,5	71.	0,1	0,2	Var., com seu orvalho.
16	Var.	S. O.	70,16	71.	71.	3	.	Cob., e chuva.
17	N. O.	Var.	74.	78.	77,25	.	0,7	Nub. A Lua com sua corôa.
18	S. E.	S. E.	73,82	76,5	77,25	5	.	Var., trovoada, e chuva.
19	Var.	S.	72,83	74.	72,75	3	.	Idem.
20	S. O.	S.	67,83	70,5	70,75	.	0,6	Nub.
21	N.	L.	68,83	72.	70,25	.	0,4	Var.
22	Var.	Var.	69.	73.	74.	.	0,5	Nub.
23	N. O.	S. E.	67,83	72.	73,25	.	0,8	Ser. Luz Zodiacal ás 8^h $15'$ da noite.
24	N. O.	N. E.	69,16	74.	78,38	2,5	1,2	Nub. A athmosfera muito incendiada.
25	S. O.	S. O.	68,16	68.	65,75	2	.	Cob., e chuva.
26	Var.	S. E.	65.	67.	65,5	0,1	0,35	Cob., e orvalho.
27	Var.	S. E.	65,5	68.	67,12	1,5	.	Cob., e chuva.
28	N. O.	S.	67,16	71.	68,75	4,5	.	Cob., nevoa, e chuva.
29	N. E.	Var.	67,33	69,5	69,33	2	.	Var., e chuva.
30	N. E.	S. E.	67,66	71.	71.	.	0,5	Var.

DIA-

DIARIO METEOROLOGICO.

OUTUBRO de 1785.

Dias do mez.	Vent. domin.		Thermometro.			Quantidade de chuva.	Quantidade de vapor.	Estado do Ceo.
	manh.	tarde.	manh.	meio dia.	tarde.	Linh.	Linh.	
1	Var.	S. E.	69,33	72,5	73,75	.	0,8	Var. Luz-Zodiacal ás 7^h 40' da noite.
2	Var.	S. E.	71,73	74.	74,75	.	1	Nub.
3	N.	S. E.	71,5	73,5	74.	.	0,5	Nub.
4	Var.	S. E.	70,5	73.	73.	.	0,8	Nub.
5	Var.	S. E.	70,33	72,5	73,25	.	0,5	Var.
6	N.	S. E.	71,16	74,5	74,4	.	1,3	Ser.
7	Var.	S. E.	71,5	74,5	74,4	.	1,5	Var., e nevoa.
8	L.	S. E.	73.	75.	75,75	.	1,5	Nub., e nevoa.
9	S. O.	S. E.	71,5	72,5	74,12	0,1	1	Var., nev. com seu orvalho.
10	N. O	S. E.	70,66	75.	75.	.	1,3	Var.
11	N. O.	S. E.	73.	77.	77.	.	2	Var.
12	Var.	Var.	72,58	79.	81,12	.	2,4	Var.
13	N. O.	Var.	75.	80.	83.	4	2,8	Nub., trovões, e chuva.
14	Var.	S. E.	78,67	83.	82,75	.	2	Var., e relampagos. A Lua com sua coróa branca.
15	Var.	S. E.	77,33	79.	80,62	.	1,5	Nub., nev., e relampagos.
16	Var.	S.	77,92	79,5	78,75	0,2	1	Cob., e orvalho. A Lua com sua corôa branca.
17	Var.	S. E.	75.	76.	74,87	.	0,6	Var.
18	Var.	S.	71,5	73,5	71,75	4	.	Cob., e chuva.
19	Var.	S. E.	71,5	72.	69,5	0,5	.	Idem.
20	Var.	S. E.	69,16	73.	73,62	.	2	Var.
21	Var.	S. E.	71,66	74,5	75,25	.	3	Var.
22	Var.	S. E.	70,33	74.	71,66	.	3	Var., e nevoa.
23	Var.	S. E.	70,16	73.	73,67	0,1	1,5	Nub. com seu orvalho.
24	Var.	S. E.	71,33	75,5	77,75	01,	2,5	Var., trovões, e orvalho.
25	N. O.	Var.	73,16	75,75	74.	9,5	.	Nub., trovões, e chuva.
26	Var.	Var.	68,66	72.	73,06	.	2,5	Nub.
27	Var.	S. E.	68.	73.	74,87	.	1,75	Ser.
28	N. O.	S. E.	70.	74.	75,25	.	1	Ser.
29	Var.	S. E.	73,5	77.	77,87	5	0,5	Nub., nev., trovões, e chuva.
30	Var.	Var.	75,5	76.	77,5	4,5	.	Cob., e chuva.
31	Var.	S. E.	73,08	74.	71,37	5,25	.	Idem.

DIA-

DIARIO METEOROLOGICO.

NOVEMBRO de 1785.

Dias do mez.	Vent. domin.		Thermometro.			Quantidade de chuva.	Quantidade de vapor.	Eſtado do Ceo.
	manh.	tarde.	manh.	meio dia.	tarde.			
						Linh.	Linh.	
1	Var.	S. E.	71.°	74.°	74,87°	.	1	Nub.
2	Var.	S. E.	72.	76.	75,83	.	3	Var., e relampagos.
3	Var.	S. E.	74,83	77,5	77,87	.	3	Idem.
4	Var.	S. E.	75,5	80.	77,88	1	1	Var., trovões, e chuva.
5	S.	Var.	74,83	76,5	76,25	.	2	Var.
6	Var.	Var.	74,33	77,5	77,5	0,2	1,5	Var., trovões, e chuva.
7	Var.	S. O.	75,33	81.	77.	0,1	1	Nub., com miudo orvalho.
8	Var.	S. E.	73,5	75,5	74,37	0,05	3	Var., com miudo orvalho. Luz Zodiacal luzente ás 7ʰ 40′ da noite.
9	Var.	Var.	72,66	75.	74,87	:	2	Var.
10	Var.	S. E.	71,83	76.	79,12	.	1,25	Var. A Lua com corôa.
11	Var.	S. E.	75,16	76.	77.	4	.	Var., nevoa, e chuva.
12	Var.	N. O.	75.	75.	74,87	2,5	.	Cob., e chuva.
13	Var.	S. E.	74.	76.	75,25	1,5	.	Var., trovões, e chuva.
14	N. O.	N.	74,83	79.	80,25	0,5	.	Idem.
15	Var.	Var.	76,66	81.	80,87	5	2	Nub., trovões, e chuva.
16	Var.	S.	75,66	78.	77.	1	.	Cob., e chuva.
17	Var.	S.	76.	78,5	78.	.	2,25	Var.
18	Var.	S. E.	74,33	77,5	77.	.	2,4	Var., e relampagos.
19	Var.	S. E.	78.	82.	80,37	0,5	2,25	Var., trovões, e chuva.
20	Var.	S. O.	76,5	77.	73,5	0,2	1	Idem.
21	Var.	S. E.	71,08	75,5	76,12	.	1,8	Nub.
22	Var.	S. E.	72,33	76.	77,75	0,5	2	Var., trovões, e chuva.
23	Var.	S. E.	76.	80,5	80,37	0:25	3	Var., relamp., e chuva.
24	Var.	S. E.	76,83	79.	78,87	0,1	2,25	Var., com miudo orvalho.
25	S. E.	S. E.	76,66	80.	79,87	0,1	2	Idem.
26	N.	N.	76,66	78.	77,37	7,5	.	Cob., e chuva.
27	Var.	Var.	77,33	81,5	84,5	6,25	2,25	Var., trovões, e chuva.
28	Var.	S. O.	77,16	78.	75,5	16	.	Var., e chuva.
29	Var.	N. E.	74,08	76.	74,5	0,3	1	Cob., e orvalho.
30	S. E.	Var.	74,33	77.	75,75	0,4	1,5	Var., e orvalho.

DIARIO METEOROLOGICO.

DEZEMBRO de 1785.

Dias do mez.	Vent. domin.		Thermometro.			Quantidade de chuva.	Quantidade de vapor.	Eſtado do Ceo.
	manh.	tarde.	manh.	meio dia.	tarde.			
						Linh.	Lính.	
1	N. O.	S. E.	74°,66	78°.	78°,25	0,2	2,25	Var., e chuva.
2	Var.	Var.	75,66	78.	80,75	3	.	Var., trovões, e chuva.
3	Var.	S. E.	77,75	82.	78,12	3,4	.	Idem.
4	N. E.	S. E.	75,5	77.	76,94	0,5	1	Var., e ſeu orvalho.
5	N. E.	S. E.	75.	77,5	77,75	0,25	3	Nub., relamp., e chuva.
6	Var.	S. E.	76,33	80.	80,5	0,1	2,6	Var., e orv. muito miudo.
7	O.	S. E.	76,66	79,5	76,62	9	.	Cob., e chuva.
8	Var.	S.	74,66	76,5	75,25	.	2	Var.
9	N. O.	S. E.	74,33	78.	79,75	.	3	Nub., e trovões. A Lua com ſua corôa.
10	N. O.	S. E.	77.	80.	80,31	0,2	2,25	Nub., e orvalho.
11	Var.	S.	77,16	79.	78.	2	2,5	Var., e chuva.
12	N. O.	S. E.	75,33	79,5	78,37	.	1,5	Var.
13	Var.	S. E.	77,5	80.	80,25	.	1	Var.
14	N. O.	S.	78.	82.	81,25	.	1,8	Var., e relampagos.
15	Var.	S. E.	79.	83.	82,37	1	2	Nub., e chuva.
16	Var.	S. E.	79.	82.	81,25	8	1,3	Cob., trovões, e chuva.
17	L.	S. E.	77,16	79.	78,5	0,5	.	Cob., e chuva.
18	N. O.	S.	75,83	78.	77,87	0,75	.	Idem.
19	N. O.	Var.	76.	78.	76,88	4,5	.	Idem.
20	Var.	S.	75,66	75.	73,33	2,5	.	Idem.
21	Var.	S.	72.	76.	74,37	.	0,4	Var.
22	N. O.	Var.	73.	76,5	76,75	.	2	Var.
23	N.	S. E.	75,33	79.	80,5	.	2,25	Ser., e relampagos.
24	Var.	Var.	79.	83.	81,37	0,5	2,5	Var., nevoa, trovões, e chuva.
25	N. O.	S. E.	78,33	84,5	84,37	.	3	Nub., nevoa, e relamp.
26	Var.	S. E.	81,33	85.	85,75	.	3	Nub., e relampagos.
27	Var.	S. E.	81,33	86,25	88,12	.	4,4	Var., e relamp. O mar luminoſo.
28	Var.	S. O.	84,5	89,5	84,87	0,3	3	Var., com ſeu orvalho.
29	N. O.	S.	78,66	78.	76,25	1	.	Cob., e chuva.
30	N. O.	S. E.	74,66	77,5	76,75	.	1,3	Cob.
31	N. O.	S. E.	74,83	79.	81,87	.	1,5	Ser., e relampagos.

DIA-

DIARIO METEOROLOGICO.

JANEIRO de 1785.

Dias do mez	BAROMETRO. Manhá.	Meio dia.	Tarde.	Bussola.
	Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.	G. M. S.
1	28 2,26	28 2,8	28 2,32	6 34 47
2	28 1,43	28 1,3	28 1,5	6 33 47
3	28 1,61	28 0,9	28 0,85	6 36 25
4	28 1,1	28 0,65	28 0,81	6 36 18
5	28 1,61	28 1,7	28 1,47	6 35 6
6	28 1,41	28 1,5	28 1,8	6 36 40
7	28 1,97	28 1,9	28 1,97	6 36 0
8	28 1,73	28 1,4	28 0,9	6 35 28
9	28 0,03	27 11,7	27 11,8	6 34 45
10	27 11,65	27 11,6	27 11,02	6 34 50
11	27 11,33	27 11,6	27 11,75	6 36 37
12	28 1,7	28 2,2	28 2,65	6 34 2
13	28 2,75	28 3,1	28 2,47	6 35 0
14	28 2,93	28 2,5	28 2,2	6 34 2
15	28 2,76	28 2,6	28 1,92	6 35 28
16	28 1,51	28 1,3	28 0,92	6 34 16
17	28 1,51	28 2,25	28 2,17	6 34 40
18	28 2,16	28 3,1	28 2,72	6 34 20
19	28 3,03	28 2,6	28 1,77	6 31 13
20	28 2,3	28 1,3	28 0,98	6 31 0
21	28 1,48	28 1,25	28 1,37	6 30 0
22	28 2,2	28 2,2	28 1,77	6 35 15
23	28 3,15	28 2,9	28 2,82	6 32 35
24	28 3,33	28 3,4	28 3,05	6 34 0
25	28 3,32	28 3,1	28 2,6	6 32 25
26	28 3,4	28 3,3	28 2,7	6 32 40
27	28 3,23	28 3.	28 2,82	6 33 0
28	28 3,3	28 3,2	28 2,8	6 29 40
29	28 2,63	28 2,4	28 1,9	6 32 10
30	28 2,22	28 2.	28 1,75	6 31 53
31	28 2,05	28 2,1	28 1,45	6 31 51

FEVEREIRO de 1785.

Dias do mez.	BAROMETRO. Manhá.	Meio dia.	Tarde.	Bussola.
	Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.	G. M. S.
1	28 1,95	28 1,8	28 1,85	6 32 23
2	28 1,65	28 1,6	28 1,4	6 34 30
3	28 1,35	28 1,3	28 1,32	6 31 10
4	28 1,56	28 1,75	28 1,51	6 33 20
5	28 1,85	28 1,8	28 1,56	6 34 0
6	28 2,21	28 2,1	28 1,7	6 33 27
7	28 2,03	28 2.	28 1,81	6 34 12
8	28 2,58	28 2,6	28 2,37	6 31 55
9	28 3,1	28 3,6	28 3,15	6 32 0
10	28 3,1	28 2,6	28 2,75	6 34 25
11	28 2,8	28 2,2	28 1,85	6 32 18
12	28 1,35	28 1,4	28 1,02	6 34 20
13	28 1,6	28 1,8	28 0,97	6 34 53
14	28 1,33	28 1,4	28 1,07	6 37 40
15	28 1,8	28 1,8	28 1,72	6 3[illegible] 40
16	28 2,43	28 2,3	28 2.	6 33 2
17	28 2,5	28 2,6	28 1,95	6 32 0
18	28 2,98	28 2,6	28 2,37	6 34 48
19	28 1,83	28 2,6	28 2,37	6 33 43
20	28 2,66	28 2,7	28 2,27	6 32 53
21	28 2,31	28 1,8	28 1,17	6 36 8
22	28 0,83	28 0,5	28 0,9	6 32 10
23	28 0,1	28 0,25	28 0,11	6 36 40
24	28 0,1	28 0,0	28 0,4	6 37 47
25	28 0,36	28 0,7	28 0,8	6 37 10
26	28 1,6	28 1,8	28 1,57	6 36 53
27	28 1,58	28 1,6	28 1,72	6 38 22
28	28 2,27	28 2,9	28 2,75	6 38 15

DIA-

DIARIO METEOROLOGICO.

MARÇO de 1785.

Dias do mez.	BAROMETRO. Manhã.		BAROMETRO. Meio dia.		BAROMETRO. Tarde.		Bussola.		
	Pol.	L.	Pol.	L.	Pol.	L.	G.	M.	S.
1	28	2,43	28	2,4	28	2,25	6	34	5
2	28	2,1	28	2,1	28	2,12	6	35	7
3	28	2,5	28	2,5	28	2,02	6	35	32
4	28	1,5	28	1,8	28	1,54	6	33	53
5	28	2,33	28	2,4	28	2,55	6	35	27
6	28	2,55	28	3,8	28	3,47	6	36	20
7	28	4,2	28	2,93	28	3,35	6	32	30
8	28	3,63	28	4.	28	2,6	6	35	23
9	28	2,56	28	2,2	28	2,1	6	35	50
10	28	1,73	28	1,7	28	1,55	6	38	0
11	28	1,5	28	1,35	28	0,75	6	36	7
12	28	0,41	28	0,4	28	0,0	6	33	50
13	28	1,23	28	1,2	28	1,2	6	36	27
14	28	1,46	28	1,5	28	0,9	6	36	10
15	28	1,6	28	1,8	28	2,1	6	35	47
16	28	3,1	28	3,2	28	3,25	6	33	27
17	28	4,1	28	4.	28	4,2	6	36	52
18	28	4,4	28	4,3	28	4,4	6	37	18
19	28	4,46	28	4,3	28	4,07	6	40	7
20	28	4,4	28	4,6	28	4.	6	37	55
21	28	3,9	28	4.	28	3,27	6	35	40
22	28	3,53	28	3,4	28	2,93	6	35	30
23	28	3,33	28	3,2	28	3,1	6	34	0
24	28	3,86	28	3,9	28	3,75	6	37	55
25	28	3,33	28	3,6	28	2,75	6	35	27
26	28	3,48	28	3.	28	2,87	6	35	12
27	28	3,33	28	3,3	28	2,97	6	35	57
28	28	3,06	28	3,6	28	3,2	6	35	40
29	28	2,5	28	2,8	28	2,5	6	35	7
30	28	3,32	28	3,5	28	2,7	6	35	40
31	28	2,93	28	2,7	28	2,5	6	35	32

ABRIL de 1785.

Dias do mez.	BAROMETRO. Manhã.		BAROMETRO. Meio dia.		BAROMETRO. Tarde.		Bussola.		
	Pol.	L.	Pol.	L.	Pol.	L.	G.	M.	S.
1	28	2,3	28	2,2	28	2,32	6	32	35
2	28	3,1	28	3,2	28	4,16	6	34	0
3	28	5,16	28	5.	28	5,01	6	34	38
4	28	4,1	28	3,8	28	3,42	6	34	2
5	28	2,13	28	1,7	28	1,65	6	33	37
6	28	2,76	28	2,8	28	3,02	6	34	9
7	28	3,93	28	3,5	28	3,6	6	32	50
8	28	3,96	28	4.	28	4.	6	34	33
9	28	4,5	28	4,5	28	4,45	6	32	53
10	28	4.	28	3,5	28	3,67	6	35	20
11	28	4,2	28	3,9	28	3,42	6	34	27
12	28	3,2	28	3.	28	2,72	6	33	13
13	28	2,8	28	3.	28	2,75	6	32	53
14	28	2,93	28	2,7	28	2,55	6	32	51
15	28	3,1	28	3,2	28	3,47	6	33	13
16	28	4.	28	3,2	28	3,37	6	34	40
17	28	3,66	28	3,4	28	2,82	6	34	27
18	28	3,5	28	3,1	28	2,97	6	33	50
19	28	3,2	28	2,5	28	2,3	6	35	13
20	28	3,66	28	3,8	28	4.	6	33	5
21	28	4,26	28	4,3	28	4.	6	31	58
22	28	3,86	28	3,5	28	3,13	6	33	57
23	28	3,36	28	3,1	28	3,5	6	32	15
24	28	3,9	28	3,5	28	3,25	6	32	52
25	28	3,26	28	3,1	28	3,27	6	32	45
26	28	3,56	28	3,3	28	3,05	6	28	40
27	28	3,22	28	2,8	28	2,4	6	28	0
28	28	2,3	28	2,7	28	2,92	6	31	30
29	28	4,86	28	4,6	28	4,37	6	31	22
30	28	4,63	28	4,6	28	4,4	6	32	45

DIA-

DIARIO METEOROLOGICO.

MAIO de 1785.

Dias do mez.	BAROMETRO. Manhá.	BAROMETRO. Meio dia.	BAROMETRO. Tarde.	Bussola.
	Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.	G. M. S.
1	28 4,1	28 3,8	28 3,75	6 31 17
2	28 3,33	28 2,5	28 2,45	6 32 35
3	28 3,33	28 3,7	28 3,97	6 30 0
4	28 5,33	28 5,4	28 5,3	6 34 30
5	28 5,43	28 4,7	28 4,72	6 35 5
6	28 4,35	28 3,8	28 3,45	6 33 38
7	28 3,1	28 2,8	28 2,5	6 33 47
8	28 1,83	28 1,3	28 1,32	6 34 2
9	28 1,86	28 2,2	28 2,4	6 34 25
10	28 4,06	28 4.	28 3,85	6 39 25
11	28 3,66	28 3,1	28 3,55	6 35 22
12	28 3,86	28 3,8	28 4,1	6 39 2
13	28 5,25	28 5,3	28 5,42	6 39 52
14	28 5,9	28 6.	28 5,65	6 34 40
15	28 6,18	28 6.	28 5,75	6 39 43
16	28 5,9	28 5,7	28 5,9	6 37 48
17	28 5,73	28 5,5	28 5,3	6 35 27
18	28 5,03	28 4,7	28 4,62	6 35 47
19	28 5,06	28 4,9	28 4,67	6 35 55
20	28 4,93	28 4,9	28 4,35	6 37 29
21	28 3,93	28 3,4	28 3,15	6 38 33
22	28 2,6	28 2,4	28 2,12	6 38 0
23	28 2,9	28 2,9	28 3,27	6 35 43
24	28 4,41	28 4,7	28 4,8	6 36 20
25	28 5,13	28 5.	28 4,55	6 35 20
26	28 5,13	28 5,2	28 4,6	6 35 16
27	28 4,4	28 4,3	28 3,95	6 35 0
28	28 4,63	28 4,5	28 4,2	6 32 25
29	28 4,71	28 4,5	28 4,77	6 33 27
30	28 5,4	28 5,3	28 5,19	6 26 40
31	28 5,73	28 5,9	28 5,46	6 29 57

JUNHO de 1785.

Dias do mez.	BAROMETRO. Manhá.	BAROMETRO. Meio dia.	BAROMETRO. Tarde.	Bussola.
	Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.	G. M. S.
1	28 5,73	28 5,9	28 5,46	6 33 25
2	28 6,2	28 5,8	28 5,65	6 26 0
3	28 5,58	28 5,1	28 5.	6 28 20
4	28 5,03	28 4,5	28 4,62	6 33 5
5	28 4.	28 4,3	28 4,4	6 33 56
6	28 5,65	28 5,7	28 5,67	6 27 3
7	28 5,9	28 5,7	28 5,29	6 30 40
8	28 5,33	28 5,35	28 5,5	6 31 13
9	28 5,36	28 5,5	28 5,45	6 28 40
10	28 5,5	28 5,3	28 5.	6 32 22
11	28 5,2	28 5,2	28 4,47	6 34 2
12	28 4,8	28 4,7	28 4,58	6 33 13
13	28 5,3	28 5.	28 4,59	6 33 58
14	28 4,23	28 4.	28 3,76	6 35 40
15	28 3,5	28 3,3	28 3,02	6 31 33
16	28 3,52	28 3,1	28 2,77	6 30 42
17	28 2,2	28 2,6	28 1,91	6 32 57
18	28 1,8	28 2,37	28 2,1	6 35 15
19	28 2.	28 2,2	28 1,6	6 34 40
20	28 3,1	28 3,33	28 3,9	6 31 50
21	28 4,6	28 4,37	28 4,6	6 33 45
22	28 6,2	28 6,07	28 5,87	6 35 18
23	28 5,6	28 6.	28 5,4	6 34 25
24	28 6,2	28 5,93	28 6,05	6 35 0
25	28 2,6	28 3,37	28 2,01	6 32 58
26	28 1,7	28 1,63	28 1,72	6 37 3
27	28 3,3	28 3,1	28 3,47	6 31 13
28	28 4,5	28 4,4	28 4.	6 31 58
29	28 3,4	28 3,63	28 3,5	6 32 40
30	28 4,6	28 4,26	28 4,6	6 30 0

DIARIO METEOROLOGICO.

JULHO de 1785.

Dias do mez.	BAROMETRO. Manhá.	BAROMETRO. Meio dia.	BAROMETRO. Tarde.	Bussola.
	Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.	G. M. S.
1	28 5,3	28 5,4	28 5,72	6 31 48
2	28 5,83	28 5,8	28 5,34	6 34 23
3	28 5.	28 4,5	28 4,72	6 32 30
4	28 5,63	28 5,7	28 5,52	6 29 32
5	28 4,72	28 4,4	28 3,31	6 36 37
6	28 4,06	28 4,3	28 4,57	6 34 40
7	28 5,63	28 5,7	28 4,98	6 35 0
8	28 4,6	28 4,9	28 3,6	6 35 0
9	28 3,53	28 3,6	28 3,68	6 37 27
10	28 4,63	28 4,8	28 4,54	6 34 57
11	28 4,85	28 5,4	28 5,38	6 32 50
12	28 6,25	28 6,3	28 5,82	6 34 27
13	28 5,66	28 5.	28 4,35	6 38 18
14	28 4,06	28 3,9	28 3,5	6 36 13
15	28 3,93	28 4,1	28 3,78	6 32 50
16	28 4,06	28 4.	28 3,11	6 35 0
17	28 1,33	28 0,6	28 0,4	6 35 0
18	28 4,06	28 4,6	28 4,29	6 33 3
19	28 6,1	28 5,7	28 5,02	6 34 22
20	28 4,16	28 4,2	28 3,94	6 36 38
21	28 3,86	28 4.	28 4,06	6 33 18
22	28 2,6	28 2,4	28 2,9	6 33 13
23	28 4,38	28 4,85	28 4,42	6 33 18
24	28 4,26	28 4,1	28 4,05	6 34 33
25	28 3,4	28 3,4	28 3,17	6 33 53
26	28 3,46	28 3,2	28 3,02	6 35 28
27	28 3,66	28 3,4	28 3,2	6 33 47
28	28 3,26	28 3,1	28 3,02	6 32 30
29	28 3,66	28 3,9	28 3,6	6 37 33
30	28 3,9	28 3,9	28 3,3	6 35 0
31	28 4,16	28 4,3	28 3,97	6 36 32

AGOSTO de 1785.

Dias do mez.	BAROMETRO. Manhá.	BAROMETRO. Meio dia.	BAROMETRO. Tarde.	Bussola.
	Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.	G. M. S.
1	28 4,36	28 4,2	28 3,95	6 34 4
2	28 4,5	28 5,2	28 5,35	6 38 38
3	28 6,06	28 6.	28 5,27	6 32 10
4	28 5,8	28 5,7	28 5,7	6 30 0
5	28 5,8	28 5,1	28 5,1	6 33 33
6	28 5,23	28 5.	28 4,5	6 35 0
7	28 4,65	28 4,65	28 4,2	6 35 48
8	28 4,83	28 4,7	28 4,47	6 33 0
9	28 3,86	28 3,9	28 3,42	6 36 30
10	28 3,33	28 3.	28 2,38	6 33 17
11	28 2,83	28 2,9	28 2,77	6 35 18
12	28 2,03	28 2,1	28 3,17	6 34 46
13	28 5,6	28 5,6	28 5,85	6 31 28
14	28 6,16	28 5,8	28 5,38	6 37 10
15	28 4,7	28 4,4	28 3,97	6 34 57
16	28 3,83	28 4.	28 3,85	6 32 18
17	28 4,56	28 4,8	28 5,2	6 33 27
18	28 5,96	28 6,7	28 5,91	6 34 25
19	28 6,2	28 5,5	28 4,9	6 30 29
20	28 4,03	28 3,9	28 3,12	6 31 25
21	28 3,23	28 3,2	28 3,5	6 33 13
22	28 5,18	28 5,4	28 5,9	6 32 25
23	28 6,8	28 6,75	28 6,6	6 34 33
24	28 6,83	28 6,7	28 6,42	6 29 40
25	28 6,23	28 6,2	28 6,15	6 31 20
26	28 6,33	28 6,1	28 5,82	6 32 47
27	28 5,1	28 4,9	28 3,7	6 32 58
28	28 3,71	28 3,3	28 2,85	6 34 13
29	28 2,8	28 2,7	28 2,62	6 32 15
30	28 3,43	28 3,6	28 3,45	6 32 15
31	28 3,63	28 3,2	28 2,35	6 32 20

DIARIO METEOROLOGICO.

SETEMBRO de 1785.

Dias do mez.	BAROMETRO. Manhã.	BAROMETRO. Meio dia.	BAROMETRO. Tarde.	Bussola.
	Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.	G. M. S.
1	28 2,21	28 1,85	28 1,52	6 32 52
2	28 2,26	28 2,25	28 1,75	6 35 35
3	28 3,85	28 3,7	28 4,25	6 34 0
4	28 5,35	28 5,3	28 5,32	6 34 43
5	28 4,8	28 4,6	28 3,82	6 29 33
6	28 4,43	28 4,5	28 3,95	6 30 18
7	28 2,76	28 2,5	28 2.	6 31 25
8	28 1,63	28 0,8	28 0,61	6 33 28
9	28 0,97	28 1,6	28 2,15	6 34 50
10	28 3,5	28 3,8	28 3,76	6 33 58
11	28 4,76	28 4,7	28 4,05	6 30 40
12	28 4,26	28 4,4	28 4,57	6 33 32
13	28 4,87	28 4,6	28 4,35	6 31 58
14	28 4.	28 3,8	28 3,37	6 35 57
15	28 3,33	28 2,9	28 2,5	6 36 22
16	28 1,77	28 1,2	28 0,5	6 34 8
17	28 0,18	28 0,7	28 0,86	6 37 45
18	28 2,9	28 3,4	28 2,55	6 38 27
19	28 3,03	28 2,5	28 2,86	6 36 8
20	28 4,66	28 5,2	28 5.	6 34 40
21	28 5,32	28 5,25	28 5,4	6 34 53
22	28 5,72	28 5,4	28 5,[illegible]	6 33 23
23	28 5,1	28 4,6	28 4,11	6 33 25
24	28 2,9	28 2,3	28 1,98	6 31 27
25	28 4,75	28 5,7	28 6,08	6 34 37
26	28 6,7	28 7.	28 6,53	6 31 45
27	28 6,9	28 6,8	28 6,71	6 33 3
28	28 6,13	28 6,3	28 5,3	6 34 33
29	28 5.	28 4,6	28 4,66	6 3[illegible] 3
30	28 4,5	28 4,4	28 4.	6 36 12

OUTUBRO de 1785.

Dias do mez.	BAROMETRO. Manhã.	BAROMETRO. Meio dia.	BAROMETRO. Tarde.	Bussola.
	Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.	G. M. S.
1	28 3,87	28 4.	28 3,95	6 34 18
2	28 4, 4	28 4,6	28 4,05	6 35 33
3	28 4,25	28 3,9	28 3,98	6 32 40
4	28 3,83	28 3,8	28 3,56	6 34 27
5	28 3,72	28 3,6	28 3,31	6 38 10
6	28 3,1	28 2,6	28 2,19	6 38 17
7	28 3,38	28 3,7	28 3,76	6 32 35
8	28 4,27	28 3,9	28 3,5	6 35 14
9	28 3,45	28 3,2	28 3,17	6 34 48
10	28 3,55	28 3,2	28 2,82	6 34 5
11	28 3,55	28 3,2	28 2,5	6 32 27
12	28 2,41	28 2,6	28 1,65	6 34 27
13	28 1,2	28 0,7	28 0,32	6 32 50
14	28 0,76	28 0,7	28 0,74	6 31 33
15	28 0,52	27 11,7	27 11,64	6 31 2
16	27 11,77	28 0,5	28 0,24	6 33 55
17	28 1.	28 1,4	28 1,25	6 34 20
18	28 2,3	28 2,2	28 2,17	6 30 55
19	28 3.	28 3,2	28 3,14	6 31 40
20	28 3,2	28 3,2	28 3,17	6 32 45
21	28 3,4	28 3,7	28 3,7	6 34 40
22	28 4,65	28 4,35	28 4,06	6 36 45
23	28 3,56	28 3.	28 3,9	6 33 25
24	28 1,1	28 0,4	27 11,66	6 31 33
25	27 10,83	27 11.	27 10,75	6 33 15
26	27 11,86	27 11,5	28 0,02	6 36 27
27	28 0,76	28 0,5	28 1,02	6 35 20
28	28 2,47	28 2,1	28 1,9	6 35 40
29	28 1, 8	28 1,2	28 0,31	6 34 33
30	28 0, 8	28 0,4	28 0,31	6 34 13
31	28 0,66	28 0,9	28 1,08	6 35 25

DIA-

DIARIO METEOROLOGICO.

NOVEMBRO de 1785.

Dias do mez.	BAROMETRO. Manhá.	BAROMETRO. Meio dia.	BAROMETRO. Tarde.	Buſſola.
	Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.	G. M. S.
1	28 0,98	28 1,4	28 1,34	6 35 7
2	28 1,65	28 1,9	28 1,57	6 37 58
3	28 1,35	28 0,9	28 1,18	6 35 0
4	28 1,53	28 1,2	28 1,27	6 36 20
5	28 2,43	28 2,8	28 2,75	6 36 10
6	28 1,98	28 1,8	28 1,78	6 36 28
7	28 1,3	28 1,9	28 2,55	6 36 57
8	28 3,2	28 3,3	28 3,71	6 34 42
9	28 3,71	28 3,4	28 2,85	6 33 7
10	28 2,23	28 1,8	28 1,1	6 33 18
11	28 1,48	28 1,8	28 1.	6 34 17
12	28 0,4	28 0,4	27 11,62	6 34 20
13	27 11,7	27 11,9	27 11,97	6 35 50
14	28 0,77	28 1,2	28 1,12	6 36 15
15	28 1,43	28 1,1	28 0,65	6 35 3
16	28 1,46	28 1,8	28 1,57	6 34 17
17	28 1,93	28 1,6	28 1,3	6 34 20
18	28 1,33	28 1,1	28 1,02	6 35 12
19	28 0,33	28 0,5	28 0,6	6 34 45
20	28 2,38	28 2,2	28 2,42	6 31 13
21	28 2,32	28 2,25	28 1,74	6 32 50
22	28 1,13	28 0,4	28 0,25	6 32 25
23	28 0,16	27 11,9	27 11,85	6 32 50
24	28 0,8	28 1,2	28 0,92	6 37 33
25	28 0,75	28 0,5	28 0,05	6 34 20
26	27 11,53	27 11,4	27 10,8	6 34 18
27	27 11,12	28 10,9	27 11,45	6 35 40
28	28 0,76	28 1,25	28 1,62	6 35 20
29	28 2,83	28 2,8	28 2,84	6 34 43
30	28 3,18	28 3.	28 2,59	6 36 2

DEZEMBRO de 1785.

Dias do mez.	BAROMETRO. Manhá.	BAROMETRO. Meio dia.	BAROMETRO. Tarde.	Buſſola.
	Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.	G. M. S.
1	28 2, 4	28 2,6	28 2,02	6 35 38
2	28 0,76	28 0,6	28 0,45	6 36 30
3	28 1,06	28 1,1	28 0,97	6 39 40
4	28 1,73	28 2,5	28 1,87	6 37 13
5	28 2,03	28 2.	28 1,4	6 38 45
6	28 1,36	28 1,3	28 1,62	6 32 5
7	28 1,68	28 1,9	28 1,76	6 32 33
8	28 1,42	28 1,6	28 1,29	6 32 3
9	28 0,65	28 0,7	28 0,45	6 28 53
10	28 0,4	28 0,2	28 0,67	6 33 20
11	28 1,53	28 1,7	28 1,7	6 30 40
12	28 1,66	28 1,9	28 1,71	6 33 40
13	28 1,9	28 2.	28 1,95	6 35 58
14	28 2,03	28 2.	28 1,62	6 40 3
15	28 1,15	28 1,3	28 0,52	6 34 13
16	28 0,02	27 11,6	27 11,2	6 39 0
17	28 0,03	27 11,7	27 11,3	6 30 47
18	27 11,58	27 11,6	27 11.	6 36 40
19	27 11,22	27 11,4	27 11,25	6 38 40
20	28 0,2	28 0,4	28 0,72	6 38 43
21	28 1,46	28 1,9	28 1,75	6 36 27
22	28 1,86	28 1,9	28 1,4	6 34 0
23	28 1,36	28 0,9	28 0,6	6 34 53
24	28 0,66	28 0,2	27 11,72	6 34 10
25	28 0,7	28 0,4	28 0,01	6 36 40
26	28 1,15	28 0,6	28 0,26	6 32 28
27	28 0,5	28 0,7	27 11,74	6 33 58
28	28 0,33	28 0,7	28 1,05	6 33 35
29	28 2,22	28 2,7	28 2,52	6 35 47
30	28 3.	28 3,2	28 2,77	6 33 0
31	28 1,56	28 1,5	28 0,45	6 33 33

BA-

BAROMETRO.

TABOA I.	Elevaçaõ maxima.	Elevaçaõ minima.	Elevaçaõ media.	Elevaçaõ da manhã.	Elevaçaõ do meio dia.	Elevaçaõ da tarde.
	Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.
Janeiro.	28 3,7	27 10,5	28 1,98	28 2,05	28 1,96	28 1,75
Fevereiro.	28 3,9	27 11,8	28 1,78	28 1,84	28 1,86	28 1,65
Março.	28 4,8	27 11,7	28 2,8	28 2,9	28 2,88	28 2,61
Abril.	28 5,5	28 1,2	28 3,43	28 3,58	28 3,38	28 3,33
Maio.	28 6,5	28 1,0	28 4,28	28 4,42	28 4,26	28 4,16
Junho.	28 6,7	28 1,3	28 4,33	28 4,48	28 4,34	28 4,18
Julho.	28 6,5	28 1,3	28 4,21	28 4,31	28 4,3	28 4,01
Agosto.	28 7,35	28 0,2	28 4,68	28 4,76	28 4,68	28 4,43
Setembro.	28 7,15	27 11,3	28 3,83	28 3,95	28 3,89	28 3,65
Outubro.	28 4,95	27 10,0	28 2,33	28 2,37	28 2,22	28 2,06
Novembro.	28 4,35	27 10,4	28 1,34	28 1,4	28 1,38	28 1,25
Dezembro.	28 3,3	27 10,6	28 1,27	28 1,15	28 1,18	28 0,89

Elevaçaõ de duas em duas horas.

TAB. II.	6 horas da manhã.	8 horas da manhã.	10 horas da manhã.	12 horas da manhã.	2 horas da tarde.	4 horas da tarde.	6 horas da tarde.	10 horas da noite.	do dia.
	Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.	Pol. L.
Janeiro.	28 1,83	28 2,1	28 2,22	28 1,96	28 1,63	28 1,26	28 1,65	28 2,3	28 1,87
Fever.	28 1,62	28 1,87	28 2,12	28 1,86	28 1,67	28 1,3	28 1,61	28 2,15	28 1,77
Março.	28 2,57	28 2,93	28 3,18	28 2,88	28 2,54	28 2,28	28 2,59	28 3,0	28 2,75
Abril.	28 3,26	28 3,62	28 4,0	28 3,38	28 3,12	28 2,97	28 3,61	28 3,89	28 3,48
Maio.	28 4,13	28 4,41	28 4,74	28 4,26	28 3,96	28 3,88	28 4,2	28 4,6	28 4,28
Junho.	28 4,16	28 4,47	28 4,77	28 4,34	28 4,01	28 3,93	28 4,27	28 4,55	28 4,31
Julho.	28 4,02	28 4,31	28 4,65	28 4,3	28 3,93	28 3,69	28 3,98	28 4,4	28 4,16
Agosto.	28 4,48	28 4,74	28 5,06	28 4,68	28 4,4	28 4,18	28 4,43	28 4,73	28 4,59
Set.	28 3,68	28 3,98	28 4,22	28 3,89	28 3,49	28 3,33	28 3,66	28 4,13	28 3,8
Outub.	28 2,12	28 2,39	28 2,56	28 2,22	28 1,8	28 1,67	28 2,0	28 2,5	28 2,16
Nov.	28 1,1	28 1,41	28 1,68	28 1,38	28 1,17	28 0,93	28 1,2	28 1,73	28 1,32
Dez.	28 0,86	28 1,17	28 1,38	28 1,18	28 0,85	28 0,47	28 0,88	28 1,44	28 1,02

THERMOMETRO.

TABOA III.	Calor maximo.	Calor minimo.	Calor medio do mez.	Calor medio da manhã.	Calor medio do meio dia.	Calor medio da tarde.
	G.	G.	G.	G.	G.	G.
Janeiro.	89,75	74.	81,19	79,08	81,71	82,78
Fevereiro.	90.	75.	80,41	79,2	80,7	81,34
Março.	82.	70.	76,28	75,35	76,8	76,69
Abril.	85,5	66,5	76,19	74,83	75,61	78,13
Maio.	78,5	66.	71,32	69,49	71,25	73,23
Junho.	82.	55,75	68.61	66,63	68,76	70,45
Julho.	80.	52,5	67,76	65,47	68.	69,82
Agosto.	79.	65.	72,25	69,97	72,53	74,25
Setembro.	84.	64.	72,4	70,69	73,17	73,34
Outubro.	86.	66.	74,23	72,19	75,09	75,41
Novembro.	87.	69.	76,61	74,81	77,68	77,33
Dezembro.	90.	71.	78,72	76,83	79,88	79,45

Calor medio de duas em duas horas.

TAB. IV.	6 horas da manhã.	8 horas da manhã.	10 horas da manhã.	12 horas da manhã.	2 horas da tarde.	4 horas da tarde.	6 horas da tarde.	10 horas da noite.	do dia.
	G.	G.	G.	G.	G.	G.	G.	G.	G.
Janeiro.	78,2	79,03	81,1	81,71	82,66	83,66	83,0	81,7	81,25
Fever.	77,71	78,3	79,42	80,7	81,64	81,9	81,26	80,51	80,18
Março.	74,8	75,17	76,1	76,8	77,3	77,43	79,96	76,35	76,36
Abril.	74,25	74,71	75,56	75,61	78,02	78,4	78,25	77,75	76,56
Maio.	69,11	69,3	69,98	71,25	72,35	73,58	73,66	73,4	71,58
Junho.	66,24	66,1	67,38	68,76	70,15	71,06	70,76	70,0	68,61
Julho.	61,24	65,23	66,69	68,0	69,22	70,45	70,13	69,67	67,58
Agosto.	68,9	69,79	71,12	72,53	73,75	74,71	74,45	73,75	72,37
Set.	70,0	70,33	71,68	73,17	73,88	73,95	73,1	72,45	72,33
Outub.	71,03	72,02	73,63	75,09	76,25	76,53	75,1	73,72	74,17
Nov.	73,66	74,58	76,21	77,68	78,66	77,85	76,88	75,48	76,38
Dez.	75,56	76,62	78,30	79,88	80,62	80,33	79,07	77,82	78,52

Nu-

Numeros dos dias.

TABOA V.	Serenos.	Variaveis.	Nublados.	Cobertos.	Relampagos.	Trovoada.	Chuva.	Nevoa.	Aurora Austral.	Luz Zodiacal.
Janeiro.	3	13	10	5	9	7	13	4	*	1
Fevereiro.	5	12	2	9	3	6	15	10	*	*
Março.	*	17	6	8	11	2	24	2	*	*
Abril.	8	12	8	2	5	*	10	9	*	2
Maio.	13	6	8	4	*	*	7	17	*	*
Junho.	12	10	3	5	3	1	9	17	*	2
Julho.	11	5	12	3	*	*	6	19	*	1
Agosto.	11	10	10	*	*	*	2	14	3	*
Setembro.	1	10	9	10	1	4	14	9	*	1
Outubro.	3	16	7	5	2	4	11	6	*	1
Novembro.	*	20	6	4	4	9	21	1	*	1
Dezembro.	2	15	6	8	7	5	18	3	*	*

Quantidade da Chuva, e Vaporaçaõ.

TAB. VI.	Chuva.		Vaporaçaõ.	
	Pol.	L.	Pol.	L.
Janeiro.	5	5,	6	2,9
Fevereiro.	6	9,	4	7,9
Março.	14	6,5	1	1,5
Abril.	7	8,	1	9,6
Maio.	2	5,	1	3,
Junho.	1	9,	0	8,84
Julho.	0	5,	1	2,5
Agosto.	0	0,5	2	1,8
Setembro.	3	3,9	2	0,
Outubro.	3	3,13	4	0,25
Novembro.	4	7,9	4	4,45
Dezembro.	3	7,7	4	9,55

Ventos dominantes.

TAB. VII.	Manhã.	Tarde.
Janeiro.	Variavel.	S. E.
Fevereiro.	N. O.	S. E.
Março.	Var.	S. E.
Abril.	N. O.	S. E.
Maio.	Var. e N. O.	S. E.
Junho.	N. O.	Var. e S. E.
Julho.	Var.	Var.
Agosto.	Var.	Var.
Setembro.	Var.	Var.
Outubro.	Var.	S. E.
Novembro.	Var.	S. E.
Dezembro.	Var.	S. E.

In-

Influencia correspondente aos pontos Lunares.

TABOA VIII. Pontos Lunares.	Elevaçaõ media do Barometro.	Calor medio.	Ventos dominantes.							
			N.	N.E.	N.O.	S.	S.E.	S.O.	L.	O.
	Pol. L.	°								
Lua em conjunçaõ.	28 3,05	75,46	5	5	30	10	49	*	4	1
Lua em opposiçaõ.	. 2,92	75,61	6	6	23	4	52	*	8	7
I. Quarto.	. 3,57	74,17	4	2	25	10	42	*	8	5
II. Quarto.	. 2,83	67,37	21	9	15	3	36	12	4	3
Apogeu.	. 2,86	75,18	11	5	17	12	39	7	6	7
Perigeu.	. 2,89	79,82	6	2	26	7	24	1	5	23
Lunistico Austral.	. 2,66	75,14	1	7	25	11	48	*	6	11
Lunistico Boreal.	. 3,21	80,26	9	5	36	*	37	8	6	3
Equinoccio ascendente.	. 2,42	74,83	1	*	25	10	47	10	6	3
Equinoccio descendente.	. 2,78	75,63	3	5	26	*	49	5	4	4
I. Oitante.	. 3,26	74,39	*	4	38	7	35	*	4	*
II. Oitante.	. 2,29	76,44	13	4	33	4	26	8	*	8
III. Oitante.	. 3,07	75,04	3	8	21	6	27	19	6	4
IV. Oitante.	2,88	75,19	11	9	39	4	31	*	1	6

Influencia correspondente aos pontos Lunares.

TABOA IX. Pontos Lunares.	Numero dos dias.									
	Serenos.	Variaveis.	Nublados.	Cobertos.	Relamp.	Trovoada.	Chuva.	Nevoa.	Aur. Austr.	Luz-Zod.
Lua em conjunçaõ.	1	6	5	1	5	*	5	4	*	*
Lua em opposiçaõ.	4	5	3	2	1	1	5	4	*	*
I. Quarto.	3	7	1	1	*	2	3	2	*	1
II. Quarto.	4	6	1	2	4	2	7	2	*	*
Apogeu.	2	6	3	2	3	1	5	4	*	*
Perigeu.	1	10	1	1	1	2	7	4	1	*
Lunistico Austral.	2	4	4	3	2	2	5	6	*	*
Lunistico Boreal.	3	5	3	2	1	*	6	2	*	*
Equinoccio ascendente.	2	7	4	1	2	2	5	4	*	1
Equinoccio descendente.	*	6	5	1	3	3	6	4	*	*
I. Oitante.	3	4	4	1	1	1	5	6	*	*
II. Oitante.	1	9	1	1	2	1	6	3	*	*
III. Oitante.	1	4	5	2	1	1	6	5	*	*
IV. Oitante.	2	6	3	2	2	2	4	6	*	*

De-

Declinação Oriental da Agulha-Magnetica.

TABOA X.	Maxima.	Minimá.	Media.	Manhã.	Meio dia.	Tarde.
	G. M. S.	G. M. S.	G. M. S.	G. M. S.	G. M. S.	G. M. S.
Janeiro.	6 41	6 20	6 33 53	6 32 12	6 35 0	6 34 26
Fevereiro.	. 40 30	. 27	. 34 29	. 33 8	. 35 29	. 34 50
Março.	. 42	. 28	. 35 43	. 34 38	. 36 17	. 36 13
Abril.	. 38	. 21	. 33 2	. 31 59	. 33 58	. 33 10
Maio.	. 44	. 25	. 34 57	. 33 50	. 35 40	. 35 22
Junho.	. 39	. 20	. 32 18	. 32 19	. 32 22	. 32 14
Julho.	. 43	. 26	. 34 13	. 34 9	. 35 25	. 33 5
Agosto.	. 40	. 26 30	. 33 16	. 32 54	. 33 56	. 32 59
Setembro.	. 45	. 26	. 33 59	. 33 3	. 34 26	. 34 29
Outubro.	. 42	. 25	. 34 8	. 32 47	. 34 31	. 35 7
Novembro.	. 45	. 28	. 34 53	. 33 14	. 35 49	. 35 37
Dezembro.	. 46	. 21	. 35 0	. 32 32	. 36 44	. 35 43

Declinação media de duas em duas horas.

TAB. XI.	6 horas da manhã.	8 horas da manhã.	10 horas da manhã.	12 horas da manhã.	2 horas da tarde.	4 horas da tarde.	6 horas da tarde.	10 horas da noite.	do dia.
	G. M. S.	G. M. S.	G. M. S.	G. M. S.	G. M. S.	G. M. S.	G. M. S.	G. M. S.	G. M. S.
Janeir.	6 31 42	6 32 0	6 32 52	6 35 0	6 35 31	6 34 24	6 34 8	6 33 50	6 33 42
Fever.	. 33 19	. 32 12	. 33 52	. 35 29	. 35 35	. 35 2	. 34 26	. 33 51	. 34 13
Março.	. 34 56	. 34 12	. 34 36	. 36 17	. 36 54	. 36 48	. 36 4	. 35 2	. 35 36
Abril.	. 32 4	. 32 8	. 31 46	. 33 58	. 33 52	. 33 26	. 33 18	. 32 36	. 32 58
Maio.	. 33 56	. 34 0	. 32 36	. 35 40	. 36 4	. 35 52	. 35 0	. 34 35	. 34 43
Junho.	. 32 6	. 32 38	. 32 33	. 32 22	. 32 44	. 32 19	. 32 22	. 31 32	. 32 14
Julho.	. 34 6	. 34 57	. 34 26	. 35 25	. 34 14	. 34 0	. 33 41	. 32 50	. 34 12
Agost.	. 32 23	. 32 59	. 33 21	. 33 56	. 33 42	. 33 29	. 32 50	. 31 58	. 33 5
Set.	. 32 47	. 33 8	. 33 10	. 34 26	. 35 2	. 35 6	. 34 26	. 33 14	. 33 55
Out.	. 33 4	. 32 35	. 32 41	. 34 31	. 35 45	. 35 39	. 34 55	. 34 10	. 34 10
Nov.	. 32 34	. 33 14	. 33 57	. 35 49	. 36 45	. 36 13	. 35 23	. 34 6	. 34 45
Dez.	. 32 0	. 31 44	. 33 23	. 36 44	. 37 0	. 36 6	. 35 15	. 33 50	. 34 30

DETERMINAÇAÕ

Das Orbitas dos Cometas

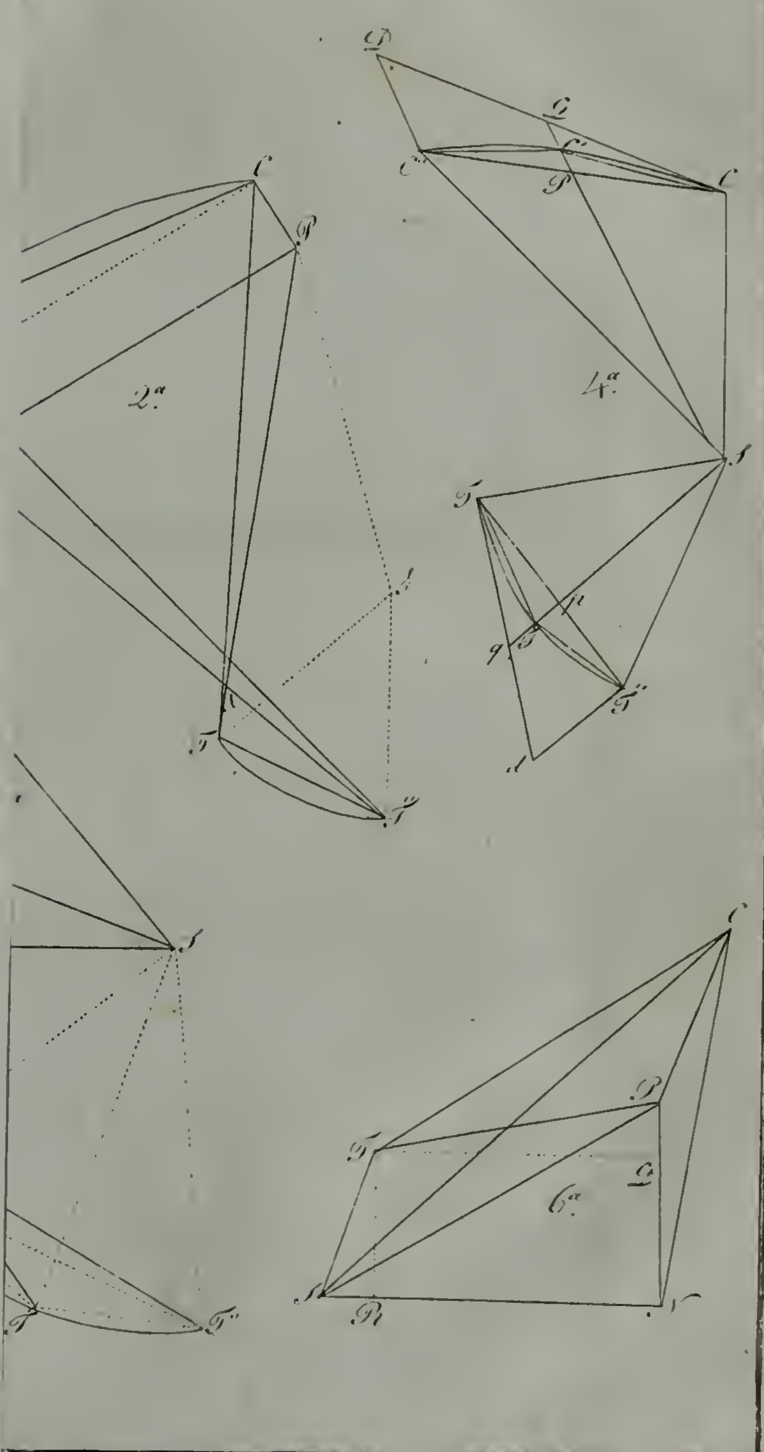
POR JOSÉ MONTEIRO DA ROCHA.

I. PARTE.

1. A Determinaçaõ das *Orbitas dos Cometas* he hum Problema, cuja difficuldade se dá bem a conhecer, por lha ter achado Newton muito grande (*). Só depois de haver feito muitas, e diversas tentativas he que descubrio este incomparavel Geometra a Soluçaõ, com que rematou a sua obra immortal dos *Principios Mathematicos*; Soluçaõ, de que elle se prezava muito, e com muita razaõ; pois nella se vê sobresahir admiravelmonte o genio creador, dom precioso que a Natureza reparte escaçamente de seculos em seculos pelo pequeno número dos seus escolhidos. Mas sendo, como he, taõ digna de Newton aquella Soluçaõ, nem por isso satisfez completamente ao que se desejava. Porque além de naõ passar de huma approximaçaõ do Problema, procede em grande parte graficamente; e as Soluçoẽs graficas, ainda que sejaõ elegantes, perfeitas, e exactas na theorica, saõ quasi sempre defeituosas na prática.

2. Mais de cincoenta annos depois tomou o sábio Euler a empreza de resolver esta questaõ de hum modo mais ge-

(*) Problema hocce longe difficillimum multimode aggressus, composui problemata quædam in libro primo, quæ ad ejus solutionem sequentem paulo simpliciorem excogitavi. Newt. lib. 3. *Princip. Prop.* 41.


2.ª
4.ª
6.ª

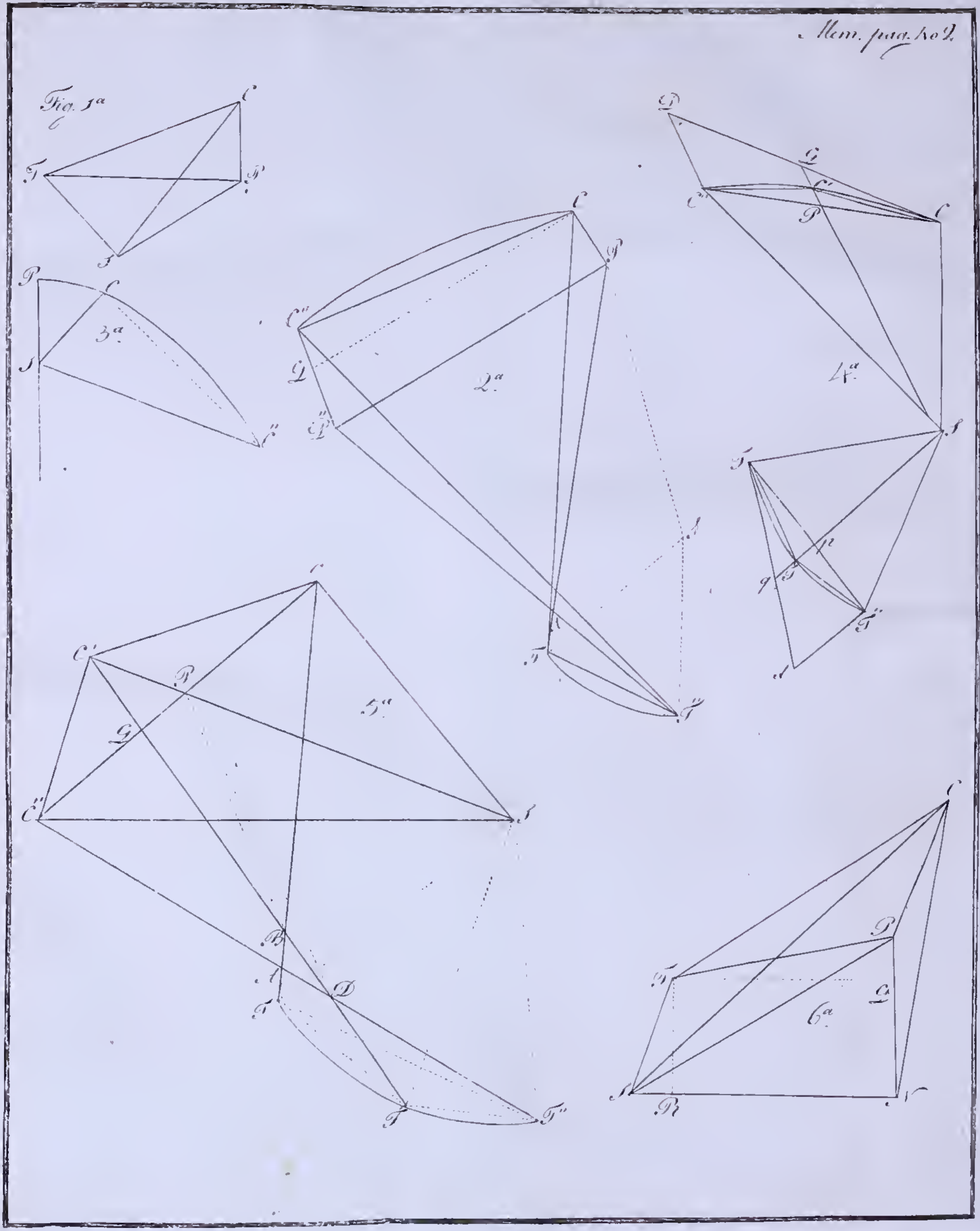


Fig. 1a
3a
2a
4a
5a
6a

geral, naõ se restringindo como Newton á hypothese das orbitas parabolicas, mas supponde que ellas podem ser parabolicas, ellipticas, ou hyperbolicas (*). Sem embargo porém da grande habilidade d'este Author, que com a maravilhosa fecundidade de seu engenho contribuio muito para o progresso das sciencias Mathematicas em todas as suas partes, ficou o *Problema dos Cometas* como d'antes, por se acharem embaraços na execuçaõ d'aquelle methodo, que elle chama facil no mesmo titulo da sua obra. Porque suppõe, que primeiro se sabe proximamente a distancia do Cometa á terra no tempo da observaçaõ media; conhecimento, em que consiste a maior difficuldade da questaõ; e ainda que pelo seu mesmo methodo se póde conseguir, he tal a multidaõ de calculos necessarios para esse preliminar, que faraõ desanimar a mais determinada constancia. Depois d'isso procede de hum modo indirecto, calculando simultaneamente duas hypotheses pouco differentes da distancia proximamente conhecida, para deduzir duas orbitas, cada huma das quaes se ha de comparar a huma quarta observaçaõ, para corrigir as hypotheses pela regra de falsa posiçaõ. E tudo isto por hum modo taõ longo, e prolixo, que no exemplo do famoso Cometa de 1680, sem embargo de tomar as hypotheses dos calculos feitos por Newton, e Halley, gasta trinta e duas paginas de operações numericas para tirar a lume os elementos da orbita; e no outro exemplo do Cometa de 1744, deixando em segredo as longas tentativas, que fez para estabelecer proximamente as suas hypotheses, he outro tanto trabalho para deduzir os primeiros elementos, e depois disso doze paginas de calculo para os corrigir por outro methodo de tres hypotheses, que ajuntou no Additamento da mesma obra.

3. O certo he que os Astronomos, para cujo uso deve ser a Soluçaõ d'este Problema, deixando o caminho de Newton, e laberinto de Euler, e naõ fazendo conta das So-

(*) Theoria motuum Planetarum et Cometarum, &c. Berolini A. 1744.

Soluções de Bouguer, e Fontaine, nem de outras, que nunca deraõ o paſſo neceſſario da eſpeculaçaõ para a execuçaõ, ſe lançáraõ ao methodo ordinario das falſas poſiçóes, ultimo recurſo de que ſe valem, quando faltaõ as Soluçóes directas, e proprias de qualquer queſtaõ, ou quando ellas ſaõ notavelmente mais trabalhoſas do que os rodeios, que indirectamente conduzem ao meſmo reſultado. Mas eſte methodo ſuppóe, como o de Euler, que ſe ſabe proximamente aquillo meſmo que ſe buſca, donde he neceſſario ter a felicidade de conjecturar previamente com acerto, para naõ perder o tempo, e a paciencia em muitos calculos inuteis; e por outra parte, ainda depois das mais felizes conjecturas, ſaõ taõ longos, e taõ penoſos os calculos, que he muito para admirar a conſtancia de trabalho, com que Halley, La-Caille, Pingré, La-Lande, e outros infatigaveis Aſtronomos ſe empregáraõ em calcular as Orbitas de todos os Cometas, que até o preſente ſe tem obſervado.

4 Por eſte motivo ſe deſeja ha muito tempo huma Soluçaõ expedita d'eſte embaraçado Problema. A Academia de Berlin o eſcolheo para aſſumpto do premio de 1774; requerendo, *Que ſe deſſem formulas geraes, e rigoroſas, para determinar a Orbita parabolica de hum Cometa, por meio de tres obſervações; e que ſe moſtraſſe o uſo dellas, para reſolver o Problema do modo mais ſimples, e mais exacto.* Mas chegando o termo aprazado, e naõ ſe ſatisfazendo ella com as obras que concorrêraõ, prorogou a queſtaõ para o anno de 1778 com premio duplicado. Até agora naõ ſabemos em Portugal o que tem reſultado daquellas repetidas indagações, aſſim como naõ ſoubemos da propoſiçaõ, ſenaõ muito depois de ſer paſſado o ultimo termo della. Seja porém qual for o exito, que tenha tido, ou haja ainda de ter, o programma de Berlin, como ſempre he conveniente haver differentes methodos de reſolver a meſma queſtaõ, pareceo-me que o meu trabalho neſta materia naõ deixaria de ſe conformar com as intenções da noſſa Acade-

demia, que fobre todas começa a diftinguir-fe com tanto acerto em fazer juizo das coufas pela utilidade dellas (*).

5 Será efta obra dividida em duas partes. Nefta primeira dou as Formulas geraes, exactas, e rigorofas, para determinar as Orbitas dos Cometas, fuppondo-as parabolicas, como he fabido que podem fuppôr-fe, ao menos na maior parte d'elles, fem erro fenfivel. Neftas formulas eftaõ por huma vez feitos todos os raciocinios, que eraõ neceffarios para a foluçaõ do Problema; e para fe ufar d'ellas, naõ ha neceffidade de fe ir governando o Calculador por huma figura, que reprefente o cafo particular, de que fe trata, mas com as quantidades dadas pelas obfervações achará o que fe bufca, fem haver coufa que o poffa demorar. O que talvez fe podia defejar he, que o número das operações naõ foffe taõ grande; mas iffo vem da natureza da queftaõ, que naõ dá lugar a efperar-fe com fundamento algum, que já mais fe poffa refolver com duas, ou tres horas de trabalho. E quem reflectir, que as foluções indirectas faõ quafi fempre menos trabalhofas na prática, e que a indirecta da noffa queftaõ requer huma multidaõ taõ notavel de calculos, naõ achará, que faõ muitos os que fe devem fazer em confequencia das noffas Formulas.

6 Na fegunda parte darei as Formulas, que convem á determinaçaõ das Orbitas ellipticas, todas as vezes que hum Cometa no tempo da fua appariçaõ fe defviar fenfivelmente de huma Orbita parabolica.

(*) Efta Memoria precedeo em data ás duas do mefmo Author publicadas no volume antecedente; e foi lida na Affembléa de 27 de Janeiro de 1782.

§. I.

Principios, em que se funda a determinaçaõ da Orbita parabolica de hum Cometa.

7 Para se determinar huma parabola de grandeza, e de posiçaõ, he necessario saber-lhe o parametro, ou a distancia do foco ao vertice, que he, como se sabe, a quarta parte d'elle; a inclinaçaõ, que tem o plano da parabola a respeito de hum plano conhecido; a posiçaõ da linha de intersecçaõ d'estes dous planos; e a do eixo da mesma parabola. E attendendo ao movimento de hum corpo por esta curva, he além d'isso necessario saber-lhe a direcçaõ, e o instante, em que se achou, ou ha de achar em hum ponto dado da mesma curva, como por exemplo no vertice, que he o mais notavel de todos. Assim temos seis elementos que indagar na theorica de qualquer Cometa, os quaes na lingoagem dos Astronomos saõ: I. a distancia perihelia; II. a inclinaçaõ da Orbita; III. a longitude do nodo ascendente; IV. a longitude do perihelio; V. o instante da passagem pelo perihelio; VI. a direcçaõ do movimento.

8 Huma vez achados estes elementos, he facil de calcular o lugar do Cometa, para qualquer tempo dado, pelo methodo conhecido dos Astronomos, ou pelas formulas, que tambem para isso havemos de mostrar. Mas vir no conhecimento dos elementos por meio dos lugares observados, he, como temos dito, hum dos mais difficeis problemas da Astronomia moderna. A difficuldade sería muito maior, se fossemos obrigados a ligar immediatamente por meio de Equações os elementos procurados com as quantidades dadas pelas observações, como fizeraõ grandes Geometras, sem fruto algum. Havendo porém reflectido, que depois de sabermos as distancias do Cometa á terra no tempo de duas observações, por ellas se podem determinar aquelles elementos, esta consideraçaõ nos offerece a venta-

gem

gem de partirmos, para o dizer aſſim, a queſtaõ pelo meio, encaminhando primeiro a indagaçaõ para as referidas diſtancias, como ſe ellas foſſem os elementos, que buſcamos. Para iſſo ſerviráõ as propoſiçóes ſeguintes.

9 *Achar a relaçaõ entre a diſtancia de hum Cometa á terra, e o ſeu raio vector, para o tempo dado de qualquer obſervaçaõ* (Fig. 1.).

Suppondo o Sol em S, a Terra em T, o Cometa em C, e abaixando d'elle para o plano da ecliptica a perpendicular CP, eſtá claro que o angulo CTP he a latitude geocentrica do Cometa, e que o angulo PTS he igual á longitude do Cometa menos a do Sol. Aſſim fazendo $TC = x$; $SC = r$, $PTS = A$, $CTP = L$, e $TS = s$, quantidade conhecida pela theorica do Sol, no triangulo rectangulo CPT teremos $CP = x\,\text{Sen.}\,L$, $TP = x\,\text{Coſ.}\,L$, e no triangulo rectangulo SPC, $r^2 = \overline{CP}^2 + \overline{PS}^2 = x^2\,\text{Sen.}^2\,L + \overline{PS}^2$; mas o triangulo PTS pela propriedade conhecida dos Geometras dá $\overline{PS}^2 = s^2 + \overline{PT}^2 - 2\,S.\,PT\,\text{Coſ.}\,A = s^2 + x^2\,\text{Coſ.}^2\,L - 2\,s\,x\,\text{Coſ.}\,L\,\text{Coſ.}\,A$: logo ſubſtituindo eſte valor na equaçaõ precedente, reflectindo, que $\text{Sen.}\,L^2 + \text{Coſ.}\,L^2 = 1$; teremos $r^2 = x^2 - 2\,s\,x\,\text{Coſ.}\,L\,\text{Coſ.}\,A + s^2$. E pondo a quantidade dada $2\,s\,\text{Coſ.}\,L\,\text{Coſ.}\,A = a$, ſerá finalmente $r^2 = x(x - a) + s^2$.

10. *Achar a relaçaõ entre as diſtancias do Cometa á terra no tempo de duas obſervações, e a corda do arco, que elle deſcreveo* (Fig. 2.).

Seja S o Sol; T, e C os lugares da Terra, e do Cometa no inſtante da primeira obſervaçaõ; e T'', C'' no inſtante da ſegunda. Abaixando as perpendiculares CP, $C''P''$ para o plano da ecliptica, he evidente que CTP he a latitude do Cometa, e PTS a longitude d'elle, menos a do Sol no tempo da primeira obſervaçaõ; e ſemelhantemente $C''T''P''$, $P''T''S$ no tempo da ſegunda. He tambem

bem facil de ver, que o angulo PAP'' he o movimento geocentrico do Cometa em longitude no intervallo das obſervações; por quanto, imaginando tirada pelo ponto T huma linha parallela a $T''P''$, fará no dito ponto com a recta TP hum angulo, que ſerá igual a PAP'', e moſtrará o movimento apparente do Cometa a reſpeito do obſervador, que ſe imagina immovel em T, quando realmente foi tranſportado de T para T''.

11. Suppondo pois $TC = x$, $T''C'' = x''$, $PTS = A$, $P''T''S = A''$, $CTP = L$, $C''T''P'' = L''$, $PAP'' = C$, e a corda $CC'' = K$, teremos primeiramente $TP = x \,\text{Coſ.}\, L$, $T''P'' = x'' \,\text{Coſ.}\, L''$, $CP = x \,\text{Sen.}\, L$, $C''P'' = x'' \,\text{Sen.}\, L''$; e conduzindo CQ parallela a PP'', ſerá $C''Q = x'' \,\text{Sen.}\, L'' - x \,\text{Sen.}\, L$. Iſto poſto, o triangulo rectangulo CQC'' dará $K^2 = (x'' \,\text{Sen.}\, L'' - x \,\text{Sen.}\, L)^2 + \overline{PP''}^2$; e o triangulo PAP'' dará $\overline{PP''}^2 = (x \,\text{Coſ.}\, L - AT)^2 + (x'' \,\text{Coſ.}\, L'' - AT'')^2 - 2\,(x \,\text{Coſ.}\, L - AT)\,(x'' \,\text{Coſ.}\, L'' - AT'') \,\text{Coſ.}\, C$. E ſubſtituindo eſte valor na equaçaõ precedente, fazendo as multiplicações indicadas, e reflectindo, que he $\overline{AT}^2 + \overline{AT''}^2 - 2\,AT.AT'' \,\text{Coſ.}\, C = \overline{T''T}^2$, acharemos $K^2 = x^2 - 2x \,\text{Coſ.}\, L\,(AT - AT'' \,\text{Coſ.}\, C) + x''^2 - 2x'' \,\text{Coſ.}\, L''\,(AT'' - AT \,\text{Coſ.}\, C) - 2xx''\,(\text{Coſ.}\, L \,\text{Coſ.}\, L'' \,\text{Coſ.}\, C + \text{Sen.}\, L \,\text{Sen.}\, L'') + \overline{TT''}^2$.

12. Agora no triangulo TST'' conhecemos o angulo em S, que he igual ao movimento apparente do Sol no intervallo das obſervações, e os lados ST, ST'', que ſaõ as diſtancias d'elle á terra nos dous inſtantes das meſmas obſervações. Pelo que ſuppondo $ST = s$, $ST'' = s''$, $TST'' = S$, e $STT'' = B$, teremos $s'' : s :: \text{Sen.}\, B : \text{Sen.}\,(B + S) :: \text{Sen.}\, B : \text{Sen.}\, B \,\text{Coſ.}\, S + \text{Sen.}\, S \,\text{Coſ.}\, B :: \text{Tg.}\, B : \text{Tg.}\, B \,\text{Coſ.}\, S + \text{Sen.}\, S$, donde ſe tira $\text{Tg.}\, B = \frac{s'' \,\text{Sen.}\, S}{s - s'' \,\text{Coſ.}\, S}$, e $TT'' = \frac{s'' \,\text{Sen.}\, S}{\text{Sen.}\, B}$.

AT

13. E paſſando ao triangulo TAT'', teremos $AT = \frac{TT''\ \text{Sen.}\ (A+B+C)}{\text{Sen.}\ C} = \frac{s''\ \text{Sen.}\ S\ \text{Sen.}\ (A+B+C)}{\text{Sen.}\ B\ \text{Sen.}\ C}$, e $AT'' = \frac{s''\ \text{Sen.}\ S\ \text{Sen.}\ (A+B)}{\text{Sen.}\ B\ \text{Sen.}\ C}$. Logo ſerá $AT - AT''\ \text{Coſ.}\ C$

$$= \frac{s''\ \text{Sen.}\ S}{\text{Sen.}\ B\ \text{Sen.}\ C}\Big(\text{Sen.}\ (A+B+C) - \text{Sen.}\ (A+B)\ \text{Coſ.}\ C\Big)$$

$$= \frac{s''\ \text{Sen.}\ S\ \text{Coſ.}\ (A+B)}{\text{Sen.}\ B}\ ;$$ e $$AT'' - AT\ \text{Coſ.}\ C = \frac{s''\ \text{Sen.}\ S}{\text{Sen.}\ B\ \text{Sen.}\ C}$$

$$\Big(\text{Sen.}\ (A+B) - \text{Sen.}\ (A+B+C)\ \text{Coſ.}\ C\Big) = \frac{s''\ \text{Sen.}\ S}{\text{Sen.}\ B\ \text{Sen.}\ C}$$

$$\Big(\text{Sen.}\ (A+B) - \text{Sen.}\ (A+B)\ \text{Coſ.}^2 C - \text{Sen.}\ C\ \text{Coſ.}\ C\ \text{Coſ.}\ (A+B)\Big)$$

$$= \frac{s''\ \text{Sen.}\ S}{\text{Sen.}\ B}\Big(\text{Sen.}\ (A+B)\ \text{Sen.}\ C - \text{Coſ.}\ (A+B)\ \text{Coſ.}\ C\Big)$$

$$= -\frac{s''\ \text{Sen.}\ S}{\text{Sen.}\ B}\ \text{Coſ.}\ (A+B+C).$$

14. Pelo que ſuppondo, que com as quantidades dadas fazemos $\text{Tg.}\ B = \frac{s''\ \text{Sen.}\ S}{s - s''\ \text{Coſ.}\ S}$, $\frac{s''\ \text{Sen.}\ S}{\text{Sen.}\ B} = g$, $2g\ \text{Coſ.}\ (A+B)\ \text{Coſ.}\ L = b$, $2g\ \text{Coſ.}\ (A+B+C)\ \text{Coſ.}\ L'' = e''$, e $2(\text{Coſ.}\ L\ \text{Coſ.}\ L''\ \text{Coſ.}\ C + \text{Sen.}\ L\ \text{Sen.}\ L'') = f$, ſubſtituiremos eſtes valores na equaçaõ final do *num.* 11, e teremos $K^2 = x(x-b) + x''(x'' + e'' - fx) + g^2$.

15. *Achar a relaçaõ entre a diſtancia perihelia de hum Cometa, o ſeu raio vector, e o tempo que tem corrido deſde a paſſagem pelo perihelio* (Fig. 3.).

Eſtando o Sol no foco da parabola S, e ſendo a diſtancia perihelia $SP = p$, a altura devida á velocidade perihelia do Cometa $= h$, o ſeu raio vector actual $SC = r$, a anomalia verdadeira $CSP = u$, e o tempo, que gaſtou o Cometa em a deſcrever, $= \tau$, he demonſtrado na theorica das forças centraes, que teremos $\tau : 1 :: \int \frac{1}{2} r^2 du : \frac{1}{2} p\sqrt{2gh}$,

e conſeguintemente $\int r^2 du = \tau p \sqrt{2gh}$, qualquer que ſeja a Orbita deſcrita pelo Cometa.

16. Agora ſuppondo a Orbita parabolica, pela natureza d'ella teremos, como todos ſabem, Coſ. $\frac{1}{2} u = \sqrt{\frac{p}{r}}$, e conſeguintemente Sen. $\frac{1}{2} u = \sqrt{\frac{r-p}{r}}$. Differenciando eſta ultima equaçaõ, ſerá $\frac{1}{2} du$ Coſ. $\frac{1}{2} u$, ou $\frac{1}{2} du \sqrt{\frac{p}{r}}$ $= \frac{p\,dr}{2r^2 \sqrt{\frac{r-p}{r}}}$, e $r^2 du = r dr \sqrt{\frac{p}{r-p}}$. Conſeguintemente teremos $\tau \sqrt{2pgh} = \int \frac{r\,dr}{\sqrt{(r-p)}} = 2r\sqrt{(r-p)} - 2\int dr \sqrt{(r-p)}$ $= 2r\sqrt{(r-p)} - \frac{4}{3}\sqrt{(r-p)^3} = 2r\sqrt{(r-p)} - \frac{4}{3}(r-p)\sqrt{(r-p)}$ $= \left(\frac{2}{3} r + \frac{4}{3} p\right) \sqrt{(r-p)}$, ſem ajuntar conſtante, porque $r = p$ dá $\tau = 0$, como deve ſer.

17. Falta-nos exprimir a velocidade perihelia h por meio de quantidades conhecidas. Para iſſo reflectiremos, que ſendo f a diſtancia do Sol, em que a força d'elle he $= g$, ſe demonſtra na theorica das forças centraes, que nas Orbitas parabolicas he $ph = f^2$. E porque ſuppondo o eixo maior da Orbita terreſtre $= A$, o tempo periodico d'ella $= T$, e a circunferencia do circulo, que tem a unidade por diametro, $= c$, ſe moſtra tambem na meſma theorica, que he $f^2 = \frac{c^2 A^3}{2g \cdot T^2}$, teremos $2gph = \frac{c^2 A^3}{T^2}$, e $\tau = \frac{2T}{3cA\sqrt{A}}(r + 2p)\sqrt{(r-p)}$.

18. Como até aquí naõ havemos eſcolhido unidade para as diſtancias lineares, tomaremos agora para iſſo a diſtancia media do Sol á terra, de que ordinariamente

uſaõ

usaõ os Astronomos, a qual he ametade do eixo da Orbita terrestre, e teremos $A=2$, e $\tau=\frac{T}{3c\sqrt{2}}(r+2p)\sqrt{(r-p)}$.

Do mesmo modo tomando d'aquí por diante hum dia medio por unidade dos tempos, será $T=365,25638$, e $\frac{T}{3c\sqrt{2}}=27,403857$. E designando este numero por n (cujo logarithmo he 1.4378117) teremos finalmente $\tau=n(r+2p)\sqrt{(r-p)}$.

19. *Achar a relaçaõ entre dous raios vectores de huma Orbita parabolica, a corda do arco por elles comprehendido, e a distancia perihelia* (Fig. 3.).

Seja $SP=p$, $SC=r$, $SC''=r''$, $r+r''=R$, $CC''=K$, $PSC=u$, e $CSC''=z$. Pela natureza da Orbita teremos $\text{Cos.}\frac{1}{2}u=\sqrt{\frac{p}{r}}$, $\text{Cos.}\left(\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}z\right)=\sqrt{\frac{p}{r''}}$, e consequintemente $\sqrt{\frac{r}{r''}}=\frac{\text{Cos.}\left(\frac{1}{2}u+\frac{1}{2}z\right)}{\text{Cos.}\frac{1}{2}u}=\text{Cos.}\frac{1}{2}z-\text{Sen.}\frac{1}{2}z.\text{Tg.}\frac{1}{2}u$, donde se collige $\text{Tg.}\frac{1}{2}u=\frac{\text{Cos.}\frac{1}{2}z-\sqrt{\frac{r}{r''}}}{\text{Sen.}\frac{1}{2}z}$. Logo

$$\frac{1}{\text{Cos.}^2\frac{1}{2}u}=1+\text{Tg.}^2\frac{1}{2}u=\frac{1+\frac{r}{r''}-2\,\text{Cos.}\frac{1}{2}z\sqrt{\frac{r}{r''}}}{\text{Sen.}^2\frac{1}{2}z},$$

e reduzindo $\text{Cos.}^2\frac{1}{2}u=\frac{r''\left(1-\text{Cos.}^2\frac{1}{2}z\right)}{R-2\,\text{Cos.}\frac{1}{2}z\sqrt{rr''}}$. E como

$p=r$

$p = r$ Cof.$^2 \frac{1}{2} u$, teremos $p = \dfrac{rr''\left(1 - \text{Cof.}^2 \frac{1}{2} z\right)}{R - 2\ \text{Cof.} \frac{1}{2} z \sqrt{rr''}}$.

20. Por outra parte no triangulo CSC'' temos $K^2 = r^2 + r''^2 - 2rr''$ Cof. z, e conſeguintemente Cof. $z = \dfrac{r^2 + r''^2 - K^2}{2rr''}$. E como $1 +$ Cof. $z = 2$ Cof.$^2 \frac{1}{2} z$, ſerá Cof.$^2 \frac{1}{2} z = \dfrac{r^2 + 2rr'' + r''^2 - K^2}{4rr''} = \dfrac{R^2 - K^2}{4rr''}$, e Cof. $\frac{1}{2} z = \sqrt{\dfrac{R^2 - K^2}{4rr''}}$. Pelo que ſubſtituindo eſtes valores de Cof. $\frac{1}{2} z$, e Cof.$^2 \frac{1}{2} z$ na equaçaõ do numero precedente, teremos

$$p = \frac{rr'' - \frac{1}{4}(R^2 - K^2)}{R - \sqrt{(R^2 - K^2)}}.$$

21. *Achar a relaçaõ entre dous raios vectores, a corda do arco por elles comprehendido, e o tempo que o Cometa gaſtou em o deſcrever* (Fig. 3.).

Conſervando as denominaçóes precedentes de $SP = p$, $SC = r$, $SC'' = r''$, $r + r'' = R$, $CC'' = K$, e ſuppondo o tempo empregado pelo Cometa de P até $C = \tau$, e de C até $C'' = t$, ſerá $\tau = n(r + 2p)\sqrt{(r - p)}$, e $\tau + t = n(r'' + 2p)\sqrt{(r'' - p)}$ (n. 18.); e conſeguintemente $\frac{t}{n} = (r'' + 2p)\sqrt{(r'' - p)} - (r + 2p)\sqrt{(r - p)}$. Quadrando eſta equaçaõ, e reflectindo que $r^2 + r''^2 = R^2 - 2rr''$, e $r^3 + r''^3 = R^3 - 3Rrr''$, acharemos $\frac{t^2}{n^2} = R^3 - 3Rrr'' + 3R^2 p - 6rr''p - 8p^3 - 2(rr'' + 2Rp + 4p^2)\sqrt{(rr'' - Rp + p^2)}$.

22.

22. Para eliminarmos p d'esta equaçaõ com mais facilidade, do que podia ser pelos methodos geraes, reflectiremos, que a equaçaõ do *num.* 20. dá $rr'' - pR = \frac{1}{4}(R^2 - K^2) - p\sqrt{(R^2 - K^2)}$, e ajuntando de huma e outra parte p^2, será o segundo membro quadrado perfeito, e teremos $\sqrt{(rr'' - pR + p^2)} = \frac{1}{2}\sqrt{(R^2 - K^2)} - p$. A mesma equaçaõ dá evidentemente $4p^2\left(R - \sqrt{(R^2 - K^2)}\right) = 4prr'' - p(R^2 - K^2)$, e $2pR\left(R - \sqrt{(R^2 - K^2)}\right) = 2Rrr'' - \frac{1}{2}R(R^2 - K^2)$. E finalmente multiplicando o numerador, e denominador d'ella por $R + \sqrt{(R^2 - K^2)}$, dará $pK^2 = Rrr'' + rr''\sqrt{(R^2 - K^2)} - \frac{1}{4}R(R^2 - K^2) - \frac{1}{4}\sqrt{(R^2 - K^2)^3}$.

23. Isto supposto, substituindo na equaçaõ final do *num.* 21. o valor de $\sqrt{(rr'' - Rp + p^2)}$, teremos $\frac{t^2}{n^2} = R^3 - 3Rrr'' + 3R^2p - 4rr''p + 4p^2\left(R - \sqrt{(R^2 - K^2)}\right) - (rr'' + 2Rp)\sqrt{(R^2 - K^2)}$. Substituindo nesta o valor de $4p^2\left(R - \sqrt{(R^2 - K^2)}\right)$, teremos $\frac{t^2}{n^2} = R^3 - 3Rrr'' + pK^2 + 2pR\left(R - \sqrt{(R^2 - K^2)}\right) - rr''\sqrt{(R^2 - K^2)}$. E finalmente substituindo nesta os valores de pK^2, e $2pR\left(R - \sqrt{(R^2 - K^2)}\right)$, e reduzindo, será $\frac{4t^2}{n^2} = R(R^2 + 3K^2) - \sqrt{(R^2 - K^2)^3}$. Como assima determinamos o número constante n, será em consequencia d'elle $\frac{4}{n^2} = 0,0053264345$, cujo logarithmo he 7.7264366, e pondo d'aqui por diante ϕ pelo número correspondente a este logarithmo, teremos $R(R^2 + 3K^2) - \sqrt{(R^2 - K^2)^3} - \phi t^2 = 0$.

24. He de advertir, que $\sqrt{(R^2 - K^2)}$ muda de final todas as vezes que o angulo comprehendido pelos dous raios vectores paſſar de 180°. Mas como na indagaçaõ das Orbitas dos Cometas naõ ſaõ os intervallos das obſervações taõ grandes, que poſſa ter havido mais de 180° de movimento heliocentrico; por iſſo tanto a formula precedente, como a do *num.* 20, ſe podem applicar com ſegurança, ſem receio de incerteza alguma pelo que reſpeita ao ſinal da quantidade radical, que ellas involvem.

§. II.

Differentes Soluções, que reſultaõ dos Principios antecedentes.

25. Ainda que baſta conhecer duas diſtancias de hum Cometa á terra no tempo de duas obſervações, para com ellas determinar todos os elementos da Orbita, como adiante moſtraremos, naõ baſtaõ com tudo duas obſervações para virmos no conhecimento d'eſſas diſtancias. Porque as duas obſervações daõ ſomente a equaçaõ $R(R^2 + 3K^2) - \sqrt{(R^2 - K^2)^3} - \phi t^2 = 0$, na qual R, e K ſaõ funções das diſtancias, que buſcamos x, x''; e naõ fazemos mençaõ da outra equaçaõ do *num.* 20, a qual, trazendo comſigo outra quantidade incognita p, nada póde contribuir para determinar o Problema.

26. He pois neceſſario, que haja tres obſervações; e entaõ teremos mais equações, do que era preciſo para a determinaçaõ da queſtaõ, donde reſultaráõ differentes Soluções. Porque podendo tres obſervações comparar-ſe duas a duas de tres modos differentes, eſtá claro, que por cada modo teremos as duas equações do número precedente; e nos acharemos com ſeis equações, e quatro incognitas x, x', x'', p, a ultima das quaes ſe elimina com muita facilidade. Aſſim vemos, que he o Problema mais que determinado em ſegundo gráo, por ſobejarem duas equações.

27. Examinando em particular todas as formulas, que provem das tres obſervações, ſupporemos, que a longitude do Cometa menos a do Sol no inſtante da primeira obſervaçaõ ſe repreſenta por A, a diſtancia do Sol á terra por s, e a latitude do Cometa por L; que eſtas meſmas quantidades no inſtante da ſegunda obſervaçaõ ſaõ A', s', L'; e no da terceira A'', s'', L''. E pelo que havemos moſtrado no *num.* 9, he manifeſto, que fazendo $2\,s$ Coſ. L Coſ. $A = a$, $2\,s'$ Coſ. L' Coſ. $A' = a'$, e $2\,s''$ Coſ. L'' Coſ. $A'' = a''$, teremos $r^2 = x(x-a) + s^2$, $r'^2 = x'(x'-a') + s'^2$, e $r''^2 = x''(x''-a'') + s''^2$, ſendo x, x', x'' as diſtancias do Cometa á terra, e r, r', r'' os raios vectores correſpondentes, conforme a ordem das obſervações.

28. Suppondo tambem, que o movimento geocentrico do Cometa em longitude deſde a primeira até a ſegunda obſervaçaõ ſe repreſenta por C', e o do Sol por S', ſendo a corda do arco deſcrito neſſe intervallo $= K'$, eſtá claro, que para ter o valor de K'^2 naõ he neceſſario mais, do que pôr s', S', L', C' em lugar de s'', S, L'', C nas formulas do *num.* 14, e mudar B, g, b, e'', f em B', g', e, b', f'; ſuppondo, que naquelle lugar ſe fez a comparaçaõ das duas obſervações extremas. Aſſim fazendo $\frac{s' \text{ Sen. } S'}{s - s' \text{ Coſ. } S'} = \text{Tg. } \beta'$, $\frac{s' \text{ Sen. } S'}{\text{Sen. } B'} = g'$; $2\,g'$ Coſ. L' Coſ. $(A + B' + C') = b'$; $2\,g'$ Coſ. L Coſ. $(A + B') = e$, e 2 (Coſ. L Coſ. L' Coſ. C' + Sen. L Sen. L') $= f$, teremos $K'^2 = x'(x' + b') + x(x - e - f'x') + g'^2$.

29. Do meſmo modo ſuppondo que o movimento geocentrico do Cometa em longitude deſde a ſegunda até a terceira obſervaçaõ ſe deſigna por C'', o do Sol por S'', e a corda deſcrita pelo Cometa por K'', deveremos pôr nas meſmas formulas s', S'', L', C'' em lugar de s, S, L, C, e mudar B, g, b, e'', f em B', g'' b'' e', f'', pondo-ſe tambem

A'

A' em lugar de A. Pelo que fazendo $\frac{s'' \text{ Sen. } S''}{s' - s'' \text{ Cof. } S''} = \text{Tg. } B''$; $\frac{s'' \text{ Sen. } S''}{\text{Sen. } B''} = g''$; $2\, g'' \text{ Cof. } (A' + B'' + C'') \text{ Cof. } L'' = b''$; $2\, g'' \text{ Cof. } (A' + B'') \text{ Cof. } L' = e'$; e $2\, (\text{Cof. } L' \text{Cof.} L'' \text{Cof.} C'' + \text{ Sen. } L' \text{ Sen.} L'') = f''$, teremos $K''^2 = x''(x'' + b'') + x'(x' - e' - f'' x'') + g''^2$.

30. E finalmente fuppondo o tempo desde a primeira obfervaçaõ até a fegunda $= t'$, e da fegunda até a terceira $= t''$, e fazendo $R' = r + r'$, e $R'' = r' + r''$ teremos como no *num.* 23, $R'(R'^2 + 3\, K'^2) - V\, (R'^2 - K'^2)^3 - \phi\, t'^2 = 0$, e $R''(R''^2 + 3\, K''^2) - V\, (R''^2 - K''^2)^3 - \phi\, t''^2 = 0$; e como no *num.* 20, $p = \frac{rr' - \frac{1}{4}(R'^2 - K'^2)}{R' - V\, (R'^2 - K'^2)}$, e $p = \frac{r' r'' - \frac{1}{4}(R''^2 - K''^2)}{R'' - V\, (R''^2 - K''^2)}$; valores, que combinados com o do *num.* 20, daõ $\frac{rr'' - \frac{1}{4}(R^2 - K^2)}{R - V\, (R^2 - K^2)} - \frac{rr' - \frac{1}{4}(R'^2 - K'^2)}{R' - V\, (R'^2 - K'^2)} = 0$, e $\frac{rr'' - \frac{1}{4}(R^2 - K^2)}{R - V\, (R^2 - K^2)} - \frac{r' r'' - \frac{1}{4}(R''^2 - K''^2)}{R'' - V\, (R''^2 - K''^2)} = 0$, nas quaes duas equações naõ ha a incognita p.

31. Pelo que ajuntando todas as equações, que fómente involvem as tres incognitas x, x', x'', teremos as cinco feguintes:

$$R\, (R^2 + 3\, K^2) - V(R^2 - K^2)^3 - \phi\, t^2 = 0$$
$$R'\, (R'^2 + 3\, K'^2) - V(R'^2 - K'^2)^3 - \phi\, t'^2 = 0$$
$$R''(R''^2 + 3\, K''^2) - V(R''^2 - K''^2)^3 - \phi\, t''^2 = 0$$

rr''

$$\frac{rr'' - \frac{1}{4}(R^2 - K^2)}{R - \sqrt{(R^2 - K^2)}} - \frac{rr' - \frac{1}{4}(R'^2 - K'^2)}{R' - \sqrt{(R'^2 - K'^2)}} = 0$$

$$\frac{rr'' - \frac{1}{4}(R^2 - K^2)}{R - \sqrt{(R^2 - K^2)}} - \frac{r'r'' - \frac{1}{4}(R''^2 - K''^2)}{R'' - \sqrt{(R''^2 - K''^2)}} = 0,$$

nas quaes bem ſe vê, que ſendo r, R, K &c. funcções de x, x', x'', naõ ſe involvem mais incognitas do que eſtas tres, que ſaõ as diſtancias do Cometa á terra nos tres inſtantes das obſervações.

32. Como pois he ſabido, que para a determinaçaõ de tres incognitas baſtaõ outras tantas equações, podemos ſervir-nos para iſſo de tres quaesquer das cinco precedentes, donde reſultaráõ tantas ſoluções differentes, quantas ſaõ as combinações diverſas de cinco quantidades tomadas tres a tres. Aſſim temos conſeguido em lugar de huma, que buſcavamos, dez ſoluções differentes do noſſo Problema, as quaes todas devem dar para x, x', x'' os meſmos valores, ſendo as obſervações exactas, e as Orbitas rigoroſamente parabolicas; mas faltando eſtas condições, cada huma das combinações dará differentes valores approximados das ditas incognitas.

33. Póde, e ha neceſſariamente de ſucceder, que alguma das combinações dê valores mais chegados á verdade do que as outras em algum caſo particular, naõ fazendo tanto effeito nella a falta das ſobreditas condições. Mas naõ havendo por iſſo razaõ em geral, que nos obrigue a dar preferencia a qualquer das combinações, eſcolheremos a das tres primeiras equações

$$R\left(R^2 + 3K^2\right) - \sqrt{\left(R^2 - K^2\right)^3} - \Phi t^2 = 0$$

$$R'\left(R'^2 + 3K'^2\right) - \sqrt{\left(R'^2 - K'^2\right)^3} - \Phi t'^2 = 0$$

$$R''\left(R''^2 + 3K''^2\right) - \sqrt{\left(R''^2 - K''^2\right)^3} - \Phi t''^2 = 0,$$

as quaes, como mais ſimples, e todas da meſma fórma, facilitaráõ notalvelmente os calculos, que ſobre ellas ſe haõ de fazer; e eſtas ſaõ as que anticipadamente communiquei á Academia, como equações fundamentaes da ſoluçaõ d'eſte Problema.

34. Agora as reduziremos a outra fórma, que ainda ſerá mais commoda para o calculo. Tomando a primeira por exemplo, bem ſe vê, que póde eſcrever-ſe d'eſta maneira $R^3\left(1+\frac{3K^2}{R^2}\right)-R^3\sqrt{\left(1-\frac{K^2}{R^2}\right)^3}-\phi t^2=0$. E ſuppondo $1-\frac{K^2}{R^2}=\omega^2$, ſerá $\sqrt{\left(1-\frac{K^2}{R^2}\right)}=\omega$, $\sqrt{\left(1-\frac{K^2}{R^2}\right)^3}=\omega^3$, e $1+\frac{3K^2}{R^2}=4-3\omega^2$; donde ſe reduzirá a equaçaõ a eſta fórma $R^3(4-3\omega^2-\omega^3)-\phi t^2=0$. Do meſmo modo ſe reduzem as outras duas, ſuppondo $1-\frac{K'^2}{R'^2}=\omega'^2$, $1-\frac{K''^2}{R''^2}=\omega''^2$, e teremos as tres equações ſeguintes:

$$R^3\left(4-3\omega^2-\omega^3\right)-\phi t^2=0$$

$$R'^3\left(4-3\omega'^2-\omega'^3\right)-\phi t'^2=0$$

$$R''^3\left(4-3\omega''^2-\omega''^3\right)-\phi t''^2=0,$$

das quaes uſaremos com preferencia, quando paſſarmos da theorica para a practica.

35. Se os intervallos das obſervações ſe tomaſſem taõ eſtreitos, que K^2 foſſe muito pequena quantidade em comparaçaõ de R^2, podia o termo $\sqrt{(R^2-K^2)^3}$ reduzir-ſe a huma ſerie muito convergente, ſendo entaõ $\sqrt{(R^2-K^2)^3}$ $=R^3-\frac{3}{2}RK^2+\frac{3K^4}{8R}$ proximamente. E ſubſtituindo eſte valor na primeira equaçaõ do *num.* 33, teriamos

3 K²

$3K^2(12R^2 - K^2) - 8R\phi t^2 = 0$; e do meſmo modo ſe reduziriaõ as outras duas. Mas reflectindo por huma parte, que eſtas novas formulas naõ podem ſervir de muito para abreviar o trabalho das operações; e por outra, que a eſtreiteza dos intervallos, ao meſmo tempo que conduz para que as formulas ſe approximem, contribue igualmente para que os defeitos inevitaveis das obſervações produzaõ erros muito notaveis nos elementos, que d'ellas ſe deduzirem: naõ ha razaõ alguma, para que por ellas deixemos as formulas exactas, e rigoroſas dos *numeros* 33, e 34.

§. III.

Conſiderações geraes ſobre a reſoluçaõ das tres equações do Problema.

36. Viſto que o Problema ſe tem reduzido á determinaçaõ de tres incognitas por meio de outras tantas equações, pareceerá que naõ reſta mais do que uſar dos methodos conhecidos da eliminaçaõ, que nos levaráõ finalmente a huma equaçaõ, em que naõ haverá mais do que huma incognita, a qual conſeguintemente ſe determinará, e por meio d'ella as outras duas ſucceſſivamente. Mas quem ſabe a que galarim conduz a eliminaçaõ nas equações de gráos ſuperiores, facilmente entenderá, que por eſſe caminho ſe meteria em hum abiſmo.

37. Para moſtrar porém com eſpecialidade o que deveria reſultar d'eſſe methodo no noſſo caſo, ſerá neceſſario, que vejamos primeiramente a que eſtado ſe haõ de reduzir as equações, depois que ſe fizerem racionaes. E tomando por exemplo a primeira do *num.* 33, que dá $R(R^2 + 3K^2) - \phi t^2 = \sqrt{(R^2 - K^2)^3}$, quadraremos de ambas as partes, e acharemos $R^2(R^2 + 3K^2)^2 - 2\phi t^2 R (R^2 + 3K^2) + \phi^2 t^4 = (R^2 - K^2)^3$, donde evolvendo as po-

potencias indicadas, e reduzindo, teremos $K^6 + 9R^4K^2 + 6R^2K^4 - 2\phi t^2 R^3 - 6\phi t^2 K^2 R + \phi^2 t^4 = 0$; equaçaõ, que parece racional, sem toda-via o ser relativamente ás incognitas x, x'', como he necessario. As quantidades K^2, K^4, K^6 sim saõ funcções racionaes d'ellas, mas as potencias de R todas involvem irracionalidade.

38. Como pois temos $R = r + r''$, será $R^2 = r^2 + r''^2 + 2rr''$, $R^3 = (r^2 + 3r''^2)r + (r''^2 + 3r^2)r''$, $R^4 = r^4 + r''^4 + 6r^2r''^2 + 4(r^2 + r''^2)rr''$. Logo suppondo $r^2 + r''^2 = A$, $r^2 + 3r''^2 = B$, $r''^2 + 3r^2 = C$, $r^4 + r''^4 + 6r^2r''^2 = D$, funcções todas racionaes de x, e x'', teremos $R = r + r''$, $R^2 = A + 2rr''$, $R^3 = Br + Cr''$, $R^4 = D + 4Arr''$; e substituindo estes valores na equaçaõ do numero precedente, teremos $K^6 + 9DK^2 + 6AK^4 + \phi^2t^4 + (36AK^2 + 12K^4)rr'' - (2\phi t^2 B + 6\phi t^2 K^2)r - (2\phi t^2 C + 6\phi t^2 K^2)r'' = 0$.

39. E fazendo, para abreviar, $K^6 + 9DK^2 + 6AK^4 + \phi^2t^4 = E$, $36AK^2 + 12K^4 = F$, $2\phi t^2 B + 6\phi t^2 K^2 = G$, $2\phi t^2 C + 6\phi t^2 K^2 = H$, teremos $r'' = \frac{E - Gr}{H - Fr}$, $r''^2 = \frac{E^2 - 2EGr + G^2r^2}{H^2 - 2HFr + F^2r^2}$, donde se tira $r = \ldots\ldots$ $\frac{E^2 + G^2r^2 - H^2r''^2 - F^2r^2r''^2}{2EG - 2HFr''^2}$, e conseguintemente

$$(E^2 + G^2r^2 - H^2r''^2 - F^2r^2r''^2)^2 - r^2(2EG - 2HFr''^2)^2 = 0;$$

equaçaõ livre de irracionalidade relativamente a x, e x''.

40. He pois facil de vêr em primeiro lugar, que na equaçaõ precedente haverá hum termo sem x, nem x'', porque E^2 o tem, e conseguintemente naõ se poderá a equaçaõ abaixar do gráo, em que sahir; e em segundo lugar, que sendo E do sexto gráo a respeito de x, x'',

será

ſerá E^2 do duodecimo ; e como ſe ha de quadrar outra vez , ſerá a equaçaõ do vigeſimo quarto gráo relativamente a ambas as incognitas. O meſmo ſuccederá na reducçaõ das outras duas equações.

41. Agora ſe com as duas primeiras reduzidas imaginarmos, que ſe elimina a incogina commua x, viremos neceſſariamente a dar em huma equaçaõ do gráo 576 , na qual haverá ſómente x' , e x'' ; e uſando d'eſta juntamente com a terceira para eliminar x'', teriamos a equaçaõ final ſómente com x' , mas eſſa ſería do gráo 13824 , conforme o que ſe acha demonſtrado na *Theorica geral das eliminações.* Além do número exorbitante de termos, que devia ter eſta equaçaõ , os coefficientes ſeriaõ funcções taõ longas, e complicadas das quantidades dadas, que naõ poderia cada hum d'elles eſcrever-ſe ſenaõ em hum grande volume.

42. Do meſmo modo acharemos, que as equações approximadas, que havemos indicado no *num.* 35 , conduziriaõ a huma equaçaõ final do gráo 4096. E ſe os intervallos foſſem taõ pequenos, que naquellas equações ſe pudeſſe desprezar K^2 em comparaçaõ de $12 R^2$, ſuppoſiçaõ que as reduziria a eſta fórma $R K^2 = \frac{2}{9} \phi t^2$, ainda aſſim naõ poderia fazer-ſe a eliminaçaõ, ſem cahir em huma equaçaõ do gráo 512 , a qual como he abſolutamente impraticavel, nenhuma ventagem util leva ás precedentes. Donde ſe conclue, que por meio da eliminaçaõ naõ pode já mais reſolver-ſe eſta queſtaõ , quaesquer que ſejaõ as equações fundamentaes, porque ſempre haõ de ſer muitas, e de gráo ſuperior, para darem por fim huma equaçaõ impraticavel, como as precedentes.

43. Mas ainda que realmente pudeſſemos haver huma equaçaõ final, que foſſe acceſſivel ao calculo, naõ ganhariamos por iſſo mais, do que huma elegancia apparente na ſoluçaõ, á cuſta de huma multiplicaçaõ incrivel de tra-

balho. Porque naõ havendo meio geral, e directo para resolver as equações, que passaõ do quarto grão, sempre se havia de recorrer ao methodo das falsas posições, ou a outro equivalente, para conseguir a resoluçaõ d'essa complicadissima equaçaõ, a que teriamos reduzido o Problema; e, sendo isto assim, muito mais breve, e mais expedito sería applicar immediatamente esses methodos ás equações fundamentaes, conservadas na fórma simples, em que se achaõ.

44. Reduz-se pois a questaõ a achar tres quantidades x, x', x'' taes, que formando-se com ellas pelas equações auxiliares dos *num.* 27, e 28 os valores de R, R', R'', e K, K', K'', estes sejaõ os que convem para se verificarem as equações fundamentaes do *num.* 33. Vejamos o que nisso póde fazer o methodo das falsas posições.

45. Se cada huma das equações fundamentaes involvesse as tres incognitas, sería bem trabalhoso este methodo, que poderiamos chamar do segundo grão, por haverem de cahir as supposições sobre duas das mesmas incognitas. Assim viria a soluçaõ a ter o grande inconveniente do methodo, que actualmente praticaõ os Astronomos, os quaes se achaõ na indespensavel necessidade de estabelecer as supposições sobre duas quantidades desconhecidas, que de ordinario costumaõ ser as distancias encurtadas correspondentes a duas observações. A unica ventagem, que se poderia considerar, he que elles saõ obrigados a repartir a attençaõ por muitas cousas, fazendo raciocinios a cada passo que haõ de dar, e nós, livres de todas as considerações accessorias, estariamos com tres regras de formulas algebricas á vista, sem outro cuidado mais, do que achar as hypotheses, que as verificassem.

46. Succede porém felizmente, que a combinaçaõ das tres equações, que escolhemos, tem a ventagem de se conterem nellas as incognitas duas a duas, donde se concluirá todo o negocio com maior facilidade, cahindo as suppo-

poſições ſobre huma ſó incognita. Porque naõ contendo a primeira equaçaõ fundamental, ſenaõ as duas incognitas x, e x'', eſtá claro, que eſtabelecendo huma ſuppoſiçaõ arbitraria de x, por ella ſe determinará x''. E como a ſegunda equaçaõ contém ſomente x, e x', por ella com a meſma ſuppoſiçaõ de x ſe determinará x'. Aſſim teremos tres quantidades x, x', x'', que ſatisfazem ás duas primeiras equações; e ſe tambem ſatisfizeſſem á terceira, eſtaria reſolvida a queſtaõ. Naõ ſatisfazendo porém, ſe notará o erro, e fazendo outra ſuppoſiçaõ de x ſe procederá do meſmo modo, até achar outro erro na terceira equaçaõ; e com os dous erros, e a differença das hypotheſes, pela regra ſabida das falſas poſições, ſe achará o valor de x, ainda que pouco exacto, ſe os erros foraõ grandes. Mas fazendo outras duas ſuppoſições pouco differentes do primeiro valor achado, e continuando aſſim por diante a eſtreitar a differença das hypotheſes, ſe acharia o valor de x, e conſeguintemente o de x', e x'' com toda a exactidaõ, que foſſe neceſſaria.

47. Mas eſte methodo ainda requer dilatados, e enfadonhos calculos, conſiſtindo o principal embaraço na reſoluçaõ das primeiras duas equações, quando feita a ſuppoſiçaõ de x, ſe buſcarem os valores de x', e x''. Eſta reſoluçaõ ſe faz tambem por falſas poſições, que em cada hum dos caſos recahem ſobre a unica incognita, que ſe buſca. Porém iſto repetido tantas vezes, quantas forem as ſuppoſições de x, que ſe houverem de calcular, fará hum grande proceſſo de calculos, que ſe deverá evitar do modo que for poſſivel. E como a principal difficuldade conſiſte na reſoluçaõ de duas equações ſeparadamente, ſe pudermos haver outras mais faceis, ainda que ſejaõ approximadas, teremos conſeguido muito; porque, depois de ſabermos proximamente os valores das incognitas, podemos reſolver as equações fundamentaes com baſtante facilidade. Iſto he o que agora moſtraremos.

§.

§. IV.

Indagaçaõ dos Valores approximados das Incognitas do Problema.

48. Supponhamos, que C, C', C'' saõ os lugares do Cometa na sua Orbita (Fig. 4.), correspondentes ás tres observações, e tirando os raios vectores SC, SC', SC'', e as cordas CC'', CC', $C'C''$, será a corda CC'' cortada no ponto P na razaõ proxima dos tempos, que o Cometa gastou em correr os arcos CC', $C'C''$. Porque, pela regra sabida de Kepler, saõ os sectores CSC', $C'SC''$ na razaõ dos tempos; mas os sectores saõ entre si proximamente como os triangulos CSC', $C'SC''$; e estes, por terem a base commua SC', saõ como as alturas, e estas na razaõ de CP para PC'': logo seraõ os segmentos CP, PC'' proximamente na razaõ dos tempos. E se dos pontos C, C', C'', P se abaixarem perpendiculares para o plano da ecliptica, a projecçaõ da corda CC'' ficará cortada na mesma razaõ proxima dos tempos.

49. Bem se vê que o lugar intermedio C' póde cahir em hum ponto tal, que sejaõ os segmentos CP, PC'' na razaõ exacta dos tempos. Este ponto se acha pouco desviado do meio arco; e por isso convem, que os intervallos das observações sejaõ pouco desiguaes, ficando o mais breve, quanto for possivel, para a parte, donde se conjectura que estará o perihelio.

50. He tambem preciso saber o valor approximado do segmento $C'P$, cortado do raio vector medio SC' pela corda CC''. Para isso suppomos, que a força central de C até C'' he constantemente a mesma, que tem lugar no ponto C', e que sempre obra por direcções parallelas a $C'S$. Estas supposições naõ podem desviar-nos muito da verdade, quando os intervallos das observações naõ forem muito grandes; porque ainda que varía a intensaõ, e direcçaõ da

da força, tomamos proximamente o meio de huma, e outra a respeito do que saõ nos pontos extremos C, C''.

51. Conduzindo pois pelo Ponto C a Tangente CD, e por C'' a recta $C''D$ parallela a $C'S$, está claro, que será $C''D$ o effeito da força central da maneira que a temos supposto, no tempo que o Cometa gasta de C até C''. Para comparar este effeito com outro conhecido, supponhamos tambem que a terra na sua Orbita se achou nos pontos T, T', T'', quando o Cometa esteve respectivamente em C, C', C''; e feita a mesma construcçaõ, será $T''d$ o effeito da força central sobre a terra por todo o tempo, que ella gastou de T até T'', ou o Cometa de C até C''.

52. Sendo pois os effeitos de forças constantes no mesmo tempo proporcionaes a ellas, as quaes saõ, como se sabe, na razaõ duplicada inversa das distancias, teremos $C''D : T''d :: \overline{T'S}^2 : \overline{C'S}^2$. E sendo os effeitos da mesma força constante em differentes tempos na razaõ duplicada d'elles, teremos tambem $QC' : DC'' :: \overline{CP}^2 : \overline{CC''}^2$ (n. 48.); mas he tambem $QP : DC'' :: CP : CC''$: logo $QC' = \frac{DC''.\overline{CP}^2}{\overline{CC''}^2}$, $QP = \frac{DC''.CP}{CC''}$, e $C'P = QP - QC' = DC''\left(\frac{CP}{CC''} - \frac{\overline{CP}^2}{\overline{CC''}^2}\right)$. Semelhantemente acharemos $T'p = T''d\left(\frac{Tp}{TT''} - \frac{\overline{TP}^2}{\overline{TT''}^2}\right)$; e reflectindo que $\frac{CP}{CC''} - \frac{Tp}{TT''}$, por indicar cada huma d'estas expressões a razaõ proxima dos mesmos tempos, teremos $C'P : T'p :: DC'' : T''d :: \overline{ST'}^2 : \overline{S'C}^2$, e conseguintemente $C'P = T'p . \frac{\overline{ST'}^2}{\overline{SC'}^2}$.

53. Agora suppondo, que TT'' he hum arco de circulo descrito com o raio $ST' = s'$, e guardando as denominações, que já havemos estabelecido, será o angulo

$T'Tp = \frac{1}{2} S''$; $T'pT = 90° + \frac{1}{2} S' - \frac{1}{2} S''$, e a corda $T'T = 2s'$ Sen. $\frac{1}{2} S'$. Donde se segue que o triangulo $TT'p$ dará $T'p = \frac{2s'. \text{Sen.} \frac{1}{2} S' \text{Sen.} \frac{1}{2} S''}{\text{Cos.} \left(\frac{1}{2} S' - \frac{1}{2} S''\right)}$. Pelo que, fazendo $\frac{2s'^3. \text{Sen.} \frac{1}{2} S'. \text{Sen.} \frac{1}{2} S''}{\text{Cos.} \left(\frac{1}{2} S' - \frac{1}{2} S''\right)} = \Theta$, teremos $C'P = \frac{\Theta}{r'^2}$. Se dos pontos C', P se abaixarem perpendiculares ao plano da ecliptica, he facil de ver, que sendo a projecçaõ de $SC' = \rho'$, será a projecçaõ de $C'P = \frac{\Theta \rho'}{r'^3}$.

54. Sejaõ agora C, C', C'' (Fig. 5.) os lugares do Cometa marcados pelas perpendiculares abaixadas dos pontos da Orbita para o plano da ecliptica; e guardando as denominaçóes estabelecidas, teremos $ST' = s'$, $T'C' = x'$ Cos. L', $C'S = \rho'$, $C'P = \frac{\Theta \rho'}{r'^3}$, Sen. $T'C'S = \frac{s'. \text{Sen.} A}{\rho'}$, Cos. $T'C'S = \frac{x' \text{Cos.} L' - s' \text{Cos.} A'}{\rho'}$. Isto posto, se conduzirmos as rectas BP, DP, e designarmos $C'DP$ por ψ, e $C'BP$ por χ, o triangulo $DC'P$ dará Sen. $\psi = \frac{C'P. \text{Sen.} DC'P}{DP} = \frac{\Theta s'. \text{Sen.} A'}{DP. r'^3}$, e Sen. $(DC'P + \psi) = \frac{C'D. \text{Sen.} DC'P}{DP}$, isto he, $\frac{s' \text{Sen.} A}{\rho'} \text{Cos.} \psi + \frac{\text{Sen.} \psi (x' \text{Cos.} L' - s' \text{Cos.} A')}{\rho'}$.

=

$= C' D \frac{s' \text{ Sen. } A'}{\rho'. DP}$; e fubſtituindo o valor de Sen. ψ, teremos Cof. $\psi = \frac{r'^3 . C'D - \Theta (x' \text{ Cof. } L' - s' \text{ Cof. } A')}{r'^3 . DP}$. Do mefmo modo fe achará Sen. $\chi = \frac{\Theta s'. \text{ Sen. } A'}{BP . r'^3}$, e Cof. $\chi =$ $\frac{r'^3 . C' B - \Theta (x' \text{ Cof. } L' - s' \text{ Cof. } A')}{r'^3 . BP}$.

55. E porque os triangulos $DC''P$, $AC''C$, que tem o angulo em C'' commum, daõ Sen. $AC''C = \frac{AC . \text{Sen.} CAC''}{CC''} =$ $\frac{DP. \text{ Sen } . C''DP}{C''P}$, lembrando-nos, que temos fuppofto $CAC'' = C$, $C''DC' = C''$, e que he $C''P : CC'' :: t'' : t$ proximamente (*num.* 48.), teremos $AC = \frac{t . DP . \text{Sen.} (C'' + \psi)}{t'' \text{ Sen. } C}$, iſto he, $AC = \frac{t . DP (\text{Sen. } C'' \text{ Cof. } \psi + \text{ Sen. } \psi \text{ Cof. } C'')}{t'' \text{ Sen. } C}$. Pelo que fubſtituindo os valores de Sen. ψ e Cof. ψ, e reduzindo, teremos $AC = \frac{t \text{ Sen. } C''}{t'' \text{ Sen. } C} \left(C'D + \frac{\Theta}{r'^3} \left(\frac{s' \text{Sen. } (A' + C'')}{\text{Sen. } C''} - x' \text{ Cof. } L' \right) \right)$. Porém $AT = \frac{g \text{ Sen. } (A + B + C)}{\text{Sen. } C}$, e $DT' =$ $\frac{g'' \text{ Sen. } (A' + B'' + C'')}{\text{Sen. } C''}$. Logo fuppondo $\frac{g \text{ Sen. } (A + B + C)}{\text{Sen. } C \text{ Cof. } L} = h$, $\frac{g'' \text{ Sen. } (A' + B' + C')}{\text{Sen. } C'' \text{ Cof. } L'} = \kappa$, $\frac{s' \text{Sen. } (A' + C'')}{\text{Sen. } C'' \text{ Cof.} L'} = q$, $\frac{t \text{ Sen.} C'' \text{ Cof.} L'}{t'' \text{ Sen.} C \text{ Cof.} L}$ $= m$, teremos $x = h + m (x' - \kappa) + \frac{\Theta m (q - x')}{r'^3}$

56. Do mefmo modo os triangulos BCP, ACC'', que

que tem o angulo commum em C, daraõ $AC'' = BP \left(\frac{t \text{ Sen.} (C' - \chi)}{t' \text{ Sen.} C}\right) = BP . \frac{t}{t' \text{ Sen.} C} (\text{Sen.} C' \text{ Cof.} \chi - \text{Sen.} \chi \text{Cof.} C)$.
E fazendo fubftituiçóes, e reducçóes femelhantes, acharemos

$$AC'' = \frac{t \text{ Sen.} C'}{t' \text{ Sen.} C} \left(C'B + \frac{\Theta}{r'^3} \left(\frac{s' \text{ Sen.} (C' - A')}{C'} - x' \text{ Cof.} L' \right) \right).$$

Mas he $AT'' = \frac{g \text{ Sen.} (A + B)}{\text{Sen.} C}$, e $BT' = \frac{g' \text{ Sen.} (A + B')}{\text{Sen.} C'}$.

Logo fuppondo $\frac{g \text{ Sen.} (A + B)}{\text{Sen.} C \text{ Cof.} L''} = h'$, $\frac{g' \text{ Sen.} (A + B')}{\text{Sen.} C' \text{ Cof.} L'} = \kappa'$,
$\frac{s' \text{ Sen.} (C' - A')}{\text{Sen.} C' \text{ Cof.} L'} = q'$, e $\frac{t \text{ Sen.} C' \text{ Cof.} L'}{t' \text{ Sen.} C \text{Cof.} L''} = m'$, acharemos

$$x'' = h' + m' (x' - \kappa') + \frac{\Theta m' (q' - x')}{r'^3}.$$

57. Temos pois confeguido por meio das duas equaçóes finaes dos numeros precedentes a grande ventagem de evitar as longas operaçóes, que eraõ precifas para a refoluçaõ das duas equaçóes fundamentaes, de que fizemos mençaõ no *num.* 47, em quanto fe trata de achar os primeiros valores approximados das incognitas. Eftas duas equaçóes fe haõ de combinar com huma das equaçóes fundamentaes, donde refultaõ tres modos diverfos de refolver proximamente a queftaõ, entre os quaes efcolheremos o que fe contém nas tres equaçóes feguintes:

$$x = h + m (x' - \kappa) + \frac{\Theta m (q - x')}{r'^3}$$

$$R'^3 (4 - 3 \omega'^2 - \omega'^3) - \Phi t'^2 = 0$$

$$x'' = h' + m' (x' - \kappa') + \frac{\Theta m' (q' - x')}{r'^3}$$

das quaes baftariaõ as duas primeiras, fe nos contentaffemos de determinar os elementos da Orbita com os valores approximados de x e x', que provem d'ellas, fem os

que-

querer ulteriormente corrigir por meio das tres equações fundamentaes.

58. Como $r'^2 = x'(x'-a') + s'^2$, as duas equações approximadas naõ contém mais do que a incognita x' no ſegundo membro. Aſſim, fazendo cahir ſobre ella as falſas poſições, e tomando arbitrariamente hum valor de x', facilmente acharemos o de x pela primeira equaçaõ, os quaes ſe ſubſtituiráõ na ſegunda, e ſe notará o erro. Continuando d'eſte modo as operações, ſe achará o valor de x', que convem para verificar as duas primeiras equações, e com elle ſe determinará x'' pela terceira.

59. Mas como as falſas poſições, em quanto andaõ por longe, encaminhaõ lentamente para o deſcubrimento da quantidade, que ſe buſca, uſaremos com grande ventagem do methodo das Interpolações, que a paſſos incomparavelmente mais rapidos nos levará onde pertendemos. Aſſim, tomando tres valores hypotheticos de x' em progreſſaõ arithmetica, e denotando o primeiro por x', o ſegundo por $x'+\eta$, e o terceiro por $x'+2\eta$, calcularemos os valores correſpondentes de x, e veremos que reſultados dá pela ſubſtituiçaõ delles a ſegunda equaçaõ do *num.* 57, os quaes ſuppomos que por ſua ordem ſaõ γ, γ', γ''. Entaõ, denotando por dx' a correcçaõ do primeiro valor hypothetico x', em conſequencia do methodo das Interpolações, teremos

$$dx' = \frac{\eta(3\gamma - 4\gamma' + \gamma'')}{2(\gamma - 2\gamma' + \gamma'')} \pm \sqrt{\left(\frac{\eta^2(2\gamma - 4\gamma' + \gamma'')}{4(\gamma - 2\gamma' + \gamma')} - \frac{2\gamma\eta^2}{(\gamma - 2\gamma' + \gamma'')}\right)}.$$

60. No uſo da formula precedente naõ póde haver dúvida, em quanto ao ſinal ambiguo da parte radical, porque olhando para as quantidades γ, γ', γ'', logo ſe verá qual dos ſinaes convem para ſe chegar a deſvanecer o reſultado, que em lugar d'ellas ha de dar a equaçaõ fundamental.

61. Tambem naõ póde haver heſitaçaõ na eſcolha dos primeiros valores hypotheticos de x', porque quando os

Cometas ſe começaõ a ver da terra, quaſi ſempre eſtaõ mais vizinhos della, que o Sol. Por iſſo podemos ſempre tomar $x' = 0,2$ e $\eta = 0,4$, iſto he, tomar os tres valores hypotheticos 0,2, 0,6, e 1,0 para a primeira operaçaõ. E depois de achar a correcçaõ, tomar-ſe-haõ outros tres muito vizinhos do que ſe determinou, para novamente ſe corrigir; e quaſi nunca ſerá preciſo fazer terceira operaçaõ.

§. V.

Reſoluçaõ das tres Equações fundamentaes.

62. Conhecidas proximamente as diſtancias x, x', x'' pelo methodo precedente, com ellas podemos reſolver facilmente as equações rigoroſas do Problema pelo methodo das formulas differenciaes, as quaes daraõ as correcções d'ellas com a exactidaõ, que ſe quizer.

63. Para iſſo formaremos com os valores proximos de x, x', x'' os valores correſpondentes de R, R', R'', e ω, ω', ω'' por meio das equações auxiliares, e os ſubſtituiremos nas equações do *num.* 34, as quaes em vez de ſe verificarem, dando o ſegundo membro $=0$, ſupponhamos que o daõ por ſua ordem δ, δ', δ'', ſendo eſtas quantidades muito pequenas, como devem ſer, por ſuppormos, que os valores de x, x', x'', de que uſámos, ſaõ proximos aos verdadeiros. Entaõ, ſuppondo que as correcções d'aquelles valores ſaõ dx, dx', dx'', eſtes ſe deveráõ determinar pelas equações ſeguintes:

$$d\left(R^3(4-3\omega^2-\omega^3\right)+\delta=0$$

$$d\left(R'^3(4-3\omega'^2-\omega'^3\right)+\delta'=0$$

$$d\left(R''^3(4-3\omega''^2-\omega''^3\right)+\delta''=0$$

64. Começando pois pela evoluçaõ da primeira, teremos

$3R^2 dR(4-3\omega^2-\omega^3)-3R^3(2\omega d\omega+\omega^2 d\omega)+\delta=0$,
ou $3R^2\left(dR(4-3\omega^2-\omega^3)-2R\omega d\omega-R\omega^2 d\omega\right)+\delta=0$,
Porém he $1-\omega^2=\frac{K^2}{R^2}$, e conſeguintemente $-2R\omega d\omega=$
$\frac{2KdK}{R}-\frac{2K^2dR}{R^2}=\frac{2KdK}{R}-dR(2-2\omega^2)$, e $-R\omega^2 d\omega$
$=\frac{\omega KdK}{R}-dR(\omega-\omega^3)$. Logo ſubſtituindo eſtes valores, e fazendo, para abbreviar, $\frac{3}{2}R^2(2-\omega-\omega^2)=E$,
$\frac{3}{2}R(2+\omega)=F$, acharemos $E.2dR+F.2KdK+\delta=0$.

65. E porque $dR=dr+dr''$, e $2dr=\frac{dx(2x-a)}{r}$,
e $2dr''=\frac{dx''(2x''-a'')}{r''}$, ſuppondo $\frac{2dx-a}{r}=D$, e
$\frac{2x''-a''}{r''}=D''$, ſerá $2EdR=EDdx+ED''dx''$. Do meſmo modo differenciando a equaçaõ $K^2=x(x-b)+x''(x''+e''-fx)+g^2$, acharemos $2KdK=dx(2x-b-fx'')+dx''(2x''+e''-fx)$. Pelo que ſuppondo $DE+F(2x-b-fx'')=\alpha$, e $D''E+F(2x''+e''-fx)=\beta''$, teremos $\alpha dx+\beta''dx''+\delta=0$.

66. Por hum calculo ſemelhante, ſuppondo $\frac{3}{2}R'^2(2-\omega'-\omega'^2)=E'$, e $\frac{3}{2}R'(2+\omega')=F'$, acharemos $2E'dR'+2F'K'dK'+\delta'=0$. Mas $dR'=dr+dr'$, e $2dR'=\frac{dx(2x-a)}{r}+\frac{dx'(2x'-a')}{r'}$, e $2K'dK'=dx(2x-e-f'x')+dx'(2x'+b'-f'x)$. Logo ſuppondo

$\frac{2x'-a'}{r'} = D'$, $E'D' + F'(2x' + b' - f'x) = \alpha'$, e $E'D + F'(2x - e - f'x') = \beta$, ſerá $\alpha' dx' + \beta dx + \delta' = 0$.

67. Do meſmo modo tomando $\frac{3}{2} R''^2 (2 - \omega'' - \omega''^2) = E''$, e $\frac{3}{2} R''(2 + \omega'') = F''$, ſerá $2E''dR'' + 2F''K''dK'' + \delta'' = 0$, $2dR'' = \frac{dx'(2x' - a')}{r'} + \frac{dx''(2x'' - a'')}{r''} = D'dx' + D''dx''$, e $2K''dK'' = dx''(2x'' + b'' - f''x') + dx'(2x' - e' - f''x'')$. Pelo que, ſuppondo $E''D'' + F''(2x'' + b'' - f''x') = \alpha''$, e $E''D' + F''(2x' - e' - f''x'') = \beta'$, ſerá $\alpha''dx'' + \beta'dx' + \delta'' = 0$. E aſſim teremos para reſolver as tres equações ſeguintes:

$$\alpha\, dx + \beta''dx'' + \delta = 0$$
$$\alpha' dx' + \beta\, dx + \delta' = 0$$
$$\alpha''dx'' + \beta' dx' + \delta'' = 0.$$

68. Feita a reſoluçaõ pelo methodo conhecido, acharemos

$$dx = -\frac{\alpha'\alpha''\delta + \beta'\beta''\delta' - \alpha'\beta''\delta''}{\alpha\alpha'\alpha'' + \beta\beta'\beta''}$$

$$dx' = -\frac{\beta\, dx + \delta'}{\alpha'},\quad dx'' = -\frac{\alpha\, dx + \delta}{\beta''};$$

valores, que nos daraõ as correcções procuradas das quantidades ſuppoſtas x, x', x''. Com eſtas, depois de corrigidas, tornaremos a calcular os reſultados das equações fundamentaes δ, δ', δ'', e procedendo do meſmo modo, acharemos outras, e outras correcções, até ſe verificarem as ditas equações. Mas quaſi nunca ſerá preciſo na prática fazer ſegunda vez a operaçaõ precedente, ſe as obſervações forem bem eſcolhidas, e os intervallos d'ellas naõ forem muito desiguaes, nem exceſſivamente grandes. Porque ſendo neſſe caſo os primeiros valores, achados pela

ap-

approximaçaõ do §. IV, muito chegados aos verdadeiros, basta que huma vez se faça a operaçaõ precedente, para os corrigir quanto he necessario. Em geral nos governaremos pela grandeza das correcções achadas, para nos resolvermos a repetir, ou naõ repetir a operaçaõ.

69. Onde quer que se haja de parar, com os ultimos valores correctos se deveriaõ calcular as quantidades r, r'', R, ω, que haõ de servir na determinaçaõ dos elementos da Orbita. Mas será mais breve corrigir tambem por meio de formulas differenciaes os ultimos valores calculados d'ellas naquella operaçaõ, em que se parar. Assim teremos $dr = \frac{1}{2} D\,dx$; $dr'' = \frac{1}{2} D''\,dx''$, $dR = dr + dr''$. E porque $\omega\,d\omega = \frac{dR}{R}(1-\omega^2) - \frac{K\,dK}{R^2}$, e por outra parte $K\,dK = \frac{1}{2}dx(2x - b - fx'') + \frac{1}{2}dx''(2x'' + e'' - fx)$, sendo tambem $2x - b - fx'' = \frac{\alpha - DE}{F}$, e $2x'' + e'' - fx = \frac{\beta'' - D''E}{F}$, teremos $K\,dK = \frac{\alpha\,dx + \beta''\,dx'' - E(D\,dx + D''dx'')}{2F}$ $= -\frac{\delta}{2F} - R\,dR(1-\omega)$, e substituindo este valor, e reduzindo $d\omega = \frac{dR(2+\omega)(1-\omega)}{R\omega} + \frac{\delta}{2F\omega R^2}$.

70. Mas tornemos a fazer algumas considerações analyticas sobre as formulas differenciaes, que daõ as correcções de x, x', x''. Se no valor de dx desvanecesse juntamente o numerador, e o denominador, sería indicio manifesto, que as tres equações differenciaes naõ determinavaõ as correcções; e por consequencia, que nem as tres equações fundamentaes determinavaõ o Problema. Nesse caso huma das equações se conteria nas outras duas, como he facil de ver, procurando directamente as condições para isso necessarias. Multipliquemos a primeira por hum fa-

ctor indeterminado M, e a ſegunda por N; e ſommando-as, teremos $(M\alpha + N\beta)\,dx + M\beta''\,dx'' + N\alpha'\,dx' + M\delta + N\delta' = 0$. Eſta equaçaõ deverá ſer identica com a terceira das propoſtas, ſe ella depende das outras duas; e eſta condiçaõ dará $M\alpha + N\beta = 0$, $M\beta'' = \alpha''$, $N\alpha' = \beta'$, $M\delta + N\delta' = \delta''$ por equações de condiçaõ, das quaes ſe tira $M = \frac{\alpha''}{\beta''}$, $N = \frac{\beta'}{\alpha'}$; e ſubſtituindo eſtes valores na primeima, teremos $\alpha\alpha'\alpha'' + \beta\beta'\beta'' = 0$, $\alpha'\alpha''\delta + \beta'\beta''\delta' - \alpha'\beta''\delta'' = 0$.

71. Ainda que iſto ſeja huma conſideraçaõ puramente analytica, que naõ deve ter lugar na noſſa queſtaõ, todavia d'ahi podemos conhecer, que quando os valores do numerador, e denominador ſobreditos forem taõ pequenos, que ſe poſſaõ reputar quaſi deſvanecidos, ſerá o Problema muito proximo ao eſtado de indeterminado, e os valores que ſahirem para x, x', x'' naõ teraõ na praxe a exactidaõ neceſſaria. Iſto deve ſucceder neceſſariamente quando os intervallos das obſervações forem nimiamente pequenos, porque entaõ ſeraõ as equações quaſi identicas; e por iſſo ſe deve evitar a circunſtancia da grande proximidade das obſervações, ſobre a qual fundáraõ alguns Geometras as ſuas ſoluções d'eſte Problema, engenhoſas na theorica, inuteis na prática.

72. Outro embaraço ainda maior póde ſucceder, ſe no valor de dx ſómente deſvanecer o denominador, ou for muito pequeno em comparaçaõ do numerador. Entaõ ſahiria a correcçaõ de dx infinita, ou muito grande, contra o que devia ſer, por havermos já conſeguido o valor proximo de x pelo methodo do §. IV. Eſte inconveniente igualmente ſe havia de encontrar na reſoluçaõ da equaçaõ final, ſe pudeſſem eliminar-ſe praticamente as duas incognitas x', x''. Porque ſe tomaſſemos por x hum valor tal, que ſem embargo de ſer muito approximado, fizeſſe com tudo que o reſultado da equaçaõ foſſe hum maximo, ou hum minimo, o methodo das formulas differenciaes ſería inutil para o

cor-

corrigir, pois daria huma correcçaõ infinita, como he facil de entender, combinando os principios do dito methodo com a propriedade conhecida dos maximos, e minimos. E como as formulas differenciaes, que havemos dado, saõ huma abbreviatura, da que se havia de ter para a resoluçaõ da sobredita equaçaõ final, está claro, que para servirem utilmente naõ basta, que os valores de x, x', x'' se saibaõ proximamente; mas he necessario, que naõ estejaõ nos limites das raizes das equações respectivas, onde ellas daõ o maximo, ou minimo resultado.

73. Mas de qualquer fórma que se proceda, quasi sempre será impossivel satisfazer exactamente na prática ás tres equações fundamentaes. Porque pertencendo ellas a huma orbita rigorosamente parabolica, qual naõ he a dos Cometas, e havendo sempre alguns defeitos inevitaveis nas observações, posto que ella o fosse, naõ teraõ lugar aquellas equações senaõ proximamente; e assim trabalhariamos em vaõ se continuassemos as operações das formulas differenciaes com o fim de satisfazer com exactidaõ ás mesmas equações fundamentaes. Porque as correcções achadas encaminhariaõ para a verificaçaõ d'ellas até certo ponto, e depois d'isso ou tornariaõ a desviar-se, ou ficariaõ na alternativa de darem de huma operaçaõ para a outra os mesmos valores de dx, dx', dx'' com sinaes contrarios.

74. Havendo pois neste caso de parar necessariamente em alguma parte, naõ he o methodo, que havemos exposto, o mais proprio para nos mostrar o lugar mais ventajoso, em que devemos ficar. Para isso serve muito melhor o methodo das interpolações, o qual, ainda que he algum tanto mais extenso, tem a ventagem de dar a resoluçaõ exacta, quando he possivel, e quando naõ, a mais approximada de todas.

75. Suppondo que já conhecemos proximamente os valores de x, x', x'', com x, e x'' acharemos o resultado δ da primeira equaçaõ fundamental; e fazendo sómente variar x'', buscaremos a sua correcçaõ, que verifique a dita equa-

equaçaõ, para o que baſta calcular a quantidade β'', e ſerá $dx'' = -\frac{\delta}{\beta''}$, repetindo-ſe eſta operaçaõ, ſe for neceſſario. Conſervando o meſmo valor de x, buſcaremos depois a correcçaõ de x' de maneira, que ſe ſatisfaça á ſeſegunda equaçaõ fundamental, uſando para iſſo da formula $dx' = -\frac{\delta'}{\alpha'}$. Entaõ ſubſtituiremos os valores achados de x', e x'' na terceira equaçaõ fundamental, cujo reſultado deſignaremos por γ; e tomando outros dous valores de x em progreſſaõ arithmetica $x+\eta$, $x+2\eta$, ſendo η huma quantidade arbitraria pouco differente das correcçóes dx', dx'', que ſe acháraõ na operaçaõ antecedente, procederemos do meſmo modo, até acharmos na terceira equaçaõ os reſultados reſpectivos γ', γ''. Entaõ deſignando por dx a correcçaõ do primeiro valor hypothetico de x, teremos

$$dx' = \frac{\eta(3\gamma-4\gamma'+\gamma'')}{2(\gamma-2\gamma'+\gamma'')} \pm \sqrt{\left(\frac{\eta^2(3\gamma-4\gamma'+\gamma'')}{4(\gamma-2\gamma'+\gamma'')} - \frac{2\gamma\eta^2}{(\gamma-2\gamma'+\gamma'')}\right)}.$$

valor, que ſerá real todas as vezes que ſe puder ſatisfazer juntamente ás tres equaçóes; e imaginario, quando naõ for poſſivel. Mas a parte real d'eſte valor dará a correcçaõ propria de x, para que ſatisfazendo-ſe ás duas primeiras equaçóes, a terceira dê o reſultado menor que he poſſivel.

76. Se com o valor de x naõ puder achar-ſe x'', que ſatisfaça exactamente á primeira equaçaõ fundamental, deixaremos eſta para prova; e tomando x' para fundamento da interpolaçaõ, buſcaremos os valores de x, e x'' que ſatisfaçaõ ás duas ultimas equaçóes. Do meſmo modo faremos cahir a interpolaçaõ ſobre x'', ſe a ſegunda equaçaõ naõ admittir ſoluçaõ exacta. Mas ſe duas, ou todas tres eſtiverem no meſmo caſo, deveremos entaõ uſar da interpolaçaõ, para a reſoluçaõ de cada huma ſer do modo mais approximado que he poſſivel. Eſtes calculos ſómente ſe fariaõ no caſo de haver obſervaçóes exactiſſimas, e de ſe que-

querer ſaber o reſultado da hypotheſe parabolica; e entaõ deveria haver tambem a advertencia de corrigir os lugares obſervados do effeito da parallaxe, a qual ſe deduzirá com facilidade dos primeiros valores approximados de x, x', x''.

§. VI.

Determinaçaõ dos Elementos da Orbita.

77. Como os elementos da orbita parabolica de hum Cometa ſe podem determinar por meio de duas diſtancias conhecidas d'elle á terra, e como a natureza da queſtaõ naõ permitte, que ſe achem eſſas duas diſtancias, ſem igualmente ſe indagar a terceira, temos aqui tambem mais do que era neceſſario para reſolver o Problema. As tres diſtancias x, x', x'', tomadas duas a duas, daraõ tres modos differentes de concluir os elementos procurados, os quaes deveráõ ſahir os meſmos, ſe as obſervaçóes forem exactas, e a orbita rigoroſamente parabolica. Mas, faltando eſtas condiçóes, daraõ tres ſyſtemas differentes de elementos, ſendo as differenças mais, ou menos ſenſiveis, conforme as faltas das meſmas condiçóes. Naõ havendo outra razaõ de preferencia, eſcolheremos as diſtancias extremas x, x''; e quando as circunſtancias pedirem que uſemos de outras, como abaixo ſe dirá, o calculo ſerá da meſma maneira, havendo ſómente a advertencia de uſar das formulas reſpectivas ás diſtancias, de que nos quizermos ſervir.

78. Primeiramente determinaremos com muita facilidade a diſtancia perihelia. Porque com as diſtancias x, x'' calcularemos as quantidades correſpondentes r, r'', R, ω (*num.* 69); e introduzindo a quantidade ω na equaçaõ do *num.* 20, em que achamos $p = \dfrac{rr'' - \frac{1}{4}(R^2 - K^2)}{R - \sqrt{(R^2 - K^2)}}$, tere-

mos mais ſimplesmente $p = \frac{rr'' - \frac{1}{4} R^2 \omega^2}{R(1 - \omega)}$.

79. Com igual facilidade conheceremos o inſtante da paſſagem pelo perihelio. Porque deſignando por τ a differença de tempo entre o inſtante da primeira obſervaçaõ, e o da paſſagem pelo perihelio, teremos $\tau = n(r + 2p) \sqrt{(r - p)}$ (*num.* 18). A differença τ he additiva ao tempo da primeira obſervaçaõ, todas as vezes que for $r > r''$; mas ſendo $r < r''$ póde ſer additiva, ou ſubtractiva. Neſſe caſo, para nos livrarmos de ambiguidade, calcularemos a differença τ'' entre o inſtante da paſſagem pelo perihelio, e o da terceira obſervaçaõ, pela formula reſpectiva $\tau'' = n(r'' + 2p) \sqrt{(r'' - p)}$; e a differença τ'' ſerá ſubtractiva do tempo da terceira obſervaçaõ: ſendo evidente, que no caſo de $r > r''$ fica neceſſariamente a paſſagem pelo perihelio para diante da primeira obſervaçaõ, e no caſo de $r < r''$ para traz da terceira, quer o Cometa ſeja directo, quer retrogrado. O caſo de $r = r''$ naõ careceria de calculo algum, pois cahiria a paſſagem juſtamente no meio do intervallo das duas obſervações.

80. Para ſe deduzir o reſto dos elementos, ſupponhamos o Cometa no tempo da primeira obſervaçaõ em C (Fig. 6.), a Terra em T, o Sol em S. Abaixando para o plano da ecliptica a perpendicular CP, o ponto P marcará o lugar do Cometa reduzido á ecliptica, e conforme as noſſas denominações, ſerá $TC = x$, $TS = s$, $SC = r$, $CTP = L$. Supponhamos tambem, que SN repreſenta a linha dos nodos, ou a interſecçaõ do plano da orbita com o da ecliptica, cahindo o nodo aſcendente para a parte de N, e entendendo-ſe ſempre por nodo aſcendente o ponto, donde a orbita, ſegundo a direcçaõ do movimento do Cometa, principia a deſviar-ſe da ecliptica para a parte boreal. Se por CP imaginarmos que paſſa hum plano NPC perpendicular á linha dos nodos SN, ſerá CNP a

in-

inclinaçaõ dos planos da orbita, e ecliptica, que ſupporemos $=I$; e conduzindo pelo ponto T a recta TQ parallela, e TR perpendicular a SN, he evidente, que ſerá PTQ a longitude do Cometa menos a do nodo aſcendente, e TSN a longitude da Terra viſta do Sol menos a longitude do meſmo nodo. Aſſim deſignando a longitude do nodo por N, a do Cometa por l, e a do Sol por Σ, teremos $PTQ = l - N$, e $TSN = \Sigma + 180° - N$.

81. Suppoſta a conſtrucçaõ precedente, he facil de ver, que teremos $\text{Cot.}\, I = \frac{PN}{CP}$, $CP = x\,\text{Sen.}L$, $TP = x\,\text{Coſ.}L$, $PN = PQ + TR = TP.\,\text{Sen.}\,(l - N) + s.\,\text{Sen.}\,(\Sigma + 180° - N)$ $= x\,\text{Coſ.}\,L\,\text{Sen.}\,(l - N) - s\,\text{Sen.}\,(\Sigma - N)$; e ſuppondo, para abbreviar, $x\,\text{Sen.}L = \varpi$, $x\,\text{Coſ.}L = \lambda$, teremos depois de feita a ſubſtituiçaõ $\text{Cot.}\, I = \frac{\lambda\,\text{Sen.}\,(l - N) - s\,\text{Sen.}\,(\Sigma - N)}{\varpi}$. Do meſmo modo ſuppondo para o inſtante da terceira obſervaçaõ a longitude do Cometa $= l''$, a do Sol $= \Sigma''$, $x''\,\text{Sen.}L'' = \varpi''$, $x''\,\text{Coſ.}L'' = \lambda''$, teremos $\text{Cot.}\, I = \ldots$ $\frac{\lambda''\,\text{Sen.}\,(l'' - N) - s\,\text{Sen.}\,(\Sigma'' - N)}{\varpi''}$. Igualando entre ſi os dous valores de Cot. I, fazendo a evoluçaõ coſtumada dos Senos, dividindo tudo por Coſ. N, e ſeparando para hum ſó membro os termos, que tem Tg. N, acharemos para determinar o lugar do nodo a equaçaõ ſeguinte:

$$\text{Tg.}\, N = \frac{\varpi''\,(\lambda\,\text{Sen.}\,l - s\,\text{Sen.}\,\Sigma) - \varpi\,(\lambda''\,\text{Sen.}\,l'' - s''\,\text{Sen.}\,\Sigma'')}{\varpi\,(s''\,\text{Coſ.}\Sigma'' - \lambda''\,\text{Coſ.}\,l'') - \varpi''\,(s\,\text{Coſ.}\Sigma - \lambda\,\text{Coſ.}\,l)}.$$

82. He de advertir, que ſe hum Cometa naõ tiveſſe latitude alguma em ambas as obſervações, ſería $\varpi = 0$, e $\varpi'' = 0$, donde ſe vê, que juntamente deſvaneceria o numerador, e denominador da expreſſaõ antecedente. Aſſim teriamos por valor da Tangente de N huma quantidade in-

indefinida, como deve ser na realidade, por coincidir entaõ o plano da orbita com o da ecliptica, e naõ haver mais razaõ para dizer que o corta em hum ponto, do que em outro qualquer. E d'ahi podemos concluir, que todas as vezes que os valores de ϖ, ϖ'', ainda que grandes sejaõ, combinados na equaçaõ com as outras quantidades que nella entraõ, derem simultaneamente o numerador, e denominador muito pequenos; as duas distancias, que escolhemos, saõ pouco proprias para a determinaçaõ do nodo. Assim veremos que resultado daõ as outras duas combinaçóes de x, x', e de x', x''; e se todas estas estiverem no mesmo caso, será necessario calcular outras observaçóes, que melhor sirvaõ para determinar este elemento. Mas o melhor de tudo he escolher logo as tres observaçóes primitivas de maneira, que determinem bem a posiçaõ do nodo, o que se conseguirá procurando, que entre ellas fique comprehendida a passagem do Cometa pela ecliptica, quando puder ser; e quando naõ, que huma das observaçóes naõ fique muito longe d'esta passagem.

83. Deve notar-se tambem, que a especie de N se determina pelos sinaes do numerador, e denominador da fracçaõ, pela qual se exprime a sua Tangente. Porque $\frac{+}{+}$ dará N no primeiro quadrante, $\frac{+}{-}$ no segundo, $\frac{-}{-}$ no terceiro, e $\frac{-}{+}$ no quarto, como he facil de entender, reflectindo que o numerador, e denominador saõ quantidades analogas ao Seno, e Coseno de N, e que os Senos saõ negativos de 6^s até 12^s, e os Cosenos de 3^s até 9^s. Donde se vê, que ainda que algebricamente he o mesmo $\text{Tg}.N = \frac{+a}{+b}$ que $\text{Tg}.N = \frac{-a}{-b}$, e $\text{Tg}.N = \frac{+a}{-b}$ o mes-

mo que Tg. $N = \frac{-a}{+b}$, com tudo em quanto a eſpecie de N ſaõ expreſsões, que ſe naõ devem confundir.

84. Ainda ſe póde facilitar muito mais a regra da eſpecie dos arcos, cuja Tangente ſe exprime por huma fracçaõ, ſe em lugar dos arcos, que excedem 180°, tomarmos os ſeus ſuplementos para 360° com ſinal contrario, porque aſſim vimos a cahir no meſmo ponto da circunferencia, ao qual correſponde ſempre o meſmo Seno, Tangente &c., e com o meſmo ſinal. D'eſte modo nos lembraremos facilmente que *N he poſitivo ou negativo, conforme o ſinal do numerador*; *e agudo, ou obtuſo, conforme for o denominador poſitivo, ou negativo.* Aſſim, para maior commodidade dos calculos naõ uſaremos nunca de arcos, ou angulos, que excedaõ 180°, tomando negativamente os Senos dos que forem negativos, e os Coſenos dos que forem obtuſos; e em chegando aos reſultados finaes, mudaremos os negativos em poſitivos, tomando em lugar d'elles os ſeus ſuplementos para 360°, para ficarem contados em roda para a meſma parte, como he coſtume dos Aſtronomos.

85. A regra, que havemos eſtabelecido para diſcernir a eſpecie de N, naõ padece limitaçaõ alguma nos Cometas retrogrados. Porque aſſim como elles tem o nodo aſcendente, onde havia de ſer o deſcendente no caſo de correrem a meſma orbita directamente, ſegundo a ordem dos ſignos, do meſmo modo a obſervaçaõ, que nelles he primeira, deveria ſer a ultima naquelle caſo. Eſta permutaçaõ das obſervações faz mudar o ſinal do numerador, e juntamente o do denominador; mudança, que influe na eſpecie de N a differença de 180°, que na realidade ha.

86. Sendo conhecida a longitude do nodo N, immediatamente acharemos a inclinaçaõ da orbita pela equaçaõ Tg. $I = \frac{\varpi}{\lambda \text{ Sen.} (l - N) - s \text{ Sen.} (\Sigma - N)}$, na qual he eſ-

cuſado attender a regra dos ſinaes, porque a inclinaçaõ ſe coſtuma ſempre deſignar pelo angulo agudo, e naõ pelo obtuſo que entre ſi fórmaõ os planos da orbita, e da ecliptica. Sem embargo o ſinal da Tangente da inclinaçaõ ſempre nos dá a conhecer huma couſa importante, que he a direcçaõ do movimento, hum dos elementos que buſcamos. Porque dando a equaçaõ hum valor de Tg. I ſempre poſitivo nos Cometas direɛtos, claramente ſe vê, que nos retrogrados o deve dar ſempre negativo, por nelles ter N de mais 180°; circunſtancia, que faz mudar o ſinal taõ ſómente ao denominador da fracçaõ, pela qual ſe exprime a Tangente de I. Pelo que ſahindo negativo o valor da Tangente da inclinaçaõ, quer o ſinal negativo eſteja no numerador, quer no denominador, conheceremos que o Cometa he retrogrado; e direɛto todas as vezes que a meſma Tangente ſe achar poſitiva, ſendo o numerador e denominador ambos poſitivos, ou ambos negativos.

87. Falta-nos a longitude do perihelio na orbita propria do Cometa, a qual denotaremos pela letra P. Para cuja determinaçaõ buſcaremos primeiro a anomalia U correſpondente á primeira obſervaçaõ pela formula conhecida Coſ. $\frac{1}{2} U = \sqrt{\frac{p}{r}}$. Advertindo porém, que ella naõ he conveniente na praxe, quando r differe pouco de p, uſaremos com preferencia d'eſta outra Sen. $\frac{1}{2} U = \sqrt{\frac{r-p}{r}}$, que d'ella ſe deriva. E porque a longitude do Cometa na orbita, no tempo da primeira obſervaçaõ, he evidentemente $P+U$, e o angulo CSN (Fig. 6.) he a longitude d'elle na orbita menos a do nodo, teremos Tg. $(P+U-N) = \frac{CN}{SN}$. Porém $CN = \frac{x \text{ Sen. } L}{\text{Sen. } I} = \frac{\varpi}{\text{Sen. } I}$, e $SN = \lambda$ Coſ.

$(l-N)$

$(l - N) - s$ Cof. $(\Sigma - N)$. Logo Tg. $(P + U - N) =$

$\dfrac{\varpi . \dfrac{1}{\text{Sen.}\, I}}{\lambda \text{ Cof.}\,(l - N) - s \text{ Cof.}\,(\Sigma - N)}$. Onde fe advertirá, que Sen. I he negativo nos Cometas retrogrados; que U muda de final, quando a obfervaçaõ cahir antes da paffagem pelo perihelio nos Cometas directos, e quando cahir depois nos retrogrados; e que o angulo total $P + U - N$ he negativo, ou pofitivo, conforme o for o numerador $\varpi . \dfrac{1}{\text{Sen.}\, I}$; e agudo, ou obtufo, conforme for o denominador pofitivo, ou negativo, como fica dito.

88. Se a orbita de hum Cometa coincidiffe com o plano da ecliptica, a inclinaçaõ fería nenhuma, e a pofiçaõ do nodo indeterminada, e inutil, como acima differmos. Entaõ, deixados effes dous elementos, achariamos a longitude do perihelio d'efta maneira: fuppondo que SN he hum femidiametro da ecliptica, que paffa pelo ponto de ♈, e reflectindo que na fuppofiçaõ prefente deve o ponto C (Fig. 6.) cahir em P, teremos $PTQ = l$, $TSN = \Sigma + 180°$, $PSN = P + U$, $TP = x$, $PN = x$ Sen. $l - s$ Sen. Σ, $SN = x$ Cof. $l - s$ Cof. Σ. Donde fe conclue Tg. $PSN =$ Tg. $(P + U) = \dfrac{x \text{ Sen.}\, l - s \text{ Sen.}\, \Sigma}{x \text{ Cof.}\, l - s \text{ Cof.}\, \Sigma}$.

§. VII.

Modo de calcular o lugar de hum Cometa para qualquer inftante dado, fendo conhecidos os elementos da orbita.

89. Ainda que efta queftaõ fe acha refolvida ha muito tempo, e a praxe d'ella facilitada por meio da Taboa Geral muito conhecida dos Aftronomos, daremos aquí huma foluçaõ nova, que refulta das formulas, que havemos demonftrado, a qual naõ depende do ufo fubfidiario d'aquella

quella Taboa, nem de se buscarem previamente as longitudes, e latitudes heliocentricas; mas com o raio vector, e anomalia immediatamente descobre a longitude, e latitude vistas da terra, por formulas, que pela sua simplicidade parecem dever preferir-se ao grande número de preceitos, e operações, de que consta o modo ordinario dos Astronomos.

90. Primeiramente buscaremos o raio vector r, que corresponde ao instante dado, pela equaçaõ $\tau = n(r+2p)\sqrt{(r-p)}$ (*num.* 18), na qual τ he o intervallo de tempo entre o instante dado, e a passagem pelo perihelio. Para a resolvermos facilmente por logarithmos, supponhamos $r = p + y^2$, e teremos a transformada $y^3 + 3py - \frac{\tau}{n} = 0$, que pela regra conhecida de Cardano dará $y = \sqrt[3]{\left(\frac{\tau}{2n} + \sqrt{(\frac{\tau^2}{4n^2} + p^3)}\right)} - \sqrt[3]{\left(-\frac{\tau}{2n} + \sqrt{(\frac{\tau^2}{4n^2} + p^3)}\right)}$.

Supponhamos $\frac{2n\sqrt{p^3}}{\tau} = \text{Tg.}\,M$; e havendo reflectido, que $\sqrt{(1+\text{Tg.}^2 M)} = \frac{1}{\text{Cos.}\,M}$, $\frac{1+\text{Cos.}\,M}{\text{Cos.}\,M} = \text{Tg.}\,M.\,\text{Cot.}\,\frac{1}{2}M$, e $\frac{1-\text{Cos.}\,M}{\text{Cos.}\,M} = \text{Tg.}\,M.\,\text{Tg.}\,\frac{1}{2}M$, a equaçaõ precedente se reduzirá a dar $y = \left(\sqrt[3]{\text{Cot.}\,\frac{1}{2}M} - \sqrt[3]{\text{Tg.}\,\frac{1}{2}M}\right)\sqrt[3]{\frac{\tau\,\text{Tg.}\,M}{2n}}$, isto he, $y = \left(\sqrt[3]{\text{Cot.}\,\frac{1}{2}M} - \sqrt[3]{\text{Tg.}\,\frac{1}{2}M}\right)\sqrt{p}$. Pelo que suppondo $\sqrt[3]{\text{Tg.}\,\frac{1}{2}M} = \text{Tg.}\,Q$, e sendo por conseguinte $\sqrt[3]{\text{Cot.}\,\frac{1}{2}M} = \text{Cot.}\,Q$, advertiremos que he $\text{Cot.}\,Q - \text{Tg.}\,Q = 2\,\text{Cot.}\,2Q = \frac{2}{\text{Tg.}\,2Q}$, e teremos $y = \frac{2\sqrt{p}}{\text{Tg.}\,2Q}$, e finalmente $r = p + \frac{4p}{\text{Tg.}^2\,2Q}$.

91. Conhecido o raio vector r, facilmente acharemos a anomalia correſpondente U pela formula Coſ. $\frac{1}{2} U = \sqrt{\frac{p}{r}}$, ou Sen. $\frac{1}{2} U = \sqrt{\frac{r-p}{r}}$, ou tambem por eſta Tg. $\frac{1}{2} U = \sqrt{\frac{r-p}{p}}$, que ſe deriva das outras duas.

92. Se quizermos achar primeiro a anomalia, a meſma conſtrucçaõ do *num.* 90 ſervirá para a calcularmos. Porque dando a ultima equaçaõ do número precedente Tg.$^2 \frac{1}{2} U = \frac{r-p}{p}$, ſe ſubſtituirmos o valor achado de r, teremos Tg.$^2 \frac{1}{2} U = \frac{4}{\text{Tg.}^2 2Q}$, e Tg. $\frac{1}{2} U = \frac{2}{\text{Tg.} 2Q}$. Por tanto fazendo Tg. $M = \frac{2n\sqrt{p^3}}{T}$, e Tg. $Q = \sqrt[3]{\text{Tg.} \frac{1}{2} M}$, ſerá Tg. $\frac{1}{2} U = \frac{2}{\text{Tg.} 2Q}$, e $r = p + p.\text{Tg.}^2 \frac{1}{2} U$, ou $r = \frac{p}{\text{Coſ.}^2 \frac{1}{2} U}$.

93. Quem ſe quizer ſervir da Taboa Geral dos Cometas, para achar a anomalia, deverá calcular a quantidade $\frac{T}{\sqrt{p^3}}$, e eſta lhe dará o número ſubſidiario de dias, com que ha de entrar na Taboa, para ter a anomalia U, que correſponde ao tempo dado na orbita dada, e com ella ſe achará r por qualquer das equações antecedentes.

94. De qualquer modo que ſe hajaõ calculado as quantidades r, U, com ellas viremos facilmente no conhecimento da longitude, e latitude do Cometa. Porque ſendo $SC = r$ (Fig. 6.), $ST = s$, $CSN = P + U - N$, $TSN = \Sigma - N + 180°$, e $PTQ = l - N$, teremos Tg.$(l - N)$

$= \frac{PQ}{TQ}$. Porém o triangulo CSN dá $SN = r$ Cof. $(P + U - N)$, e $CN = r$ Sen. $(P + U - N)$, donde fe conclue $PN = CN$. Cof. $I = r$ Sen. $(P + U - N)$ Cof. I, e o triangulo TSR dá $SR = s$ Cof. $(\Sigma - N + 180°) = - s$ Cof. $(\Sigma - N)$, e $TR = s$ Sen. $(\Sigma - N + 180°) = - s$ Sen. $(\Sigma - N)$. Logo ferá $PQ = PN - TR = r$ Sen. $(P + U - N)$ Cof. $I + s$ Sen. $(\Sigma - N)$, e $TQ = SN - SR = r$ Cof. $(P + U - N) + s$ Cof. $(\Sigma - N)$. E fubftituindo eftes valores na expreffaõ da Tangente de $l - N$, teremos

$$\text{Tg.}\,(l - N) = \frac{r\ \text{Sen.}\,(P + U - N)\ \text{Cof.}\,I + s\ \text{Sen.}\,(\Sigma - N)}{r\ \text{Cof.}\,(P + U - N) + s\ \text{Cof.}\,(\Sigma - N)};$$

advertindo-fe, como já fica dito, que U muda de final, quando o inftante dado for antes da paffagem pelo perihelio nos Cometas directos, e depois nos retrogrados; e guardando-fe tambem a refpeito da efpecie do angulo $l - N$ a regra dos finaes acima dada. He efcufado dizer-fe, que ao angulo achado $l - N$ fe deve ajuntar a longitude do nodo N para ter a do Cometa l.

95. Pelo que refpeita a latitude CTP, que denotamos por L, teremos igualmente Tg. $L = \frac{CP}{TP}$. Porém no triangulo CPN he $CP = CN$. Sen. $I = r$ Sen. $(P - N + U)$ Sen. I, e no triangulo PTQ he $TP = \frac{TQ}{\text{Cof.}\,(l - N)} = \frac{r\ \text{Cof.}(P+U-N) + s\ \text{Cof.}(\Sigma - N)}{\text{Cof.}\,(l - N)}$. Logo, fazendo a fubftituiçaõ d'eftes valores, ferá $\text{Tg.}\,L = \frac{r\ \text{Sen.}(P+U-N)\ \text{Cof.}(l-N)\ \text{Sen.}\,I}{r\ \text{Cof.}(P+U-N) + s\ \text{Cof.}(\Sigma - N)}$; expreffaõ, que fe calculará com muita facilidade, por ter o mefmo denominador, que tem a da longitude, e no numerador a quantidade commua r Sen. $(P + U - N)$. Na efpecie da latitude naõ ha que attender, pois fe naõ conta em

em roda como a longitude, mas de huma e outra parte da ecliptica até 90°. Se a Tangente d'ella porém ſahir negativa, quer o ſinal negativo eſteja no numerador, quer no denominador, ſerá a latitude auſtral; e ſe ſahir poſitiva, boreal.

96. Algumas vezes he preciſo calcular a diſtancia do Cometa á terra, como ſuccede quando ſe quer ſaber a ſua parallaxe, a fim de reduzir a longitude, e latitude calculadas ás apparentes, que ſe devem obſervar, o que principalmente ſe deve attender nas orbitas, que paſſaõ em maior vizinhança da terra. Quando tambem por algumas obſervações ſe ſouberem já proximamente os elementos da orbita, e ſe quizerem rectificar por outras obſervações, que pareçaõ mais ventajoſas para iſſo, em lugar de ſe buſcarem os primeiros valores approximados das diſtancias x, x', x'' reſpectivas a eſſas obſervações pelo methodo do §. IV, podem mais facilmente deduzir-ſe dos elementos proximamente conhecidos, e corregir-ſe immediatamente por qualquer dos methodos, que expuzemos no §. V.

97. Quando ſe tiver calculado previamente a longitude, e latitude do Cometa, por meio d'ellas podemos determinar a diſtancia x, ou TC (Fig. 6.). Porque ſendo $x = \frac{TP}{\text{Coſ.}L} = \frac{CP}{\text{Sen.}L}$, $TP = \frac{r\,\text{Coſ.}(P+U-N) + s\,\text{Coſ.}(\Sigma - N)}{\text{Coſ.}\,(l-N)}$, e $CP = r$ Sen. $(P+U-N)$ Sen. I, como temos viſto, ſerá $x = \frac{r\,\text{Coſ.}\,(P+U-N) + s\,\text{Coſ.}\,(\Sigma - N)}{\text{Coſ.}\,L\ \text{Coſ.}\,(l-N)}$, ou $x = \frac{r\,\text{Sen.}\,(P+U-N)\,\text{Sen.}\,I}{\text{Sen.}\,L}$. Mas ſe taõ ſómente buſcarmos a diſtancia, ſem haver neceſſidade do conhecimento da longitude, nem da latitude, podemos calculalla por huma formula immediata. Porque he $x^2 = CP^2 + TP^2 = CP^2 + PQ^2 + TQ^2$; porém já temos viſto, que $CP = r$ Sen. $(P+U-N)$ Sen. I, $PQ = r$ Sen. $(P+U-N)$ Coſ. $I + s$ Sen. $(\Sigma - N)$, e $TQ = r$ Coſ. $(P+U-N) + s$ Coſ. $(\Sigma - N)$:

lo-

logo sommando os quadrados d'estas tres quantidades, fazendo as reducções costumadas, e extrahindo a raiz, teremos $x = \sqrt{\left(r^2 + s^2 + 2rs \text{ Cos.}(P+U-N)\text{ Cos.}(\Sigma - N)\right.}$ $\left. + 2rs \text{ Sen.}(P+U-N) \text{ Sen.}(\Sigma - N) \text{ Cos.} I\right)$.

98. E reduzindo tudo a hum só ponto de vista: pelos elementos dados, e pelo calculo da longitude, e distancia do Sol para o instante dado, seraõ conhecidas as quantidades τ, p, P, N, I, Σ, s, com o número constante $n = 27,403857$, cujo logarithmo he 1.4378117. E para conhecermos a longitude do Cometa l, a latitude L, e a distancia d'elle á terra x, calcularemos primeiramente os angulos M, Q de maneira que seja $\text{Tg.} M = \frac{2n\sqrt{p^3}}{\tau}$, e $\text{Tg.} Q = \sqrt[3]{\text{Tg.} \frac{1}{2} M}$, e determinaremos r, U pelas duas equações seguintes

$$\text{Tg.} \frac{1}{2} U = \frac{2}{\text{Tg.} 2Q}, \quad r = p + p \text{ Tg.}^2 \frac{1}{2} U.$$

Entaõ suppondo, para abreviar, $P + U - N = \Lambda$, e $\Sigma - N = \Delta$, teremos as tres equações seguintes

$$\text{Tg.}(l - N) = \frac{r \text{ Sen.} \Lambda \text{ Cos.} I + s \text{ Sen.} \Delta}{r \text{ Cos.} \Lambda + s \text{ Cos.} \Delta}$$

$$\text{Tg.} L = \frac{r \text{ Sen.} \Lambda \text{ Sen.} I \text{ Cos.}(l - N)}{r \text{ Cos.} \Lambda + s \text{ Cos.} \Delta}$$

$$x = \sqrt{\left(r^2 + s^2 + 2rs(\text{Cos.} \Lambda \text{ Cos.} \Delta + \text{Sen.} \Lambda \text{ Sen.} \Delta \text{ Cos.} I)\right)};$$

equações, que igualmente podem servir, para se calcularem as longitudes, latitudes, e distancias dos Planetas, tanto superiores, como inferiores.

99. Sirva de exemplo o Cometa de 1742, cujos elementos referidos por M. de la Caille nas suas *Lições de Astronomia*, num. 776, saõ d'esta maneira:

Lon-

Longitude do nodo aſcendente	6^s 5° 38′ 29″
Longitude do perihelio	7 7 35 13
Inclinaçaõ da orbita	66 59 14
Logarithmo da diſtancia perihelia	9.884049
Paſſagem pelo perihel. 1742. Fev.	8^d 4^h 14′ *temp. med.*
Movimento	Retrogrado.

Se quizermos ſaber a longitude, latitude, e diſtancia d'elle á terra para o dia 28 de Março do meſmo anno ás 13^h 39′ do tempo medio, deveremos para eſſe inſtante calcular a longitude do Sol, e a ſua diſtancia. Mas ſervindo-nos das que foraõ calculadas pelo referido Aſtronomo, e reduzindo os elementos á fórma, que indicámos no *num.* 84, teremos $\tau = 48^d, 3687$, Log. $p = 9.884049$, $P = -142° 24' 47''$, $N = -174° 21' 31''$, $I = -66° 59' 14''$, $\Sigma = 8° 11' 28''$, e Log. $s = 9.999841$.

Aſſim acharemos $M = 37° 12' 20''$, $Q = 34° 49' 22'', 7$; $U = 73° 8' 55''$, e Log. $r = 0.074525$. E advertindo, que U deve mudar de ſinal, por ſer o inſtante dado depois da paſſagem pelo perihelio em Cometa retrogrado, teremos $\Lambda = -41° 12' 11''$, e $\Delta = -177° 27' 1''$. Donde achamos $l - N = -106° 45' 9''$, $l = -281° 6' 40'' = 78° 53' 20'' = 2^s 18° 53' 20''$, $L = 63° 3' 55''$ boreal, e $x = 0,807391$.

§. VIII.

Applicações das Formulas antecedentes.

100. As formulas, que acabamos de moſtrar, naõ ſe limitaõ a calcular com facilidade os lugares dos Cometas, mas como expreſsões analyticas, e geraes, podem ter outros muitos uſos. Hum, que me parece digno d'eſte lugar, he quando por huma ſó obſervaçaõ de hum Cometa queremos certificar-nos, ſe elle he algum dos que já fo-

raõ obſervados, e que por boas conjecturas ſe eſperava que tornaſſe pouco mais ou menos a apparecer por aquelle tempo, em que ſe faz a obſervaçaõ d'elle. Neſte caſo he conhecida a longitude, e latitude pela obſervaçaõ preſente, e os elementos da orbita pelas obſervações da apariçaõ precedente, exceptuando o tempo da paſſagem pelo perihelio, para cujo conhecimento era neceſſario, que ſe ſoubeſſe exactamente o tempo periodico, o qual, pelas notaveis alterações, que póde ter de revoluçaõ a revoluçaõ, nunca poderá fixar-ſe por obſervaçaõ, nem predizer-ſe com certeza por calculo algum.

101. Como pois temos as duas equações $\text{Tg.}\,(l-N) = \dfrac{r\,\text{Sen.}\Lambda\,\text{Coſ.}I + s\,\text{Sen.}\Delta}{r\,\text{Coſ.}\Lambda + s\,\text{Coſ.}\Delta}$, e $\text{Tg.}\,L = \dfrac{r\,\text{Sen.}\Lambda\,\text{Sen.}I\,\text{Coſ.}\,(l-N)}{r\,\text{Coſ.}\Lambda + s\,\text{Coſ.}\Delta}$ (*num.* 98), nas quaes ha ſómente duas incognitas r, e Λ. A primeira nos dará $r = \dfrac{s\,\text{Sen.}\Delta - s\,\text{Coſ.}\Delta\,\text{Tg.}\,(l-N)}{\text{Coſ.}\Lambda\,\text{Tg.}\,(l-N) - \text{Sen.}\Lambda\,\text{Coſ.}I}$, e a ſegunda $r = \dfrac{s\,\text{Coſ.}\Delta\,\text{Tg.}\,L}{\text{Coſ.}\Lambda\,\text{Sen.}I\,\text{Coſ.}\,(l-N) - \text{Sen.}\Lambda\,\text{Tg.}\,L}$.

Igualando eſtes dous valores de r, dividindo os numeradores por $s\,\text{Coſ.}\Delta$, e os denominadores por $\text{Coſ.}\Lambda$, teremos $\dfrac{\text{Tg.}\Delta - \text{Tg.}\,(l-N)}{\text{Tg.}\,(l-N) - \text{Tg.}\Lambda\,\text{Coſ.}I} = \dfrac{\text{Tg.}L}{\text{Tg.}\Lambda\,\text{Sen.}I\,\text{Coſ.}\,(l-N) - \text{Tg.}L}$; donde ſe tira $\text{Tg.}\Lambda = \ldots$

$$\frac{\text{Tg.}L\,\text{Tg.}\Delta}{\text{Tg.}\Delta\,\text{Sen.}I\,\text{Coſ.}\,(l-N) - \text{Sen.}I\,\text{Sen.}\,(l-N) + \text{Tg.}L\,\text{Coſ.}I}.$$

E reflectindo, que $\text{Sen.}I\,\text{Tg.}\Delta\,\text{Coſ.}\,(l-N) - \text{Sen.}I\,\text{Sen.}\,(l-N) = -\dfrac{\text{Sen.}I\,\text{Sen.}\,(l-N-\Delta)}{\text{Coſ.}\Delta}$, e $l-N-\Delta = l-\Sigma$, teremos mais ſimplesmente $\text{Tg.}\Lambda = \dfrac{\text{Tg.}L\,\text{Sen.}\Delta}{\text{Tg.}L\,\text{Coſ.}I\,\text{Coſ.}\Delta - \text{Sen.}I\,\text{Sen.}\,(l-\Sigma)}$.

102. Sendo conhecida a quantidade Λ, podemos logo determinar r por qualquer das duas equações

r

$$r = \frac{s \text{ Sen.} \Delta - s \text{ Cof.} \Delta \text{ Tg.} (l - N)}{\text{Cof.} \Lambda \text{ Tg.} (l - N) - \text{Sen.} \Lambda \text{ Cof.} I},$$

$$\text{ou } r = \frac{s \text{ Cof.} \Delta \text{ Tg.} L}{\text{Sen.} \Lambda \text{ Sen.} I \text{ Cof.} (l - N) - \text{Cof.} \Lambda \text{ Tg.} L}.$$

E porque havemos fuppofto $\Lambda = P + U - N$, e $P - N$ he quantidade conhecida pelos elementos da orbita determinada pelas obfervaçóes feitas na appariçaõ antecedente, teremos $U = \Lambda - P + N$, e confeguintemente conheceremos a diftancia perihelia $p = r \text{ Cof.}^2 \frac{1}{2} U$. E fe efta diftancia deduzida da obfervaçaõ prefente concordar com a que fe havia deduzido das obfervaçóes da outra appariçaõ, ou fe differir muito pouco d'ella, feraõ confirmadas as conjecturas de fer o Cometa aquelle mefmo, que fe efperava; e pelo contrario, fe houver grande difcrepancia nas duas diftancias perihelias. Concordando, quanto bafte, para termos o Cometa pelo mefmo, que efperavamos, bufcaremos o inftante da paffagem pelo perihelio, calculando a formula $\tau = n (r + 2p) \sqrt{(r - p)}$, e com ella poderemos formar huma ephemeride dos feus movimentos.

103. Supponhamos, que em París fe defcubrio hum Cometa em 1759 aos 15 de Abril ás $16^h\ 40'\ 23''$ em $10^s\ 18^\circ\ 52'\ 11''$ com a latitude $4^\circ\ 28'\ 9''$ auftral, quando já, com impaciencia de huns, e naõ pequena defconfiança de outros, fe efperava pela volta do Cometa de 1682, em virtude da famofa predicçaõ de Halley. Por efta unica obfervaçaõ fe podia logo conhecer fe o Cometa novamente apparecido era, ou naõ era o que fe efperava. Porque pelo calculo do Sol teriamos $\Sigma = 25^\circ\ 51'$, e $\log. s = 0.002016$; e pelos elementos de 1682, $N = 50^\circ 48$, $P = 301^\circ\ 36'$, e $I = -17^\circ\ 42'$, por fer Cometa retrogrado: donde refultaria $\Delta = -24^\circ\ 57'$, $l - \Sigma = -66^\circ\ 59'$, $l - N = -91^\circ\ 56'$. E pelo calculo

lo das formulas refpectivas, achariamos $\Lambda = 174° 35'$, log. $r = 9.966869$; e porque $P - N = - 109° 12'$, teriamos $U = 283° 47' = - 76° 13'$, donde concluiriamos $p = 0{,}57365$, quantidade, que differe pouco da que fe havia achado em 1682, e affim moftra, que o Cometa he o mefmo. Com as quantidades r, p achariamos finalmente $\tau = 33^d\ 18^h\ 16'$; e reflectindo, que a obfervaçaõ devia fer pofterior á paffagem pelo perihelio, por fahir a anomalia U negativa em Cometa retrogrado, a dita paffagem teria fido a 12 de Março $22^h\ 24'$. E fendo efta conhecida, eftariamos com tudo o que era neceffario para calcular huma ephemeride do movimento do Cometa d'ahi para diante, quanto era baftante para fervir de preparo para as obfervações, que fe houveffem de fazer.

104. Algumas vezes póde fer neceffario faber o tempo, em que hum Cometa deve paffar pelo nodo afcendente, ou defcente. Neffe cafo eftá claro, que o angulo CSN (Fig. 6.) deve fer 0°, ou 180°. E porque $CSN = P + U - N$, teremos $U = N - P$ no primeiro cafo, e $U = N - P + 180°$ no fegundo. Subftituindo eftes valores na formula $r = \dfrac{p}{\text{Cof.}^2 \frac{1}{2} U}$, ferá o raio vector, que paffa pelo nodo afcendente, $\dfrac{p}{\text{Cof.}^2 \frac{1}{2} (N - P)}$, e o que paffa pelo nodo defcendente ferá $\dfrac{p}{\text{Sen.}^2 \frac{1}{2} (N - P)}$. E calculando para cada hum d'elles a formula $\tau = n(r + 2p)\sqrt{(r - p)}$, fe acharáõ as differenças de tempo entre o inftante da paffagem pelo perihelio, e os da paffagem pela linha dos nodos; dif-

differenças, que se haõ de ajuntar ao tempo da passagem pelo perihelio quando os valores de U, reduzidos a naõ passarem de 180° forem positivos, e subtrahir quando forem negativos nos Cometas directos, e ao contrario nos retrogrados.

105. He tambem muito notavel o instante da opposiçaõ, ou conjuncçaõ de hum Cometa com o Sol, mas naõ he taõ facil de calcular. Entaõ deve a linha ST (Fig. 6.) coincidir com SP; e como temos visto, que $TSN = \Sigma - N + 180°$, será nesse caso Tg. $(\Sigma - N + 180°)$, ou, que vem a ser o mesmo, Tg. $(\Sigma - N) = \frac{PN}{SN}$, e feitas as substituições competentes, será Tg. $\Delta =$ Tg. Λ Cos. I. Como Λ naõ involve outra incognita senaõ a anomalia U, que depende do tempo corrido desde o perihelio, nem Δ outra senaõ a longitude do Sol Σ, que tambem depende do tempo corrido desde a passagem da terra pelo seu perihelio, se em lugar d'essas duas quantidades substituissemos os seus valores em funcções do tempo, pela immediata resoluçaõ da equaçaõ achariamos o que buscamos. Mas vindo por esse caminho a cahir em huma equaçaõ summamente complicada, he melhor, que usemos do methodo das interpolações, para resolver a equaçaõ Tg. Λ Cos. I — Tg. $\Delta = 0$, na fórma simplicissima, em que se acha.

106. Para isso tomaremos hum tempo a arbitrio, que naõ esteja longe da conjuncçaõ, ou opposiçaõ, quanto se póde conjecturar pelas circunstancias, e em qualquer ephemeride acharemos calculada a longitude do Sol Σ, e pela Taboa geral dos Cometas facilmente conheceremos a anomalia do Cometa U, que convem a esse instante. Assim teremos as quantidades Λ, Δ, e com ellas calcularemos a equaçaõ precedente, que em lugar de se verificar, supponos que dá o resultado γ. Fazendo o mesmo com outros dous tempos tomados em progressaõ arithmetica com o

primeiro, ſendo a differença delles η, acharemos outros dous reſultados da equaçaõ, que reſpectivamente deſignaremos por γ', γ''; e aſſim viremos a conhecer a correcçaõ do primeiro tempo hypothetico pela equaçaõ do *num.* 59. E ſendo por eſta primeira operaçaõ conhecido proximamente o tempo da conjunçaõ, ou oppoſiçaõ, ſe tomarmos outros tres inſtantes em progreſſaõ arithmetica na vizinhança d'elle, viremos a determinallo com toda a exactidaõ, que for neceſſaria.

107. Naõ intereſſará menos a curioſidade em ſaber os pontos da orbita, onde hum Cometa poderá paſſar na maior vizinhança do noſſo globo; pontos criticos, que depois das ouſadas conjecturas de Whiſton começáraõ a ſer olhados com receio, e ha bem poucos annos com terror, e ſobreſalto taõ geral em París, que para o deſvanecer compoz o illuſtre M. du Séjour o ſeu excellente *Enſayo ſobre os Cometas em geral, e em particular ſobre os que podem avizinhar-ſe á orbita da terra.* Deixando porém, como alheias do meu propoſito, as conſequencias phyſicas, que podem reſultar da grande vizinhança de hum Cometa, e as conjecturas, que ſe podem formar ſobre a exiſtencia de algum, que haja finalmente de chegar-ſe a huma diſtancia perigoſa: vejamos, como, ſendo conhecidos os elementos da orbita de qualquer Cometa, podemos deſcubrir a menor diſtancia, em que elle póde achar-ſe a reſpeito da terra.

108. Eſta queſtaõ póde tomar-ſe de dous modos. O primeiro conſiſte em averiguar a menor diſtancia, em que ha de paſſar hum Cometa a reſpeito da terra na revoluçaõ actual, em que elle ſe começa a obſervar, e o inſtante do phenomeno. O ſegundo he diſtinguir entre todas as revoluções poſſiveis a que ha de dar a mais pequena diſtancia: que vem a ſer o meſmo, que preſcindir dos movimentos do Cometa, e da Terra, e procurar nas duas orbitas os pontos, onde ellas paſſaõ na maior vizinhança huma da outra. Comecemos pelo ultimo.

109.

109. Como temos a expreſſaõ geral da diſtancia do Cometa $x = \surd\left(r^2 + s^2 + 2rs\ (\text{Coſ.}\,\Delta\ \text{Coſ.}\,\Lambda + \text{Sen.}\,\Delta\ \text{Sen.}\,\Lambda\ \text{Coſ.}\,I)\right)$, na qual para o uſo preſente ſe póde conſiderar a orbita terreſtre como circular, ſuppondo s conſtante, a propriedadade do minimo nos dará

$$\left.\begin{array}{l} r\,dr + s\,dr\ \ (\text{Coſ.}\,\Delta\ \text{Coſ.}\,\Lambda + \text{Sen.}\,\Delta\ \text{Sen.}\,\Lambda\ \text{Coſ.}\,I) \\ \quad + s\,r\,d\Lambda\,(\text{Sen.}\,\Delta\ \text{Coſ.}\,\Lambda\ \text{Coſ.}\,I - \text{Sen.}\,\Lambda\ \text{Coſ.}\,\Delta) \\ \quad + s\,r\,d\Delta\,(\text{Sen.}\,\Lambda\ \text{Coſ.}\,\Delta\ \text{Coſ.}\,I - \text{Sen.}\,\Delta\ \text{Coſ.}\,\Lambda) \end{array}\right\} = 0.$$

Onde reflectiremos, que Λ ſempre depende de r, mas Δ naõ depende de Λ; nem de r, porque no caſo preſente devemos comparar cada hum dos pontos da orbita do Cometa com todos os pontos da orbita terreſtre. Por iſſo igualaremos ſeparadamente a nada o termo multiplicado por $d\Delta$, e teremos por primeira condiçaõ da minima diſtancia procurada $\text{Sen.}\,\Lambda\ \text{Coſ.}\,\Delta\ \text{Coſ.}\,I - \text{Sen.}\,\Delta\ \text{Coſ.}\,\Lambda = 0$, que ſe reduz a $\text{Tg.}\,\Delta = \text{Tg.}\,\Lambda\ \text{Coſ.}\,I$. E porque temos viſto (*num.* 105), que eſta equaçaõ pertence á conjuncçaõ, ou oppoſiçaõ do Cometa com o Sol, concluiremos, que ſómente neſtas circunſtancias deve ſucceder a minima diſtancia, que buſcamos.

110. Subſtituindo o valor de $\text{Coſ.}\,I = \frac{\text{Tg.}\,\Delta}{\text{Tg.}\,\Lambda}$ nos outros termos da equaçaõ differencial, e reduzindo, acharemos

$$r\,dr + \frac{s\,dr\ \text{Coſ.}\,\Lambda}{\text{Coſ.}\,\Delta} + s\,r\,d\Lambda.\ \frac{\text{Sen.}\,(\Delta + \Lambda)\ \text{Sen.}\,(\Delta - \Lambda)}{\text{Sen.}\,\Lambda\ \text{Coſ.}\,\Delta} = 0.$$

E advertindo, que $d\Lambda = dU$, e $dU = \frac{dr}{r}\surd\frac{p}{r-p}$ (*num.* 16) $= \frac{dr}{r}\ \text{Cot.}\,\frac{1}{2}U$, e $r = \frac{p}{\text{Coſ.}^2\frac{1}{2}U}$, faremos a ſubſtituiçaõ d'eſtes valores, e reduzindo teremos por ſegunda condiçaõ da minima diſtancia a equaçaõ

$$p + \frac{s\,\text{Cof.}^2 \frac{1}{2} U}{\text{Cof.}\,\Delta}\left(\text{Cof.}\Lambda + \frac{\text{Sen.}\,(\Delta + \Lambda)\,\text{Sen.}\,(\Delta - \Lambda)}{\text{Sen.}\,\Lambda\,\text{Tg.}\frac{1}{2}U}\right) = 0,$$

a qual juntamente com a outra Tg. Δ = Tg. Λ Cof. I ſervirá de determinar Δ, e Λ, e conſeguintemente U, que ſe involve em Λ. E porque a minima diſtancia deve ſucceder perto dos nodos, quando he grande o angulo da inclinaçaõ; e quando he pequeno, perto dos pontos da orbita, onde o raio vector he igual á diſtancia do Sol, he facil a eſcolha dos valores hypotheticos de Λ, com os quaes ſe determinará Δ pela ſegunda equaçaõ, e depois ſe verá o reſultado da primeira, conforme o methodo das interpolações, que já deixámos praticado, advertindo-ſe, que a eſpecie de Λ e Δ deve ſer de maneira, que os ſeus Coſenos tenhaõ ſinal contrario.

111. Subſtituindo tambem o valor de Cof. I na formula geral da diſtancia, depois de acharmos Λ, e Δ, que ſatisfaçaõ ás duas equações de condiçaõ, conheceremos mais facilmente a minima diſtancia pela equaçaõ $x = \sqrt{\left(r^2 + s^2 + 2rs.\frac{\text{Cof.}\,\Lambda}{\text{Cof.}\,\Delta}\right)}$. A quantidade Δ nos moſtrará o dia do anno, em que deveria ſucceder eſſa minima diſtancia; e ſe foſſe conhecido o tempo periodico, com a quantidade Λ achariamos, quando viria o Cometa neſſe dia a achar-ſe no ponto correſpondente da ſua orbita.

112. Quando naõ ſe procura a minima diſtancia abſoluta, mas a que ha de ter lugar entre os dous corpos em huma revoluçaõ propoſta, entaõ deveremos reduzir as differenças dr, $d\Lambda$, $d\Delta$, a huma ſó. Significando T o movimento diurno medio do Sol, e τ o tempo corrido deſde o perihelio, claro eſtá, que ſerá $d\Delta = T d\tau$, e a equaçaõ

$\tau = n\,(r + 2p)\,\sqrt{(r-p)}$ dará $r\,dr = \dfrac{2\,d\tau\,\text{Tg.}\frac{1}{2}U\sqrt{p}}{3n}$,

e conſeguintemente $r\,d\Lambda = \dfrac{2\,d\tau\,\text{Coſ.}^2\frac{1}{2}U}{3n\sqrt{p}}$. Pelo que, ſubſtituindo eſtes valores na equaçaõ do *num.* 109, e reduzindo, teremos a equaçaõ ſeguinte:

$$\left.\begin{array}{l} p + s\,\text{Coſ.}^2\frac{1}{2}U\;(\text{Coſ.}\,\Delta\,\text{Coſ.}\,\Lambda + \text{Sen.}\,\Delta\,\text{Sen.}\,\Lambda\,\text{Coſ.}\,I) \\ + s\,\text{Coſ.}^2\frac{1}{2}U\,.\,\text{Cot.}\frac{1}{2}U\,(\text{Sen.}\Delta\,\text{Coſ.}\Lambda\,\text{Coſ.}I - \text{Sen.}\Lambda\,\text{Coſ.}\Delta) \\ + \frac{3\,s\,n\,T\sqrt{p^3}}{\text{Sen.}\,U}\;(\text{Sen.}\,\Lambda\,\text{Coſ.}\,\Delta\,\text{Coſ.}\,I - \text{Sen.}\,\Delta\,\text{Coſ.}\Lambda) \end{array}\right\} = 0,$$

na qual todas as quantidades variaveis dependem do tempo, e aſſim ſe reſolverá pelos methodos já indicados. Tornemos ao noſſo propoſito.

§. IX.

Expoſiçaõ abbreviada da Soluçaõ do Problema.

113. Para maior commodidade dos calculos, que ſe haõ de fazer na determinaçaõ das Orbitas parabolicas dos Cometas, ajuntaremos aqui em huma recopilaçaõ geral todas as denominaçóes, que havemos feito, e equaçóes, que havemos demonſtrado, pela meſma ordem, que ellas haõ de ter na execuçaõ, indicando ſummariamente o proceſſo das operaçóes.

114. Eſcolhidas tres obſervaçóes de confiança, cujos intervallos naõ ſejaõ muito pequenos, nem muito grandes, nem muito desiguaes, cahindo, quanto for poſſivel, em os pontos, onde o movimento do Cometa em longitude,

e latitude for mais fenfivel, para o inftante de cada huma d'ellas fe calculará a longitude, e diftancia do Sol. E affim feraõ conhecidas as tres longitudes do Cometa, que pela ordem das obfervações defignaremos por l, l', l'', as latitudes por L, L', L'', as longitudes dos Sol por $\Sigma, \Sigma', \Sigma''$; e as fuas diftancias á terra por s, s', s''; e deveremos achar as diftancias do Cometa á terra x, x', x''.

115. Para iffo, fuppondo $l - \Sigma = A$, $l' - \Sigma' = A'$, $l'' - \Sigma'' = A''$; $l'' - l = C$, $l' - l = C'$, $l'' - l' = C''$; $\Sigma'' - \Sigma = S$, $\Sigma' - \Sigma = S'$, $\Sigma'' - \Sigma' = S''$; calcularemos as quantidades feguintes:

$$\text{Tg.}\,B = \frac{s''\,\text{Sen.}\,S}{s - s''\,\text{Cof.}\,S} \qquad g = \frac{s''\,\text{Sen.}\,S}{\text{Sen.}\,B},$$

$$\text{Tg.}\,B' = \frac{s'\,\text{Sen.}\,S'}{s - s'\,\text{Cof.}\,S'} \qquad g' = \frac{s'\,\text{Sen.}\,S'}{\text{Sen.}\,B'},$$

$$\text{Tg.}\,B'' = \frac{s''\,\text{Sen.}\,S''}{s' - s''\,\text{Cof.}\,S''} \qquad g'' = \frac{s''\,\text{Sen.}\,S''}{\text{Sen.}\,B''},$$

$$a = 2s\,\text{Cof.}\,L\,\text{Cof.}\,A,\ f = 2(\text{Cof.}\,L\,\text{Cof.}\,L''\,\text{Cof.}\,C + \text{Sen.}\,L\,\text{Sen.}\,L''),$$

$$a' = 2s'\,\text{Cof.}\,L'\,\text{Cof.}\,A',\ f' = 2(\text{Cof.}\,L\,\text{Cof.}\,L'\,\text{Cof.}\,C' + \text{Sen.}\,L\,\text{Sen.}\,L'),$$

$$a'' = 2s''\,\text{Cof.}\,L''\,\text{Cof.}\,A'',\ f'' = 2(\text{Cof.}\,L'\,\text{Cof.}\,L''\,\text{Cof.}\,C'' + \text{Sen.}\,L'\,\text{Sen.}\,L''),$$

$$b = 2g\,\text{Cof.}\,L\,\text{Cof.}\,(A+B),\quad e = 2g'\,\text{Cof.}\,L\,\text{Cof.}\,(A+B'),$$

$$b' = 2g'\,\text{Cof.}\,L'\,\text{Cof.}\,(A+B'+C'),\quad e' = 2g''\,\text{Cof.}\,L'\,\text{Cof.}\,(A'+B''),$$

$$b'' = 2g''\,\text{Cof.}\,L''\,\text{Cof.}\,(A'+B''+C''),\quad e'' = 2g\,\text{Cof.}\,L''\,\text{Cof.}\,(A+B+C),$$

$$h = \frac{g\,\text{Sen.}\,(A+B+C)}{\text{Sen.}\,C''\,\text{Cof.}\,L},\quad h' = \frac{g\,\text{Sen.}\,(A+B)}{\text{Sen.}\,C\,\text{Cof.}\,L''}$$

$$\kappa = \frac{g''\,\text{Sen.}\,(A'+B''+C'')}{\text{Sen.}\,C''\,\text{Cof.}\,L'},\quad \kappa' = \frac{g'\,\text{Sen.}\,(A+B')}{\text{Sen.}\,C'\,\text{Cof.}\,L'}$$

$$q = \frac{s'\,\text{Sen.}\,(A'+C'')}{\text{Sen.}\,C''\,\text{Cof.}\,L'},\quad q' = \frac{s'\,\text{Sen.}\,(C'-A')}{\text{Sen.}\,C'\,\text{Cof.}\,L'}$$

m

$$m = \frac{t \text{ Sen. } C'' \text{ Cof. } L'}{t'' \text{ Sen. } C \text{ Cof. } L}, \quad m' = \frac{t \text{ Sen. } C' \text{ Cof. } L'}{t' \text{ Sen. } C \text{ Cof. } L''},$$

$$\Theta = \frac{2 s'^3 \text{ Sen. } \frac{1}{2} S' \text{ Sen. } \frac{1}{2} S''}{\text{Cof. } \left(\frac{1}{2} S' - \frac{1}{2} S''\right)}.$$

Onde nos lembraremos: Que havemos defignado por t o intervallo de tempo desde a primeira até a terceira obfervaçaõ, por t' o da primeira até a fegunda, e por t'' o da fegunda até a terceira, contados em dias, e partes decimaes de dia; que C, C', C'' faõ negativos, quando o movimento apparente do Cometa he retrogrado; que L, L', L'' fe tomaõ negativamente, fendo de denominaçaõ auftral; que B, B', B'' fempre faõ pofitivos, mas maiores que 90° quando o denominador da fua Tangente for negativo; e que as mais quantidades teraõ o final, que refultar da fua expreffaõ, havendo refpeito á regra dos finaes dos Senos, e Cofenos.

116. Suppondo tambem os raios vectores defignados por r, r', r'', conforme a ordem das obfervações, teremos

$$r^2 = x\,(x - a) + s^2$$
$$r'^2 = x'\,(x' - a') + s'^2$$
$$r''^2 = x''\,(x'' - a'') + s''^2$$

$$\left.\begin{aligned} x &= b + m\,(x' - \kappa) + \frac{\Theta m\,(q - x')}{r'^3} \\ x'' &= b' + m'\,(x' - \kappa') + \frac{\Theta m'\,(q' - x')}{r'^3} \end{aligned}\right\} \text{proximamente.}$$

117. E havendo fuppofto $r + r'' = R$, $r + r' = R'$, e $r' + r'' = R''$, teremos

$$\omega = \sqrt{\left(1 - \frac{x\,(x - b) + x''(x'' + e'') - f\,x\,x'' + g^2}{R^2}\right)}$$

$$\omega' = \sqrt{\left(1 - \frac{x'\,(x' + b') + x\,(x - e) - f'\,x\,x' + g'^2}{R'^2}\right)}$$

$$\omega'' = \sqrt{\left(1 - \frac{x''\,(x'' + b'') + x'\,(x' - e') - f''\,x'\,x'' + g''^2}{R''^2}\right)}$$

118. Reflectindo tambem, que nas equações fundamentaes os termos da fórma $4 - 3\,\omega^2 - \omega^3$ se reduzem ao producto dos dous factores $(2 + \omega)^2$, e $(1 - \omega)$, os quaes entraõ tambem no calculo de outras quantidades, faremos agora $E = 1 - \omega$, $E' = 1 - \omega'$, $E'' = 1 - \omega''$; $F = 2 + \omega$, $F' = 2 + \omega'$, $F'' = 2 + \omega''$. E lembrando-nos que he o número constante $\phi = 0{,}0053264345$, cujo Logarithmo se acha 7.7264366, teremos as tres equações seguintes:

$$E\,F^2\,R^3 - \phi\,t^2 = 0$$

$$E'\,F'^2\,R'^3 - \phi\,t'^2 = 0$$

$$E''\,F''^2\,R''^3 - \phi\,t''^2 = 0.$$

119. Se tomarmos pois qualquer valor hypothetico de x', com elle acharemos r' pela segunda equaçaõ do *num.* 116, e depois x pela quarta proximamente, e r pela primeira. Com estas quantidades calcularemos ω' pela segunda equaçaõ do *num.* 117, e teremos todas as quantidades, que entraõ na segunda equaçaõ do *num.* precedente, a qual em lugar de se verificar dando nada no segundo membro, supponhamos que dá γ. Tomando outros dous valores hypotheticos de x' em progressaõ arithmetica com o primeiro, sendo a differença η, e praticando do mesmo modo, acharemos os resultados respectivos γ', γ''; e entaõ fazendo para abbreviar, $3\,\gamma - 4\,\gamma' + \gamma'' = G$, e $2\,(\gamma - 2\,\gamma' + \gamma'') = H$, te-

teremos a correcçaõ dx' do primeiro valor hypothetico de x', pela formula

$$dx' = \frac{\eta\left(G \pm \sqrt{(G^2 - 4\gamma H)}\right)}{H}.$$

120. Depois d'esta correcçaõ, se tomarmos outros tres valores hypotheticos em progressaõ arithmetica, e muito vizinhos do valor proximamente conhecido pela primeira operaçaõ, procedendo em tudo do mesmo modo, acharemos x' com a approximaçaõ sufficiente para o nosso intento; e com o valor de x', em que ficarmos, determinaremos x, e x'' pelas equaçóes quarta, e quinta do *num.* 116. Os primeiros tres valores hypotheticos podem tomar-se 0,2; 0,6; 1, quando por circunstancias particulares naõ pareça tomarem-se de outro modo. Quem se contentar com as duas distancias x, x' deduzidas d'esta soluçaõ approximada, para determinar com ellas proximamente os elementos da orbita, naõ tem necessidade de calcular todas as quantidades subsidiarias, bastando entaõ das vinte e sete quantidades do *num.* 115 calcular sómente dezeseis, a saber B, B', B'', g, g', g'', a, a', b', f', e, h, κ, q, m, Θ.

121. Com os valores approximados de x, x', x'' acharemos r, r', r'' (*num.* 116), e ω, ω', ω'' (*num.* 117), e applicando os valores achados ás equaçóes rigorosas do *num.* 118, daraõ os resultados δ, δ', δ'' respectivamente, os quaes deveráõ ser quantidades muito pequenas. Entaõ fazendo

$$D = \frac{2x - a}{r}, \quad D' = \frac{2x' - a'}{r'}, \quad D'' = \frac{2x'' - a''}{r''},$$

$$\alpha = \frac{3}{2} R F (2x - b - f x'' + D R E),$$

$$\alpha' = \frac{3}{2} R' F' (2x' + b' - f' x + D' R' E'),$$

$$\alpha'' = \frac{3}{2} R'' F'' (2x'' + b'' - f'' x' + D'' R'' E''),$$

$$\beta = \frac{3}{2} R' F' (2x - e - f' x' + D R' E'),$$

$$\beta' = \frac{3}{2} R'' F'' (2x' - e' - f'' x'' + D' R'' E''),$$

$$\beta'' = \frac{3}{2} R F (2x'' + e'' - f x + D'' R E),$$

acharemos as correcções de x, x', x'' pelas equações seguintes

$$dx = -\frac{\alpha'\alpha''\delta + \beta'\beta''\delta' - \alpha'\beta''\delta''}{\alpha\alpha'\alpha'' + \beta\beta'\beta''}$$

$$dx' = -\frac{\beta dx + \delta'}{\alpha'}, \quad dx'' = -\frac{\alpha dx + \delta}{\beta''}.$$

122. Esta operaçaõ se repetirá, quando parecer necessario, que será todas as vezes que estas primeiras correcções naõ forem muito pequenas. E onde se parar, podem tambem corregir-se as quantidades r, r'', R, ω, E, que haõ de servir na determinaçaõ dos elementos, que he mais facil do que tornallas a calcular novamente, e teremos

$$dr = \frac{1}{2} D dx, \quad dr'' = \frac{1}{2} D'' dx'', \quad dR = dr + dr'',$$

$$d\omega = \frac{EFdR}{R\omega} + \frac{\delta}{3FR^3\omega}, \quad dE = -d\omega.$$

123. Igualmente podemos satisfazer ás equações do *num.* 118 pelo methodo das interpolações. Com o valor proximo de x' buscaremos x de maneira que se verifique a segunda equaçaõ do dito numero usando da formula $dx = -\frac{\delta'}{\beta}$, e conservando o mesmo valor de x', buscaremos a correcçaõ de x'', que satisfaça á terceira usando da formula $dx'' = -\frac{\delta''}{\alpha''}$. Applicando os valores de x, x'' á primeira equaçaõ do *num.* 118, dará hum resultado, que cha-

chamaremos γ. E tomando outros dous valores de x' em progressaõ arithmetica com o primeiro, sendo a differença η pouco differente das correcções dx, dx'', acharemos outros dous resultados γ', γ'' da dita primeira equaçaõ, com as quaes acharemos dx' pela formula do *num.* 119.

124. Finalmente, sendo conhecidas as distancias x, x'' com as quantidades que d'ellas dependem, acharemos por sua ordem a distancia perihelia p, a anomalia U no tempo da primeira observaçaõ, o tempo desde o perihelio até á primeira observaçaõ τ, ou até á terceira τ'', a longitude do nodo N, a inclinaçaõ da orbita I, e a longitude do perihelio P, pelas formulas seguintes, depois de haver supposto para mais brevidade x Cos. $L = \lambda$, x'' Cos. $L'' = \lambda''$, x Sen. $L = \varpi$, x'' Sen. $L'' = \varpi''$, e lembrando-nos que Log. $n = 1.4378117$:

$$p = \frac{rr'' - \frac{1}{4} R^2 \omega^2}{ER}, \text{ Cos. } \frac{1}{2} U = \sqrt{\frac{p}{r}}, \text{ ou Sen. } \frac{1}{2} U = \sqrt{\frac{r-p}{r}},$$

$$\tau = n(r + 2p)\sqrt{(r-p)}, \text{ ou } \tau'' = n(r'' + 2p)\sqrt{(r''-p)},$$

$$\text{Tg. } N = \frac{\varpi''(\lambda \text{ Sen. } l - s \text{ Sen. } \Sigma) - \varpi(\lambda'' \text{ Sen. } l'' - s'' \text{ Sen. } \Sigma'')}{\varpi(s'' \text{ Cos. } \Sigma'' - \lambda'' \text{ Cos. } l'') - \varpi''(s \text{ Cos. } \Sigma - \lambda \text{ Cos. } l)},$$

$$\text{Tg. } I = \frac{\varpi}{\lambda \text{ Sen. } (l - N) - s \text{ Sen. } (\Sigma - N)}$$

$$\text{Tg. } (P + U - N) = \frac{\varpi . \frac{1}{\text{Sen. } I}}{\lambda \text{ Cos. } (l - N) - s \text{ Cos. } (\Sigma - N)};$$

advertindo-se, que τ será additivo ao tempo da primeira observaçaõ para ter o do perihelio quando $r > r''$, ou τ'' subtractivo do tempo da terceira quando $r'' > r$; que o Cometa he retrogrado, quando a Tangente da inclinaçaõ sahir negativa; que U muda de sinal, quando a primeira observaçaõ cahir antes da passagem pelo perihelio nos Cometas directos, e depois nos retrogrados; e que os angulos N, e $P + U - N$ seraõ positivos, ou negativos confor-

forme o numerador da ſua Tangente; e agudos, ou obtuſos, conforme o denominador d'ella for poſitivo, ou negativo. Eis-aquí a theorica: paſſemos aos exemplos.

§. X.

Calculo da Orbita rigoroſamente parabolica de hum Cometa hypothetico.

125. Como a ſoluçaõ precedente he exacta, e geometrica, na ſuppoſiçaõ das orbitas rigoroſamente parabolicas, quaes naõ ſaõ as dos Cometas, e quaes naõ poderiaõ achar-ſe por meio das obſervaçóes, ainda que realmente o foſſem, por haver ſempre da parte d'ellas alguma incerteza, que a arte dos obſervadores póde diminuir até certo ponto, ſem já mais a poder evitar de todo: daremos primeiramente hum exemplo ideal, fingindo hum Cometa directo, que movendo-ſe em huma parabola paſſaſſe pelo perihelio no anno de 1780 a 20 de Março $12^h\ 0'$ do tempo medio do meridiano de París, ſendo a diſtancia perihelia igual á unidade, a longitude do nodo $4^s\ 20°$, a do perihelio $3^s\ 10°$, e a inclinaçaõ 30°. Com eſtes elementos ſuppoſtos calcularemos pelo methodo do *num.* 99 os lugares d'elle para tres inſtantes dados, os quaes tomaremos como ſe foſſem obſervados, para d'elles virmos no conhecimento dos elementos. Aſſim ſuppomos as tres obſervaçóes ſeguintes

1780. París.	*Temp. m.*		*Longit. do Comet.*		*Latitude.*
Abril 10.	$12^h\ 0'$	- -	$2^s\ 17°\ 42'\ 50'',2$	- -	$5°\ 9'\ 59'',7.$ *A.*
25.	12 0	- -	3 6 12 1,9	- -	2 16 21,8. *B*
Maio 16.	12 0	- -	3 28 52 26,8	- -	10 23 31,5. *B*

126. Fazendo pois os calculos do Sol para os inſtantes das obſervaçóes, e preparando as quantidades do *num.* 115, teremos

$l = 77°\,42'\,50'',2$	$\Sigma = 21°\,40'\,28''$	$\text{Log.}\,s = 0.001449$
$l' = 96\;12\;\;1,9$	$\Sigma' = 36\;17\;37$	$\text{Log.}\,s' = 0.003202$
$l'' = 118\;52\;26,8$	$\Sigma'' = 56\;35\;13$	$\text{Log.}\,s'' = 0.005258$
$L = -\,5°\;9'\;59'',7$	$A = 56°\;2'\;22'',2$	$C = 41°\;9'\;36'',6$
$L' = 2\;16\;21,8$	$A' = 59\;54\;24,9$	$C' = 18\;29\;11,7$
$L'' = 10\;23\;31,5$	$A'' = 62\;17\;13,8$	$C'' = 22\;40\;24,9$
$S = 34°\,54'\,45''$	$B = 73°\,20'\,33'',7$	$\text{Log.}\,g = 9.781519$
$S' = 14\;37\;\;9$	$B' = 83\;35\;31,2$	$\text{Log.}\,g' = 9.408002$
$S'' = 20\;17\;36$	$B'' = 80\;36\;40,2$	$\text{Log.}\,g'' = 9.551227$
$a = 1,116423$	$s^2 = 1,006695$	$\text{Log.}\,f = 0.159128$
$a' = 1,009440$	$s'^2 = 1,014855$	$\text{Log.}\,f' = 0.274264$
$a'' = 0,925968$	$s''^2 = 1,024510$	$\text{Log.}\,f'' = 0.261984$
$b = -\,0,764200$	$e = -\,0,388292$	$\phi t^2 = 6,903059$
$b' = -\,0,474477$	$e' = -\,0,548825$	$\phi t'^2 = 1,198448$
$b'' = -\,0,670057$	$e'' = -\,1,173335$	$\phi t''^2 = 2,348958$
$h = 0,151578$	$h' = 0,721952$	$\text{Log.}\,m = 0.003177$
$\varkappa = 0,267129$	$\varkappa' = 0,523052$	$\text{Log.}\,m' = 0.069891$
$q = 2,593521$	$q' = -\,2,103553$	$\text{Log.}\,\Theta = 8.661687$

Onde ſe advertirá, que pomos os Logarithmos ſómente das quantidades, que ſe haõ de multiplicar no calculo das noſſas formulas; que uſamos dos Logarithmos á maneira dos Aſtronomos, dando a characteriſca o ás unidades, 9 ás decimas, 8 ás centeſimas &c.; e que quando pomos o ſinal — a hum Logarithmo naõ he porque elle ſeja negativo, mas porque o he o número a quem correſponde, para ſe ter conta com o ſinal do producto, conforme a regra conhecida.

127. As ultimas nove quantidades h, h' &c., que ſervem taõ ſómente para achar os primeiros valores approximados, naõ carecem de ſer calculadas com muito eſcrupulo; mas em todas as outras deve haver grande cuidado, tendo-ſe advertencia de uſar ao menos de huma caſa

decimal de mais tanto nos Logarithmos, como nos números, quando se tratar de averiguar com exactidaõ o resultado de algumas observações. Supposto pois o calculo das quantidades precedentes, busquemos os primeiros valores approximados de x, x', x'', por meio dos tres valores hypotheticos:

I.		II.		III.	
$x' =$	0,2	$x' =$	0,6	$x' =$	1
$lx' =$	9.301030	$lx' =$	9.778151	$lx' =$	0.000000
$lr' =$	9.965466	$lr' =$	9.943008	$lr' =$	0.001173
$lx =$	9.351023	$lx =$	9.794836	$lx =$	9.983578
$lr =$	9.953307	$lr =$	9.922365	$lr =$	9.966962
$lR' =$	0.260459	$lR' =$	0.233838	$lR' =$	0.285434
$lE' =$	7.984122	$lE' =$	8.067331	$lE' =$	8.040761
$lF' =$	0.475723	$lF' =$	0.475428	$lF' =$	0.475528
$\gamma =$	−0,677319	$\gamma' =$	−0,674002	$\gamma'' =$	−0,493563.

E com os resultados γ, γ', γ'', e a differença dos valores hypotheticos $\eta = 0{,}4$ neste caso, acharemos pela formula do *num.* 119, $dx' = +0{,}1925 \pm 0{,}8716$; e servindo sómente neste caso o sinal $+$, será $dx' = 1{,}0641$, e conseguintemente $x' = 1{,}2641$; valor, que se chega já bastantemente para a verdade. Onde se verá a grande ventagem, que resulta da applicaçaõ do methodo das interpolações á resoluçaõ das nossas formulas. Porque, se com as duas primeiras hypotheses buscassemos o valor de x' pela regra de falsa posiçaõ, achariamos 81,87 com enorme apartamento da verdade; e se o buscassemos com as duas ultimas, achariamos 2,094, que dista mais do verdadeiro que qualquer das ditas hypotheses. Donde se vê, que as falsas posições saõ inuteis, em quanto por muitas, e laboriosas tentativas se naõ tem chegado bem perto do que se busca, e que o methodo das interpolações de hum só passo nos põe na vizinhança do que procuramos.

128.

128. Mas para rectificar o valor achado faremos outra operaçaõ, tomando os valores hypotheticos muito chegados ao que achamos, da maneira seguinte

I.		II.		III.	
$x' =$	1,25	$x' =$	1,27	$x' =$	1,29
$lx' =$	0.096910	$lx' =$	0.103804	$lx' =$	0.110590
$lr' =$	0.059555	$lr' =$	0.064485	$lr' =$	0.068545
$lx =$	0.072919	$lx =$	0.079543	$lx =$	0.086177
$lr =$	0.017761	$lr =$	0.022323	$lr =$	0.026996
$lR' =$	0.340189	$lR' =$	0.344945	$lR' =$	0.349298
$lE' =$	8.073928	$lE' =$	8.077295	$lE' =$	8.081919
$lF' =$	0.475402	$lF' =$	0.475389	$lF' =$	0.475369
$\gamma =$	$-0{,}088510$	$\gamma' =$	$-0{,}042582$	$\gamma'' =$	$+0{,}005344.$

Com estes resultados, e com a differença, que agora he $\eta = 0{,}02$, acharemos $dx' = 0{,}037672$, e conseguintemente $x' = 1{,}287672$. E porque he escusado continuar mais operações, com o valor de x' acharemos $x = 1{,}217128$, e $x'' = 1{,}506477$ proximamente (*num.* 120).

129. Agora passando a corregir estes valores approximados por meio das formulas rigorosas, calcularemos as quantidades seguintes (*num.* 121):

$lx =$	0.085336	- -	$lr =$	0.026398	- -	$lR =$	0.387518
$lx' =$	0.109805	- -	$lr' =$	0.068855	- -	$lR' =$	0.349175
$lx'' =$	0.177962	- -	$lr'' =$	0.139266	- -	$lR'' =$	0.406516
$lE =$	8.738082	- -	$lF =$	0.469127	- -	$\delta =$	$-0{,}002412$
$lE' =$	8.080339	- -	$lF' =$	0.475375	- -	$\delta' =$	$-0{,}000014$
$lE'' =$	8.201894	- -	$lF'' =$	0.474812	- -	$\delta'' =$	$+0{,}001113$
$lD =$	0.093463	- -	$l\alpha =$	1.108615	- -	$l\beta =$	0.638607
$lD' =$	0.125910	- -	$l\alpha' =$	-0.182668	- -	$l\beta' =$	0.685320
$lD'' =$	0.180253	- -	$l\alpha'' =$	9.760363	- -	$l\beta'' =$	0.489251.

E com as quantidades δ, α, β &c. acharemos as cor-

rec-

recções $dx = -0{,}000134$, $dx' = -0{,}000392$, $dx'' = +0{,}001339$, as quaes ſendo applicadas ás quantidades reſpectivas, teremos $x = 1{,}216994$, $x' = 1{,}287280$, $x'' = 1{,}507816$.

130. Mas para mais nos chegarmos á exactidaõ, tornemos com eſtes valores correctos a repetir a operaçaõ, e teremos

lx =	0.085289 --	lr =	0.026364 --	lR =	0.387684
lx' =	0.109673 --	lr' =	0.068758 --	lR' =	0.349108
lx'' =	0.178349 --	lr'' =	0.139586 --	lR'' =	0.406644
lE =	8.737725 --	lF =	0.469134 --	δ =	+ 0,000057
lE' =	8.080517 --	lF' =	0.475365 --	δ' =	− 0,000134
lE'' =	8.201315 --	lF'' =	0.474814 --	δ'' =	+ 0,000004
lD =	0.093408 --	$l\alpha$ =	1.107946 --	$l\beta$ =	0.639006
lD' =	0.125790 --	$l\alpha'$ =	−0.183847 --	$l\beta'$ =	0.682048
lD'' =	0.180490 --	$l\alpha''$ =	9.788516 --	$l\beta''$ =	0.493788.

Donde concluiremos novamente $dx = +0{,}000038$, $dx' = +0{,}000022$, $dx'' = -0{,}000176$; e applicando eſtas correcções ás quantidades reſpectivas, teremos $x = 1{,}217032$, $x' = 1{,}287302$, $x'' = 1{,}507640$; valores taõ correctos, que ſubſtituidos outra vez nas equações fundamentaes dariaõ os reſultados $\delta = -0{,}000013$, $\delta' = +0{,}000001$, $\delta'' = -0{,}000009$, com os quaes he inutil buſcar novas correcções, porque havendo uſado neſtes calculos de ſeis caſas decimaes taõ ſómente, naõ he certa a figura da quinta caſa dos ditos reſultados.

131. Corregindo tambem as quantidades, que haõ de entrar na determinaçaõ dos elementos, acharemos $lr = 0.026374$, $lr'' = 0.139544$, $lR = 0.387665$, $lE = 8.737787$, $\omega^2 = 0{,}8936412$. Com eſtas quantidades acharemos $lp = 9.999997$, e conſeguintemente ſerá a diſtancia perihelia $p = 0{,}999993$, e $\tau'' = 57^d{,}00014 = 57^d\ 0^h\ 0'\ 12''$, donde concluiremos a paſſagem pelo perihelio em 20 de Março ás

11^h

$11^h\ 59'\ 48''$. Se o Logarithmo de τ'' na ultima casa decimal tivesse de menos huma unidade, sería justamente $\tau''=57^d$, e a passagem pelo perihelio em 20 de Março ás 12^h; e por aqui se verá a necessidade de usar de mais casas decimaes, quando se quizer conhecer com grande exactidaõ o resultado de observações, que mereçaõ esse trabalho.

132. Em fim, calculando os termos do valor da Tangente de N (*num.* 124), acharemos o numerador d'ella $=+0{,}2710262$, e o denominador $=-0{,}3229927$, donde concluiremos $N=139^\circ\ 59'\ 58''$, e depois d'isso $I=+30^\circ\ 0'\ 1'',4$, sendo directo o movimento por sahir a inclinaçaõ positiva. E porque achamos $P+U-N=-11^\circ\ 54'\ 14''$, e $U=28^\circ\ 5'\ 51''$, será $P=99^\circ\ 59'\ 51''$. Assim teremos os elementos d'esta maneira:

Longitude do nodo ascendente	$4^s\ 19^\circ\ 59'\ 58''$
Longitude do perihelio	3 9 59 53
Inclinaçaõ da orbita	30 0 1
Logarithmo da distancia perihelia	9.999997
Passagem pelo perihel. Março	$11^h\ 59'\ 40''$ *temp.med.*
Movimento	Directo.

Os quaes concordaõ com os elementos suppostos (num. 125) com as tenuissimas differenças de 0,000003 no Logarithmo da distancia perihelia, de $12''$ de tempo na passagem pelo perihelio, de $2''$ na longitude do nodo, de $1''$ na inclinaçaõ da orbita, e de $7''$ na longitude do perihelio; differenças, que provém, como havemos dito, de naõ usarmos de mais casas decimaes.

133. Se nos contentassemos com os valores de x, x' da soluçaõ approximada do *num.* 128, e com elles determinassemos os elementos, pondo r', R', ϖ', λ', Σ', l', em vez de r', R', ϖ'', λ'', Σ'', l'' respectivamente nas formulas do *num.* 124, achariamos

Longitude do nodo aſcendente	4^s $19°$ $59'$ $20'$
Longitude do perihelio	3 9 40 0
Inclinaçaõ	30 0 52
Logarithmo da diſtancia perihelia	9.999897
Paſſagem pelo perihel. Março	20^d 10^h $52'$ *temp.med.*
Movimento	Directo.

elementos, que naõ differem mais da verdade, do que coſtumaõ differir entre ſi os que ſaõ calculados por diverſos Aſtronomos. E aſſim bem podemos nos caſos ordinarios ficar n'aquella ſoluçaõ approximada, que naõ requer tanto trabalho, como acima advertimos (*num.* 120).

§. XI.

Calculo da Orbita do Cometa de 1680.

134. Eſte Cometa, que de todos os conhecidos he o que paſſa mais perto do Sol no perihelio, e da orbita da terra no nodo aſcendente, ou na vizinhança d'elle, veio em 1680 dar hum novo teſtemunho a Newton da theorica dos movimentos dos corpos celeſtes, que taõ felizmente havia deſcuberto, e em cuja evoluçaõ occupava por aquelle tempo todas as forças do ſeu engenho. Como quem tinha naſcido para ler no grande livro do Univerſo os ſegredos, que a natureza eſcondeo por tantos ſeculos aos olhos mortaes, logo conheceo pelas obſervações d'aquelle Cometa, que elle, e todos os outros ſaõ corpos coevos ao mundo, que guardaõ as meſmas leis das forças centraes, ſómente com a differença de andarem por trajectorias muito excentricas, e naõ ſerem ſenſiveis ao alcance da noſſa viſta, ſenaõ quando de diſtancias remotiſſimas ſe chegaõ para o perihelio. E conſiderando tambem, que hum pequeno arco de huma Orbita elliptica muito alongada na vizinhança do vertice, ſe confunde ſenſivelmen-

mente com huma parabola, logo alcançou que nos Cometas se podia com grande ventagem substituir esta curva em lugar d'aquella; e para a determinar por meio de tres observações ensinou huma construcçaõ, ainda que approximada, muito engenhosa, a qual elle mesmo executou por sua maõ em huma grande figura, para determinar os elementos approximados d'este famoso Cometa de 1680, que muitos com razaõ chamaõ o Cometa Newtoniano.

135. Para determinarmos pois a orbita d'este Cometa pelo cálculo das nossas formulas, usaremos das mesmas observações, de que se servio aquelle grande Geometra, as quaes saõ estas.

Londres. 1680.	*Estil. velh.*	*Longitude.*	*Latitude.*
Dezemb.	$21^d\ 6^h\ 36'\ 59''$	$10^s\ 5^\circ\ 8'\ 12''$	$21^\circ\ 42'\ 13''$ *B*
Janeiro	5 6 1 38	0 8 48 53	26 15 17 *B.*
	25 7 58 42	1 9 35 0	17 56 30 *B.*

E calculando os lugares do Sol pelas Taboas modernas, que tem mais exactidaõ, do que as que havia no tempo de Newton, teremos as quantidades seguintes:

$l = -54^\circ\ 51'\ 48''$	$\Sigma = -78^\circ\ 53'\ 22''$	$\text{Log.}\, s = 9.992634$
$l' = 8\ \ 48\ \ 53$	$\Sigma' = -63\ \ 38\ \ 13$	$\text{Log.}\, s' = 9.993034$
$l'' = 39\ \ 35\ \ 0$	$\Sigma'' = -43\ \ 15\ \ 10$	$\text{Log.}\, s'' = 9.994253$
$L = 21^\circ\ 42'\ 13''$	$A = 24^\circ\ 1'\ 34''$	$C = 94^\circ\ 26'\ 48''$
$L' = 26\ \ 15\ \ 17$	$A' = 72\ \ 27\ \ 6$	$C' = 63\ \ 40\ \ 41$
$L'' = 17\ \ 56\ \ 30$	$A'' = 82\ \ 50\ \ 10$	$C'' = 30\ \ 46\ \ 7$
$S = 35^\circ\ 38'\ 12''$	$B = 72^\circ\ 30'\ 50''$	$\text{Log.}\, g = 9.780203$
$S' = 15\ \ 15\ \ 9$	$B' = 82\ \ 34\ \ 16$	$\text{Log.}\, g' = 9.416771$
$S'' = 20\ \ 23\ \ 3$	$B'' = 80\ \ 15\ \ 18$	$\text{Log.}\, g'' = 9.542536$
$a = 1{,}668681$	$s^2 = 0{,}966647$	$\text{Log.}\, f = 8.957946$
$a' = 0{,}532205$	$s'^2 = 0{,}968429$	$\text{Log.}\, f' = 0.027812$
$a'' = 0{,}234169$	$s''^2 = 0{,}973882$	$\text{Log.}\, f'' = 0.240247$

$b = -0,127589$ - - -	$e = -0,138577$ - -	$\phi t^2 = 6,546061$
$b' = -0,461561$ - - -	$e' = -0,555929$ - -	$\phi t'^2 = 1,194528$
$b'' = -0,662394$ - - -	$e'' = -1,126028$ - -	$\phi t''^2 = 2,147932$
$h = 0,124029$ - - -	$h' = 0,631432$ - -	Log. $m = 9.936842$
$\varkappa = 0,046080$ - - -	$\varkappa' = 0,311253$ - -	Log. $m' = 0.297526$
$q = 2,088091$ - - -	$q' = -0,186731$ - -	Log. $\Theta = 8.651321$

136. E tomando os tres coſtumados valores hypotheticos de x', para a primeira operaçaõ da ſoluçaõ approximada, calcularemos as quantidades que ſe ſeguem:

I.		II.		III.	
$x' =$	0,2	$x' =$	0,6	$x' =$	1
$lx' =$	9.301030	$lx' =$	9.778151	$lx' =$	0.000000
$lr' =$	9.977600	$lr' =$	0.001968	$lr' =$	0.078611
$lx =$	9.240876	$lx =$	9.691504	$lx =$	9.905775
$lr =$	9.924525	$lr =$	9.794460	$lr =$	9.716794
$lR' =$	0.252903	$lR' =$	0.211522	$lR' =$	0.235370
$lE' =$	7.715050	$lE' =$	8.447898	$lE' =$	8.954006
$lF' =$	0.476370	$lF' =$	0.473042	$lF' =$	0.463900
$\gamma =$	$-0,927536$	$\gamma' =$	$-0,126587$	$\gamma'' =$	$+2,677302.$

E com os reſultados $\gamma, \gamma', \gamma''$, e a differença dos valores hypotheticos $\eta = 0,4$ calcularemos a formula do *num.* 119, que nos dará a correcçaõ do primeiro valor hypothetico $dx' = +0,04004 \pm 0,38703$; e ſendo inutil neſte caſo o ſinal $-$, teremos $dx = +0,42707$, e por conſeguinte $x' = 0,62707$ proximamente.

137. Mas para nos chegarmos mais para o verdadeiro valor de x', quanto permitte a approximaçaõ de huma das equaçöes, que aqui ſervem, tornaremos a repetir a operaçaõ, eſtreitando os limites das hypotheſes na vizinhança do valor achado

I.

I.		II.		III.	
$x' =$	0,62	$x' =$	0,63	$x' =$	0,64
$lx' =$	9.792392	$lx' =$	9.799341	$lx' =$	9.806180
$lr' =$	0.004909	$lr' =$	0.006427	$lr' =$	0.007977
$lx =$	9.704903	$lx =$	9.711451	$lx =$	9.717906
$lr =$	9.788606	$lr =$	9.785721	$lr =$	9.782867
$lR' =$	0.211117	$lR' =$	0.210976	$lR' =$	0.210876
$lE' =$	8.483462	$lE' =$	8.500792	$lE' =$	8.517815
$lF' =$	0.472692	$lF' =$	0.472511	$lF' =$	0.472326
$\gamma =$	$-$ 0,040552	$\gamma' =$	$+$ 0,004258	$\gamma'' =$	$+$ 0,050258.

donde femelhantemente concluiremos $dx' = +\, 0{,}009065$, e $x' = 0{,}629065$, e confeguintemente $x = 0{,}513859$, e $x'' = 1{,}192514$; valores, com os quaes determinariamos immediatamente a orbita, fe nos contentaffemos com a foluçaõ approximada.

138. Recorrendo porém ás formulas exactas, para corrigirmos os valores precedentes, calcularemos as quantidades feguintes:

$lx =$	9.710844	$lr =$	9.785990	$lR =$	0.315093
$lx' =$	9.798696	$lr' =$	0.006284	$lR' =$	0.210990
$lx'' =$	0.076463	$lr'' =$	0.162832	$lR'' =$	0.392604
$lE =$	8.943622	$lF =$	0.464217	$\delta =$	$+$ 0,020454
$lE' =$	8.499177	$lF' =$	0.472528	$\delta' =$	$+$ 0,000019
$lE'' =$	8.207018	$lF'' =$	0.474782	$\delta'' =$	$+$ 0,011774
$lD =$	0.020843	$l\alpha =$	0.888268	$l\beta =$	0.504830
$lD' =$	9.854608	$l\alpha' =$	0.315119	$l\beta' =$	$-$ 0.407104
$lD'' =$	0.169780	$l\alpha'' =$	0.880826	$l\beta'' =$	1.125833.

e com δ, α, β, &c. pelas formulas do *num.* 121, acharemos $dx = +\, 0{,}000364$, $dx' = -\, 0{,}000572$, e $dx'' = -\, 0{,}001741$; correcçóes, que fendo applicadas ás quantidades refpectivas, daraõ $x = 0{,}514223$, $x' = 0{,}628493$, $x'' = 1{,}190773$.

139. E contentando-nos com esta operação, buscaremos as correcções de r', r'', R, E, que seraõ $dr = -0,000191$, $dr'' = -0,001287$, $dR = -0,001478$, $dE = -0,000082$, e conseguintemente teremos Log. $r = 9.785853$, Log. $r'' = 0.162447$, Log. $R = 0.314782$, Log. $E = 8.943175$, $\omega^2 = 0,8322269$. Pelo que acharemos Log. $p = 7.796158$, $p = 0,006254$, e $\tau'' = 48,3358 = 48^d\ 8^h\ 3'\ 31''$. Donde se segue a passagem pelo perihelio a 7 de Dezembro ás $23^h\ 55'\ 11''$ do meridiano de Londres pelo estilo velho, que vem a ser a 18 de Dezembro ás $0^h\ 4'\ 53''$ do meridiano de París pelo estilo Gregoriano.

140. Para indagar o resto dos elementos, acharemos Log. $\lambda = 9.679218$, Log. $\lambda'' = 0.054169$, Log. $\varpi = 9.279124$, Log. $\varpi'' = 9.564448$, donde calculando o valor da Tangente de N, será o numerador $= -0,0552923$, e o denominador $= +0,0020167$, e conseguintemente $N = -87°\ 54'\ 40''$, que vem a ser o mesmo que $+272°\ 5'\ 20''$. Do mesmo modo acharemos o valor de $I = 60°\ 46'\ 40''$, conhecendo ao mesmo tempo ser directo o movimento do Cometa na sua orbita, por sahir a Tangente d'este angulo positiva. Em fim acharemos $P + U - N = 159°\ 5'\ 53''$; e porque a anomalia correspondente á primeira observaçaõ he $U = 168°\ 23'\ 3''$, teremos $P = -97°\ 11'\ 50''$, que vem a ser o mesmo que $262°\ 48'\ 10''$.

141. De todos estes calculos resultaõ pois os elementos da orbita d'este Cometa na fórma seguinte:

Longitude do nodo ascendente	9^s	$2°$	$5'$	$20'$	
Longitude do perihelio	8	22	48	10	
Inclinaçaõ		60	46	40	
Logarithmo da distancia perihelia		7.796188			
Passagem pelo perihel. Dez.	18^d	0^h	$4'$	$53''$	*temp. med.*
Movimento		Directo.			

OS

os quaes concordaõ proximamente com os de Newton, e Halley, procedendo as pequenas differenças, que nelles ha, de tomarmos as posições, e distancias do Sol differentes, conforme as Taboas que depois d'ellas se aperfeiçoáraõ pela theorica, e pela observaçaõ.

§. XII.

Cálculo da Orbita do Cometa de 1759.

142. Para dar mais outro exemplo, tomemos o Cometa de 1759, que nos annaes da Astronomia ficará para sempre memoravel pela predicçaõ, que fez Halley da sua volta, e pelos calculos immensos, com que M. Clairaut collegio do modo possivel os effeitos, que deviaõ produzir as attracções de Jupiter, e Saturno sobre o tempo periodico d'elle na ultima revoluçaõ. Servir-nos-hemos para isso das observações referidas, e apuradas por M. de La-Lande nas Memorias da Academia de París do mesmo anno, que saõ da maneira seguinte:

París. 1759.	*Temp. m.*	*Longitude.*	*Latitude.*
Abril	$15^d\ 16^h\ 40'\ 23''$	$10^s\ 18^\circ\ 52'\ 12''$	$4^\circ\ 28'\ 44''$ *A*
Maio.	1 8 54 16	5 22 36 7	31 32 16 *A*
	21 9 28 38	5 7 31 51	15 3 16 *A.*

143. Calculando os lugares, e distancias do Sol para os tres instantes d'estas observações, e preparando as quantidades necessarias para a resoluçaõ da questaõ, teremos

$l = -41^\circ\ 7'\ 48''$ ---	$\Sigma = 25^\circ\ 51'\ 5''$ --	$\text{Log.}\, s = 0.002016$
$l' = 172\ 36\ 7$ ---	$\Sigma' = 41\ 5\ 49$ --	$\text{Log.}\, s' = 0.003801$
$l'' = 157\ 31\ 51$ ---	$\Sigma'' = 60\ 23\ 55$ --	$\text{Log.}\, s'' = 0.005636$
$L = -\ 4^\circ\ 28'\ 44''$ ---	$A = -66^\circ 58'\ 53''$ --	$C = -161^\circ\ 20'\ 21''$
$L' = -31\ 32\ 16$ ---	$A' = 131\ 30\ 18$ --	$C' = -146\ 16\ 5$
$L'' = -15\ 3\ 16$ ---	$A'' = 97\ 7\ 56$ --	$C'' = -15\ 4\ 16$

$S = 34° 32' 50''$	--	$B = 73° 39' 40''$	--	$\text{Log.} g =$	9.777559
$S' = 15\ 14\ 44$	--	$B' = 83\ 15\ 24$	--	$\text{Log.} g' =$	9.426700
$S'' = 19\ 18\ 6$	--	$B'' = 81\ 3\ 40$	--	$\text{Log.} g'' =$	9.530169
$a = 0{,}783301$	--	$s^2 = 1{,}009328$	--	$\text{Log.} f =$	-0.251314
$a' = -1{,}139564$	--	$s'^2 = 1{,}017658$	--	$\text{Log.} f' =$	-0.124372
$a'' = -0{,}242928$	--	$s''^2 = 1{,}026295$	--	$\text{Log.} f'' =$	0.269790
$b = 1{,}186995$	--	$e = 0{,}511258$	--	$\phi t^2 =$	6,788548
$b' = -0{,}292632$	--	$e' = -0{,}486966$	--	$\phi t'^2 =$	1,308952
$b'' = -0{,}624400$	--	$e'' = -1{,}047322$	--	$\phi t''^2 =$	2,135661
$h = 0{,}799000$	--	$h' = -0{,}219963$	--	$\text{Log.} m =$	0.092940
$\kappa = 0{,}459831$	--	$\kappa' = -0{,}158171$	--	$\text{Log.} m' =$	0.542614
$q = -4{,}076142$	--	$q' = -2{,}111874$	--	$\text{Log.} \Theta =$	8.659801

144. E havendo feito a primeira operaçaõ com os tres valores hypotheticos coſtumados de x', aſſim como nos exemplos precedentes, e achando por ella que x' he proximamente 0,25, repetiremos a operaçaõ ſeguinte:

I.		II.		III.	
$x' =$	0,24	$x' =$	0,25	$x' =$	0,26
$lx' =$	9.380211	$lx' =$	9.397940	$lx' =$	9.414973
$lr' =$	0.064966	$lr' =$	0.067574	$lr' =$	0.070182
$lx =$	9.569114	$lx =$	9.586130	$lx =$	9.602465
$lr =$	9.966332	$lr =$	9.966230	$lr =$	9.966241
$lR' =$	0.319473	$lR' =$	0.320881	$lR' =$	0.322343
$lE' =$	8.160524	$lE' =$	8.208730	$lE' =$	8.254342
$lF' =$	0.475021	$lF' =$	0.474773	$lF' =$	0.474514
$\gamma =$	$-0{,}136798$	$\gamma' =$	$+0{,}012096$	$\gamma'' =$	$+0{,}171517$.

donde ſe collige $dx' = +0{,}009213$, e conſeguintemente $x' = 0{,}249213$, $x = 0{,}384430$, e $x'' = 0{,}964835$.

145.

145. Para resolver pois as equações rigorosas, ou buscar as correcções dos valores approximados de x, x', x'', que acabámos de achar, calcularemos as quantidades seguintes:

$lx = 9.584817$ - -	$lr = 9.966234$ - -	$lR = 0.381223$
$lx' = 9.396571$ - -	$lr' = 0.067369$ - -	$lR' = 0.320769$
$lx'' = 9.984453$ - -	$lr'' = 0.170380$ - -	$lR'' = 0.422952$
$lE = 8.749962$ - -	$lF = 0.468903$ - -	$\delta = -0,005314$
$lE' = 8.205030$ - -	$lF' = 0.474793$ - -	$\delta' = -0,000004$
$lE'' = 8.109480$ - -	$lF'' = 0.475254$ - -	$\delta'' = -0,003380$
$lD = -8.193363$ - -	$l\alpha = 1.140393$ - -	$l\beta = 0.741716$
$lD' = 0.146942$ - -	$l\alpha' = 0.855183$ - -	$l\beta' = -0.956567$
$lD'' = 0.166600$ - -	$l\alpha'' = 1.024392$ - -	$l\beta'' = 1.273343.$

as quaes nos daraõ as correcções procuradas $dx = -0,000475$, $dx' = +0,000366$, $dx'' = +0,000633$; e teremos conseguintemente $x = 0,383955$, $x' = 0,249579$, $x'' = 0,965468$.

146. E ficando nos valores antecedentes, que com effeito satisfazem ás equações fundamentaes até os limites, onde chega a exactidaõ das nossas operações numericas, corrigiremos as outras quantidades, de que depende a determinaçaõ dos elementos. E acharemos $dr = +0,0000037$, $dr'' = +0,0004645$, $dR = +0,0004682$, $dE = +0,0000117$. Donde se conclue Log. $r = 9.966236$, Log. $r'' = 0.170516$, Log. $R = 0.381308$, Log. $E = 8.750050$, e $\omega = 1 - E = 0,9437594$. Com estas quantidades achamos Log. $p = 9.777257$, e conseguintemente $p = 0,598766$, e $\tau'' = 68^d\ 22^h\ 28'\ 7''$; donde resulta a passagem pelo perihelio a 13 de Março ás $11^h\ 0'\ 31''$.

147. Para concluir os mais elementos, teremos Log. $\lambda = 9.582952$, Log. $\lambda'' = 9.969571$; Log. $\varpi = -8.476886$, $l\varpi'' = -9.399271$, e acharemos $N = 54°\ 9'\ 41''$, e $I =$

$-17^\circ\ 27'\ 55''$; conhecendo ser o Cometa retrogrado, por sahir a inclinaçaõ, ou a sua Tangente negativa. Finalmente acharemos $P+U-N=173^\circ\ 48'\ 4''$, e $U=72^\circ\ 52'\ 54''$; e reflectindo, que a anomalia U deve mudar de final, por ser a primeira observaçaõ, á qual corresponde, depois da passagem pelo perihelio em Cometa retrogrado, será $P=300^\circ\ 50'\ 39''$. Do que tudo resultaõ os elementos seguintes:

Longitude do nodo ascendente	1ˢ 24°	9′	41″	
Longitude do perihelio	10 0	50	39	
Inclinaçaõ	17	27	55	
Logarithmo da distancia perihelia	9.777257			
Passagem pelo perihel. Març.	13ᵈ 11ʰ	0′	31″	*temp. med.*
Movimento	Retrogrado.			

148. Estes elementos naõ devem comparar-se com os que andaõ na Taboa dos Cometas, porque esses foraõ deduzidos na supposiçaõ de huma orbita elliptica, cujo eixo se determinou pelo tempo periodico, conforme a regra de *Kepler*. Devem confrontar-se com outros elementos parabolicos, como saõ os de *Klinkenberg*, referidos nas Memorias da Academia de París, A. 1760, dos quaes naõ differem mais, do que entre si discrepaõ os elementos ellipticos calculados pelo mesmo Author, e pelos grandes Astronomos *La Caille*, *Maraldi*, e *Lalande*.

149. Mas a melhor comparaçaõ, que póde fazer-se, he com as observações. Calculando sobre os nossos elementos os lugares do Cometa para os tres instantes d'ellas, achamos $l=-41^\circ\ 7'\ 52''$, $l'=172^\circ\ 36'\ 12''$, $l''=157^\circ\ 31'\ 50''$; $L=-4^\circ\ 28'45''$, $L'=-31^\circ\ 32'\ 52''$, $L''=-15^\circ\ 3'\ 15''$; resultados, que differem das observações muito menos, do que póde ser a incerteza d'ellas, confessando hum dos mais habeis Observadores *M. de La Caille*, que este Cometa se mostrou sempre escuro, e confuso, e que as posições d'elle se naõ podiaõ dar por seguras, senaõ nos minutos, naõ sen-

ſendo para admirar, que obſervaçóes feitas ao meſmo tempo differiſſem 2′ entre ſi (Mem. 1760, pag. 60).

150. Se calcularmos porém pelos meſmos elementos o lugar do Cometa para hum tempo bem diſtante das obſervaçóes, donde elles ſe deduzíraõ, acharemos que a 28 de Janeiro $6^h\ 28'\ 22''$, deveria ter a longitude $11^s\ 19°\ 45'\ 43''$, e a latitude boreal $5°\ 36'\ 15''$. Mas pela obſervaçaõ de M. *Meſſier* foi a longitude $11^s\ 20°\ 46'\ 49''$, e a latitude $5°\ 3'\ 46''$, com differenças exorbitantes, e que excedem muito a incerteza, que podia haver nas obſervaçóes de taõ habil Aſtronomo. Procede iſto da inflexaõ do orbe elliptico, que ſe faz já ſenſivel n'aquella diſtancia, e que ſe determinará do modo, que moſtraremos na Segunda Parte.

MEMORIA

Sobre algumas propriedades dos Coefficientes dos termos do Binomio Newtoniano.

POR FRANCISCO DE BORJA GARÇAÕ STOCKLER.

Theorema I.

Lida em 22 de Novembro de 1797.

A Somma dos coefficientes dos termos do binomio $(1-x)^n$ depois de desenvolvido em serie he nulla sendo n numero inteiro positivo.

Demonstraçaõ.

Desenvolvendo $(1-x)^n$ em serie, teremos

$$(1-x)^n = 1 - \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1.2}x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3 + \&c:$$

mas supondo $x = 1$ fica

$$(1-1)^n = 1 - \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \&c. = 0$$

Advertencia.

Quando pelo decurso d'esta Memoria tivermos de fallar da somma dos termos d'esta serie a designaremos pela letra A.

Theorema II.

Se os termos da serie dos coefficientes do binomio $(1-x)^n$ se multiplicarem ordenadamente pelos termos da serie dos numeros naturaes, a saber, o primeiro por n, o segundo por $(n-1)$, o terceiro por $(n-2)$, e assim suc-

ſucceſſivamente a ſomma dos termos da ſerie reſultante d'eſtas multiplicações ſerá nulla, ſendo n numero inteiro poſitivo > 1, e ſerá $= 1$, ſendo $n = 1$.

Demonſtração.

Multiplicando ordenadamente as duas ſeries

$$1 - \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} - \&c.$$

$$n + (n-1) + (n-2) + (n-3) \qquad + (n-4) \qquad + \&c.$$

ſe obtem a ſerie

$$n - \frac{n(n-1)}{1} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3} + \&c.$$

cuja ſomma repreſento por A'', e a qual ſe reduz a

$$n\left(1 - \frac{(n-1)}{1} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3} + \&c.\right)$$

iſto he, a n multiplicado pela ſomma dos termos da ſerie dos coefficientes do binomio $(1 - x)^{n-1}$ a qual repreſento por B, e por tanto ſerá

$$A'' = nB.$$

Mas, ſendo n numero inteiro poſitivo > 1, he $(n - 1)$ numero inteiro poſitivo, e por tanto pelo Theorema antecedente he $B = 0$, donde ſe deduz, que he tambem $A'' = 0$: mas ſendo $n = 1$, he $B = 1$, e por conſequencia vem a ſer neſte caſo particular

$$A'' = 1.$$

Theorema III.

Se os termos da ſerie dos coefficientes do binomio $(1 - x)^n$ ſe multiplicarem ordenadamente pelos termos da ſerie dos quadrados dos numeros naturaes, a ſaber, o primeiro por n^2, o ſegundo por $(n - 1)^2$, o terceiro por $(n - 2)^2$, e aſſim ſucceſſivamente, a ſomma dos termos da ſe-

ſerie reſultante d'eſtas multiplicações ſerá nulla, ſendo n numero inteiro poſitivo > 2; e ſerá $= 2.1$, ſendo $n = 2$.

Demonſtraçaõ.

Multiplicando ordenadamente as duas ſeries

$$1 - \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} - \&c.$$

$$n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + (n-3)^2 \qquad + (n-4)^2 \qquad + \&c.$$

ſe obtem a ſerie

$$n^2 - \frac{n(n-1)^2}{1} + \frac{n(n-1)(n-2)^2}{1.2} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)^2}{1.2.3} + \&c.$$

cuja ſomma repreſento por $A^{2\prime}$. Eſta ſerie ſe obteria tambem multiplicando ordenadamente as duas ſeguintes

$$n - \frac{n(n-1)}{1} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3} + \&c.$$

$$n + (n-1) \quad + (n-2) \qquad + (n-3) \qquad + \&c.$$

e por tanto evidentemente ſe reſolve nas duas ſeguintes

$$n^2 - \frac{n^2(n-1)}{1} + \frac{n^2(n-1)(n-2)}{1.2} - \frac{n^2(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3} + \&c.$$

$$n(n-1) - \frac{n(n-1)(n-2)}{1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2} - \&c.$$

a ſomma da primeira das quaes he $= nA^{1\prime}$, e a da ſegunda he $= n\underset{(1)}{A}^{1\prime}$, repreſentando por $\underset{(1)}{A}^{1\prime}$ a ſomma dos termos da ſerie, em que ſe converteria aquella, cuja ſomma he $A^{1\prime}$, ſe em cada hum dos ſeus termos ſe eſcreveſſe $(n-1)$ em lugar de n. D'aquí ſe deduz

$$A^{2\prime} = n\left(A^{1\prime} + \underset{(1)}{A}^{1\prime}\right)$$

Porém, ſendo n numero inteiro poſitivo > 2, cada huma d'eſtas ſommas $A^{1\prime}$, e $\underset{(1)}{A}^{1\prime}$ he nulla pelo Theorema ante-

cc-

cedente, e por conſequencia ſerá tambem $A^{2'} = 0$. Mas pelo meſmo Theorema, ſendo $n=2$, he $A^{1'} = 0$, e $A^{1'}_{(1)} = 1$. Logo neſte caſo particular ſerá

$$A^{2'} = 2 \cdot 1.$$

Advertencia.

D'aquí em diante por evitar repetições, quando dada huma ſerie qualquer, e eſcolhida huma letra para repreſentar a ſomma dos ſeus termos, houvermos de tratar da ſomma da ſerie, que ſe obteria ſubſtituindo em cada hum dos meſmos termos $(n-1)$, $(n-2)$, $(n-3)$, ou em geral $(n-k)$ em lugar de n, repreſentaremos a dita ſomma pela meſma letra, por que ſe houver repreſentado a ſomma da ſerie primitiva, pondo-lhe por baixo o numero k fechado entre parentheſis. Aſſim por exemplo para repreſentar a ſomma dos termos da ſerie, que ſe obteria ſubſtituindo, $(n-1)$, $(n-2)$, $(n-3)$, ou em geral $(n-k)$ em lugar de n em cada hum dos termos da ſerie, cuja ſomma he $A^{2'}$, eſcreveremos $A^{2'}_{(1)}$, $A^{2'}_{(2)}$, $A^{2'}_{(3)}$, ou $A^{2'}_{(k)}$; e aſſim em todos os outros caſos.

Theorema IV.

Se os termos da ſerie dos coefficientes do binomio $(1-x)^n$ ſe multiplicarem ordenedamente pelos termos da ſerie dos cubos dos numeros naturaes; a ſaber, o primeiro por n^3, o ſegundo por $(n-1)^3$, o terceiro por $(n-2)^3$; e aſſim ſucceſſivamente, a ſomma dos termos da ſerie reſultante d'eſtas multiplicações ſerá nulla, ſendo n numero inteiro poſitivo > 3, e ſerá $= 3.2.1$, ſendo $n = 3$.

Demonſtração.

Multiplicando ordenadamente as duas ſeries

1 —

$$1 - \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} - \&c.$$

$$n^3 + (n-1)^3 + (n-2)^3 + (n-3)^3 \quad + (n-4)^3 \quad + \&c.$$

se obtem a ferie

$$n^3 - \frac{n(n-1)^3}{1} + \frac{n(n-1)(n-2)^3}{1.2} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)^3}{1.2.3} + \&c.$$

cuja fomma reprefento por $A^{3'}$, e que por hum artificio femelhante, ao que praticamos em a Demonftraçaõ do Theorema antecedente, fe reconhece poder refolver-fe nas duas feguintes

$$n^3 - \frac{n^2(n-1)^2}{1} + \frac{n^2(n-1)(n-2)^2}{1.2} - \frac{n^2(n-1)(n-2)(n-3)^2}{1.2.3} + \&c.$$

$$n(n-1)^2 - \frac{n(n-1)(n-2)^2}{1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)^2}{1.2} - \&c.$$

a fomma da primeira das quaes he $= n\,A^{2'}$, e a da fegunda $= n\,\underset{(1)}{A}^{2'}$, donde fe fegue que he

$$A^{3'} = n\left(A^{2'} + \underset{(1)}{A}^{2'}\right)$$

porém fendo n numero inteiro pofitivo > 3, he $(n-1)$ numero inteiro pofitivo > 2, e por tanto pelo Theorema antecedente he $A^{2'} = 0$, e $\underset{(1)}{A}^{2'} = 0$; donde fe conclue que he tambem $A^{3'} = 0$. Mas fendo $n = 3$, he $n - 1 = 2$, e pelo mefmo Theorema he $A^{2'} = 0$, e $\underset{(1)}{A}^{2'} = 2.1$, valores que fubftituidos na expreffaõ de $A^{3'}$ moftraõ fer nefte cafo particular.

$$A^{3'} = 3.2.1.$$

Theorema V.

Se os termos de ferie dos coefficientes do binomio $(1-x)^n$ fe multiplicarem ordenadamente pelos termos da fe-

ſerie das quartas potencias dos numeros naturaes; a ſaber, o primeiro por n^4, o ſegundo por $(n-1)^4$, o terceiro por $(n-2)^4$, e aſſim ſucceſſivamente, a ſomma dos termos da ſerie reſultante d'eſtas multiplicações ſerá nulla, ſendo n numero inteiro poſitivo > 4, e ſerá $= 4.3.2.1$, ſendo $n = 4$.

Demonſtraçaõ.

Multiplicando ordenadamente as duas ſeries

$$1 - \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} - \&c.$$

$$n^4 + (n-1)^4 + (n-2)^4 + (n-3)^4 \qquad + (n-4)^4 \qquad + \&c.$$

ſe obtem a ſerie

$$n^4 - \frac{n(n-1)^4}{1} + \frac{n(n-1)(n-2)^4}{1.2} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)^4}{1.2.3} + \&c.$$

cuja ſomma repreſento por $A^{4'}$, e que pelo meſmo artificio praticado nas Demonſtrações dos Theoremas antecedentes ſe moſtra poder reſolver-ſe nas duas

$$n^4 - \frac{n^2(n-1)^3}{1} + \frac{n^2(n-1)(n-2)^3}{1.2} - \frac{n^2(n-1)(n-2)(n-3)^3}{1.2.3} + \&c.$$

$$n(n-1)^3 - \frac{n(n-1)(n-2)^3}{1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)^3}{1.2} - \&c.$$

a ſomma da primeira das quaes he $= n\,A^{3'}$, e a da ſegunda $= n\,A^{3'}_{(1)}$, donde ſe ſegue que he

$$A^{4'} = n\left(A^{3'} + A^{3'}_{(1)}\right)$$

porém, ſendo n numero inteiro poſitivo > 4, he $n - 1$ numero inteiro poſitivo > 3, e por tanto he pelo Theorema antecedente $A^{3'} = 0$, e $A^{3'}_{(1)} = 0$, e por conſequencia tambem $A^{4'} = 0$. Mas ſendo $n = 4$, he $n - 1 = 3$, e pelo

lo mesmo Theorema he $A^{3'} = 0$, e $\underset{(1)}{A^{3'}} = 3.2.1$, valores que substituidos na expressaõ de $A^{4'}$ mostraõ, que he neste caso particular

$$A^{4'} = 4.3.2.1.$$

Corollario.

Attendendo á natureza e processo das Demonstrações dos Theoremas precedentes, se póde concluir em geral por huma bem clara inducçaõ. „ Que multiplicando ordenada-„ mente os termos da serie dos coefficientes do binomio „ $(1 - x)^n$ pelos termos da serie das potencias de hum „ gráo qualquer m dos numeros naturaes; a saber, o pri-„ meiro por n^m, o segundo por $(n - 1)^m$, o terceiro por „ $(n - 2)^m$, e assim successivamente, a somma dos ter-„ mos da serie

$$n^m - \frac{n(n-1)^m}{1} + \frac{n(n-1)(n-2)^m}{1.2} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)^m}{1.2.3} + \&c.$$

„ resultante d'estas multiplicações, a qual representaremos „ por $A^{m'}$, será nulla, sendo n numero inteiro positivo $> m$, „ e que, sendo $m = n$, será

$$n^n - \frac{n(n-1)^n}{1} + \frac{n(n-1)(n-2)^n}{1.2} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)^n}{1.2.3} + \&c.$$

„ ou

$$A^{n'} = n(n-1)(n-2) \ldots . 3.2.1.$$

„ isto he, que multiplicando ordenadamente a serie dos „ coefficientes do binomio $(1 - x)^n$, em que o expoente „ n he numero inteiro positivo, pelos termos da serie das „ potencias do gráo n dos numeros naturaes, a somma dos „ termos da serie resultante d'estas multiplicações será „ igual ao producto de todos os numeros naturaes desde „ 1 até n. „

Ap-

Applicação.

Na Memoria ſobre os verdadeiros principios do Methodo das Fluxões, impreſſa no primeiro tomo d'eſta Collecção, demonſtramos que, repreſentando φ huma função qualquer de qualquer numero de quantidades fluentes, e $F\varphi$ huma função qualquer de φ, ſerá, ſuppondo $d\varphi$ conſtante,

$$d^n F\varphi = \frac{F(\varphi+ntd\varphi)-\frac{n}{1}F(\varphi+(n-1)td\varphi)+\frac{n(n-1)}{1.2}F(\varphi+(n-2)td\varphi)\ldots\pm F\varphi}{t^n(0)}$$

Formula em que o denominador $t^n(0)$ ſignifica, que ſe deve dividir o numerador por t^n, e depois de feita a deviſão ſuppôr $t=0$. He bem ſabido que, ſuppondo que em $F\varphi$ ſe eſcreve $\varphi+\omega$ em lugar de φ, $F\varphi$ ſe converte em $F(\varphi+\omega)$, e que deſinvolvendo eſta Função em ſerie ſe tem

$$F(\varphi+\omega)=F\varphi+P^{1\prime}\omega+P^{2\prime}\omega^2+P^{3\prime}\omega^3+P^{4\prime}\omega^4+\&c.$$

ſendo $P^{1\prime}$, $P^{2\prime}$, $P^{3\prime}$, &c. Funções de φ independentes de ω; por tanto ſe fizermos ſucceſſivamente $\omega=ntd\varphi$; $\omega=(n-1)td\varphi$; $\omega=(n-2)td\varphi$, e aſſim por diante até $\omega=td\varphi$ acharemos

$$F(\varphi+ntd\varphi)=\ldots\ldots F\varphi+nP^{1\prime}td\varphi+n^2P^{2\prime}t^2d\varphi^2+\&c.$$

$$-nF(\varphi+(n-1)td\varphi)=\ldots-n\left(F\varphi+(n-1)P^{1\prime}td\varphi+(n-1)^2P^{2\prime}t^2d\varphi^2+\&c.\right)$$

$$+\frac{n(n-1)}{1.2}F(\varphi+(n-2)td\varphi)=\frac{n(n-1)}{1.2}\left(F\varphi+(n-2)P^{1\prime}td\varphi+(n-2)^2P^{2\prime}t^2d\varphi^2+\&c.\right)$$

$$-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}F(\varphi+(n-3)td\varphi)=-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.}\left(F\varphi+(n-3)P^{1\prime}td\varphi+(n-3)^2P^{2\prime}t^2d\varphi^2+\&c.\right)$$

ſuppondo feitas as multiplicações indicadas em os ſegundos membros d'eſtas expreſsões, e ſommando todos os termos, que ficaõ em huma meſma columna, teremos

$$t^n d^n F\varphi=AF\varphi+A^{1\prime}P^{1\prime}td\varphi+A^{2\prime}P^{2\prime}t^2d\varphi^2+\ldots+A^{n\prime}P^{n\prime}t^nd\varphi^n+\&c.$$

Mas pelo Theor. I. he $A=0$, e pelo Corollario anteceden-

cedente cada huma das Funções $A^{1'}$, $A^{2'}$, $A^{3'}$, &c. até $A^{(n-1)'}$ he nulla; e he $A^{n'} = 1.2.3 \ldots (n-2)(n-1)n$. Logo substituindo estes valores nos seus competentes lugares, dividindo por t^n, e supondo depois $t=0$, ficará

$$d^n F\varphi = 1.2.3 \ldots (n-2)(n-1)n.P^{n'} d\varphi^n.$$

Formula da qual, supondo successivamente $n=1$; $n=2$; $n=3$; &c. se deduz

$$d\,F\varphi = P^{1'} d\varphi.$$
$$ddF\varphi = 1.2.P^{2'} d\varphi^2.$$
$$d^3 F\varphi = 1.2.3.P^{3'} d\varphi^3.$$
$$d^4 F\varphi = 1.2.3.4.P^{4'} d\varphi^4.$$
$$d^5 F\varphi = 1.2.3.4.5.P^{5'} d\varphi^5.,$$
&c.

e que por tanto mostra ser

$$P^{1'} = \frac{dF\varphi}{d\varphi}$$
$$P^{2'} = \frac{ddF\varphi}{1.2 d\varphi^2}$$
$$P^{3'} = \frac{d^3 F\varphi}{1.2.3.d\varphi^3}$$
$$P^{4'} = \frac{d^4 F\varphi}{1.2.3.4.d\varphi^4}$$

- - - - -

- - - - -

$$P^{n'} = \frac{d^n F\varphi}{1.2.3 \ldots (n-1)n}$$

valores, que substituidos na Formula

$$F(\varphi+\omega) = F\varphi + P^{2'}\omega + P^{2'}\omega^2 + P^{3'}\omega^3 + P^{4'}\omega^4 + \&c.$$

a reduzem a

$F(\varphi+\omega)$

$$F(\varphi + \omega) = F\varphi + \frac{\omega dF\varphi}{d\varphi} + \frac{\omega^2 ddF\varphi}{1.2.d\varphi^2} + \frac{\omega^3 d^3 F\varphi}{1.2.3.d\varphi^3} + \&c.$$

que he juſtamente a Formula de Taylor, cuja demonſtraçaõ indicamos em a já citada Memoria, por meio de huma inducçaõ menos luminoſa ſim do que a preſente, mas que além de naõ diferir d'ella eſſencialmente, tem a ventagem de ſer mais breve.

Theorema VI.

Se os termos da ſerie dos coefficientes do binomio $(1 - x)^n$ ſe multiplicarem ordenadamente pelos termos da ſerie dos numeros triangulares; a ſaber, o primeiro por $\frac{n(n-1)}{2}$, o ſegundo por $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, o terceiro por $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$, e aſſim ſucceſſivamente, a ſomma da ſerie reſultante d'eſtas multiplicações ſerá nulla, ſendo n numero inteiro poſitivo > 2, e ſerá $= 1$, ſendo $n = 2$.

Demonſtraçaõ.

Multiplicando ordenadamente as duas ſeries

$$1 \quad - \quad \frac{n}{1} \quad + \quad \frac{n(n-1)}{1.2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \&c.$$

$$\frac{n(n-1)}{2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \frac{(n-2)(n-3)}{2} + \frac{(n-3)(n-4)}{2} + \&c.$$

ſe obtem a ſerie

$$\frac{n(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2.1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.1.2} - \&c.$$

cuja ſomma repreſento por $\acute{A}1$, a qual ſe reduz a

$$\frac{n}{1}\left((n-1) - \frac{(n-1)(n-2)}{1} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2} + \&c.\right)$$

e por tanto ſerá

$$A1 = \frac{1}{2} n \underset{(1)}{A}^{n'}$$

Porem, ſendo n numero inteiro poſitivo > 2, he $(n-1)$ numero inteiro poſitivo > 1, e por conſequencia (Theor. II.) $\underset{(1)}{A''} = 0$; logo tambem $A1 = 0$. Mas ſendo $n = 2$, he $(n-1) = 1$; e pelo meſmo Theorema he $\underset{(1)}{A''} = 1$, valor que ſubſtituido na expreſſaõ de $A1$, moſtra que he neſte caſo particular

$$A1 = \frac{2.1}{2}.$$

Theorema VII.

Se os termos da ſerie, que reſulta da multiplicaçaõ ordenada dos coefficientes do binomio $(1-x)^n$ pelos termos da ſerie dos numeros triangulares, ſe multiplicarem ordenadamente pelos termos da ſerie dos numeros naturaes; a ſaber, o primeiro por n, o ſegundo por $(n-1)$, o terceiro por $(n-2)$, e aſſim ſucceſſivamente, a ſomma dos termos da ſerie reſultante d'eſtas multiplicações ſerá nulla, ſendo n numero inteiro poſitivo > 3, e ſerá $= \frac{3.2.1}{2}$, ſendo $n = 3$.

Demonſtraçaõ.

Multiplicando ordenadamente as duas ſeries

$$\frac{n(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2.1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.1.2} - \&c.$$

$$n \quad + (n-1) \quad + (n-2) \quad + \&c.$$

ſe obtem a ſerie

$$\frac{n^2(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)^2(n-2)}{2.1} + \frac{n(n-1)(n-2)^2(n-3)}{2.1.2} - \&c.$$

cuja ſomma repreſento por $A1''$, e a qual ſe reſolve evidentemente nas duas

$$\frac{n^2(n-1)}{2} - \frac{n^2(n-1)(n-2)}{2.1} + \frac{n^2(n-1)(n-2)(n-3)}{2.1.2} - \&c.$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2.1.2} + \&c.$$

a ſom-

a fomma da primeira das quaes he $= n A1$, e a da fegunda $= n \underset{(1)}{A1}$, donde fe conclue que he

$$A1'' = n\left(A1 + \underset{(1)}{A1}\right)$$

porém cada huma d'eftas fommas $A1$ e $\underset{(1)}{A1}$, he nulla pelo Theorema antecedente, fendo n numero inteiro pofitivo > 3, e por confequencia he tambem $A1'' = 0$. Mas fendo fendo $n = 3$ he $n - 1 = 2$, e pelo mefmo Theorema antecedente he $A1 = 0$, e $\underset{(1)}{A1} = \frac{2.1}{2}$: logo nefte cafo particular será

$$A1'' = \frac{3.2.1}{2}.$$

Theorema VIII.

Se os termos da ferie, que refulta da multiplicaçaõ ordenada dos coefficientes do binomio $(1-x)^n$ pelos termos da ferie dos numeros triangulares, fe multiplicarem ordenadamente pelos termos da ferie dos quadrados dos numeros naturaes; a faber, o primeiro por n^2, o fegundo por $(n-1)^2$, o terceiro por $(n-2)^2$; e affim fucceffivamente, a fomma dos termos da ferie refultante d'eftas multiplicações será nulla, fendo n numero inteiro pofitivo > 4, e será $= \frac{4.3.2.1}{2}$ fendo $n = 4$.

Demonftraçaõ.

Multiplicando ordenadamente as duas feries

$$\frac{n(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2.1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.1.2} - \&c.$$

$$n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \&c.$$

fe obtem a ferie

$$\frac{n^3(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)^3(n-1)}{2.1} + \frac{n(n-1)(n-2)^3(n-3)}{2.1.2} - \&c.$$

cuja

cuja somma represento por $\overset{2\prime}{A1}$, e a qual se resolve nas duas

$$\frac{n^3(n-1)}{2} - \frac{n^2(n-1)^2(n-2)}{2 \cdot 1} + \frac{n^2(n-1)(n-2)^2(n-3)}{2 \cdot 1 \cdot 2} - \&c.$$

$$\frac{n(n-1)^2(n-2)}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)^2(n-3)}{2 \cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)^2(n-4)}{2 \cdot 1 \cdot 2} - \&c.$$

a somma da primeira das quaes he $= n\overset{1\prime}{A1}$, e da segunda $= n\underset{(1)}{\overset{1\prime}{A1}}$, donde se conclue que he

$$\overset{2\prime}{A1} = n\left(\overset{1\prime}{A1} + \underset{(1)}{\overset{1\prime}{A1}}\right)$$

Porém, sendo n numero inteiro positivo > 4, he $(n-1)$ numero inteiro positivo > 3, e pelo Theorema antecedente he $\overset{1\prime}{A1} = 0$, e $\underset{(1)}{\overset{1\prime}{A1}} = 0$, e por consequencia tambem $\overset{1\prime}{A1} = 0$, e $\underset{(1)}{\overset{1\prime}{A1}} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2}$; valores, que substituidos na expressaõ $\overset{2\prime}{A1}$ mostraõ que he neste caso particular.

$$\overset{2\prime}{A1} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2}.$$

Theorema IX.

Se os termos da serie, que resulta da multiplicaçaõ, ordenada dos coefficientes do binomio $(1-x)^n$ pelos termos da serie dos numeros triangulares, se multiplicarem ordenadamente pelos termos da serie dos cubos dos numeros naturaes; a saber, o primeiro por n^3, o segundo por $(n-1)^3$, o terceiro por $(n-2)^3$, e assim successivamente, a somma dos termos da serie resultante d'estas multiplicações será nulla, sendo n numero inteiro positivo > 5; e será $= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2}$, sendo $n = 5$.

De-

Demonstraçaõ.

Multiplicando ordenadamente as duas series

$$\frac{n(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2\,.\,1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\,.\,1\,.\,2} - \&c.$$

$$n^3 + (n-1)^3 \qquad + (n-2)^3 \qquad + \&c.$$

se obtem a serie

$$\frac{n^4(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)^4(n-2)}{2\,.\,1} + \frac{n(n-1)(n-2)^4(n-3)}{2\,.\,1\,.\,2} - \&c.$$

cuja somma represento por $\overset{3\prime}{A1}$, e a qual se resolve nas duas

$$\frac{n^4(n-1)}{2} - \frac{n^2(n-1)^3(n-2)}{2\,.\,1} + \frac{n^2(n-1)(n-2)^3(n-3)}{2\,.\,1\,.\,2} - \&c.$$

$$\frac{n(n-1)^3(n-2)}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)^3(n-3)}{2\,.\,1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)^3(n-4)}{2\,.\,1\,.\,2} - \&c.$$

a somma da primeira das quaes he $= n\overset{2\prime}{A1}$, e a da segunda $= n\underset{(1)}{\overset{2\prime}{A1}}$, donde se segue que he

$$\overset{3\prime}{A1} = n\left(\overset{2\prime}{A1} + \underset{(1)}{\overset{2\prime}{A1}}\right)$$

Porém, sendo n numero inteiro positivo > 5, cada huma d'estas sommas he nulla pelo Theorema antecedente, e por tanto será tambem $\overset{3\prime}{A1} = 0$. Mas sendo $n = 5$, he $n - 1 = 4$, e pelo mesmo Theorema he $\overset{2\prime}{A1} = 0$; e $\underset{(1)}{\overset{2\prime}{A1}} = \frac{4.3.2.1}{2}$, valores que substituidos na expressaõ de $\overset{3\prime}{A1}$, mostraõ que neste caso particular he

$$\overset{3\prime}{A1} = \frac{5.4.3.2.1}{2}.$$

Corollario.

Attendendo á natureza, e analogia do processo das

Demonstrações dos tres Theoremas precedentes poderemos concluir em geral „ Que se os termos da serie, que „ resulta da multiplicaçaõ ordenada dos coefficientes do „ binomio $(1-x)^n$ pelos termos da serie dos numeros „ triangulares, se multiplicarem ordenadamente pelos ter- „ mos da serie das potencias do gráo m dos numeros na- „ turaes, a saber, o primeiro por n^m, o segundo por „ $(n-1)^m$, o terceiro por $(n-2)^m$, e assim successiva- „ mente a somma $A1^{m'}$ dos termos da serie

$$\frac{n^{m+1}(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)^{m+1}(n-2)}{2.1} + \frac{n(n-1)(n-2)^{m+1}(n-3)}{2.1.2} - \&c.$$

„ resultante d'estas multiplicações será nulla, sendo n nu- „ mero inteiro positivo $> m+2$, e que sendo $m = n+2$ „ será

$$\frac{n^{n-1}(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)^{n-1}(n-2)}{2.1} + \frac{n(n-1)(n-2)^{n-1}(n-3)}{2.1.2} - \&c.$$

„ ou

$$A1^{(n-2)'} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots.3.2.1}{2} = \frac{A^{n'}}{2}.$$

Theorema X.

Se os termos da serie dos coefficientes do binomio $(1-x)^n$ se multiplicarem ordenadamente pelos termos da serie dos quadrados dos numeros triangulares, a saber, o primeiro por $\frac{n^2(n-1)^2}{2^2}$, o segundo por $\frac{(n-1)^2(n-2)^2}{2^2}$, o terceiro por $\frac{(n-2)^2(n-3)^2}{2^2}$, e assim successivamente a somma dos termos da serie resultante d'estas multiplicações será nulla, sendo n numero inteiro positivo > 4, e será $= \frac{4.3.2.1}{2^2}$ sendo $n = 4$.

De-

Demonstração.

Multiplicando ordenadamente as duas series

$$1 - \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \&c.$$

$$\frac{n^2(n-1)^2}{2^2} + \frac{(n-1)^2(n-2)^2}{2^2} + \frac{(n-2)^2(n-3)^2}{2^2} + \frac{(n-3)^2(n-4)^2}{2^2} + \&c.$$

se obtem a serie

$$\frac{n^2(n-1)^2}{2^2} - \frac{n(n-1)^2(n-2)^2}{2^2 . 1} + \frac{n(n-1)(n-2)^2(n-3)^2}{2^2 . 1.2} - \&c.$$

cuja somma represento por $A2$, e a qual se resolve nas duas

$$\frac{n^2(n-1)^2}{2^2} - \frac{n^2(n-1)(n-2)^2}{2^2 . 1} + \frac{n^2(n-1)(n-2)(n-3)^2}{2^2 . 1.2} - \&c.$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)^2}{2^2} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)^2}{2^2 . 1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)^2}{2^2 . 1.2} - \&c.$$

a somma da primeira das quaes he $= \frac{n^2}{2^2} \underset{(1)}{A}^{2'}$, e a da segunda $= \frac{n(n-1)}{2^2} \underset{(2)}{A}^{2'}$, donde se segue que he

$$A2 = \frac{n^2}{2^2} \underset{(1)}{A}^{2'} + \frac{n(n-1)}{2^2} \underset{(2)}{A}^{2'}$$

Porém, sendo n numero inteiro positivo > 4, he $n-2$ numero inteiro positivo > 2, e por tanto pelo Theorema III. $\underset{(1)}{A}^{2'} = 0$, e $\underset{(2)}{A}^{2'} = 0$, donde se conclue, que será tambem $A2 = 0$. Mas sendo $n = 4$, he pelo mesmo Theorema $\underset{(1)}{A}^{2'} = 0$, e $\underset{(2)}{A}^{2'} = 2.1$, valores que substituidos na expressaõ de $A2$ mostraõ, que neste caso particular he

$$A2 = \frac{4.3.2.1}{2^2}.$$

Theo-

Theorema XI.

Se os termos da ſerie, que reſulta da multiplicaçaõ ordenada dos coefficientes do binomio $(1 - x)^n$ pelos termos da ſerie dos quadrados dos numeros triangulares, ſe multiplicarem ordenadamente pelos termos da ſerie dos numeros naturaes, a ſaber, o primeiro por n, o ſegundo por $(n - 1)$, o terceiro por $(n - 2)$, e aſſim ſucceſſivamente, a ſomma dos termos da ſerie reſultante d'eſtas multiplicações ſerá nulla, ſendo n numero inteiro poſitivo > 5, e ſerá $= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2^2}$, ſendo $n = 5$.

Demonſtraçaõ.

Multiplicando ordenadamente as duas ſeries

$$\frac{n^2(n-1)^2}{2^2} - \frac{n(n-1)^2(n-2)^2}{2^2 \cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)^2(n-3)^2}{2^2 \cdot 1 \cdot 2} - \&c.$$

$$n + (n-1) \qquad + (n-2) \qquad + \&c.$$

ſe obtem a ſerie

$$\frac{n^3(n-1)^2}{2^2} - \frac{n(n-1)^3(n-2)^2}{2^2 \cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)^3(n-3)^2}{2^2 \cdot 1 \cdot 2} - \&c.$$

cuja ſomma repreſento por $A2^{\prime\prime}$, e a qual ſe reſolve nas duas

$$\frac{n^3(n-1)^2}{2^2} - \frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2}{2^2 \cdot 1} + \frac{n^2(n-1)(n-2)^2(n-3)^2}{2^2 \cdot 1 \cdot 2} - \&c.$$

$$\frac{n(n-1)^2(n-2)^2}{2^2} - \frac{n(n-1)(n-2)^2(n-3)^2}{2^2 \cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)^2(n-4)^2}{2^2 \cdot 1 \cdot 2} - \&c.$$

a ſomma da primeira das quaes he $= n A2$, e a da ſegunda $= n \underset{(1)}{A2}$, donde ſe ſegue que he

$$A2^{\prime\prime} = n\left(A2 + \underset{(1)}{A2}\right)$$

Porém, ſendo n numero inteiro poſitivo > 5, he $(n - 1)$ nu-

numero inteiro poſitivo > 4, e por tanto pelo Theorema antecedente he $A_2 = 0$, e $\underset{(1)}{A_2} = 0$; e por conſequencia tambem $A_2 = 0$. Mas ſendo $n = 5$, he $n - 1 = 4$, e pelo meſmo Theorema $A_2'' = 0$, e $\underset{(1)}{A_2} = \frac{4.3.2.1}{2^2}$, valores que ſubſtituidos na expreſſaõ de A_2'' moſtraõ, que he neſte caſo particular

$$A_2'' = \frac{5.4.3.2.1}{2^2}.$$

Theorema XII.

Se os termos da ſerie, que reſulta da multiplicaçaõ ordenada dos coefficientes do binomio $(1 - x)^n$ pelos termos da ſerie dos quadrados dos numeros triangulares, ſe multiplicarem ordenadamente pelos termos da ſerie dos quadrados dos numeros naturaes; a ſaber, o primeiro por n^2, o ſegundo por $(n - 1)^2$, o terceiro por $(n - 2)^2$, e aſſim ſucceſſivamente, a ſomma dos termos da ſerie reſultante d'eſtas multiplicações ſerá nulla, ſendo n numero inteiro poſitivo > 6, e ſerá $= \frac{6.5.4.3.2.1}{2^2}$, ſendo $n = 6$.

Demonſtraçaõ.

Multiplicando ordenadamente as duas ſeries

$$\frac{n^2(n-1)^2}{2^2} - \frac{n(n-1)^2(n-2)^2}{2^2 . 1} + \frac{n(n-1)(n-2)^2(n-3)^2}{2^2 . 1 . 2} - \&c.$$

$$n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \&c.$$

ſe obtem a ſerie

$$\frac{n^4(n-1)^2}{2^2} - \frac{n(n-1)^4(n-2)^2}{2^2 . 1} + \frac{n(n-1)(n-2)^4(n-3)^2}{2^2 . 1 . 2} - \&c.$$

cuja ſomma, ſeguindo a analogia eſtabelecida, repreſento por $A_2^{2\prime}$, e a qual ſe reſolve nas duas

$$\frac{n^4 (n-1)^2}{2^2} - \frac{n^2 (n-1)^3 (n-2)^2}{2^2 \, 1} + \frac{n^2 (n-1)(n-2)^3 (n-3)^2}{2^2 \, 1 \, . \, 2} - \&c.$$

$$\frac{n(n-1)^3 (n-2)^2}{2^2} - \frac{n(n-1)(n-2)^3 (n-3)^2}{2^2 \, 1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)^3 (n-4)^2}{2^2 \, 1 \, . \, 2} - \&c.$$

a ſomma da primeira das quaes he $= n\overset{1\prime}{A2}$, e a da ſegunda $= n \underset{(1)}{\overset{1\prime}{A2}}$, donde ſe ſegue que he

$$\overset{2\prime}{A2} = n \left(\overset{1\prime}{A2} + \underset{(1)}{\overset{1\prime}{A2}} \right)$$

Porém, ſendo n numero inteiro poſitivo > 6, he $n-1$ numero inteiro poſitivo > 5, e pelo Theorema antecedente he $\overset{1\prime}{A2} = 0$, e $\underset{(1)}{\overset{1\prime}{A2}} = 0$, donde ſe conclue, que he tambem $\overset{2\prime}{A2} = 0$. Mas ſendo $n = 6$, he $n - 1 = 5$, e pelo meſmo Theorema $\overset{1\prime}{A2} = 0$, e $\underset{(1)}{\overset{1\prime}{A2}} = \frac{5.4.3.2.1}{2^2}$, valores que ſubſtituidos na expreſſaõ de $\overset{2\prime}{A2}$ moſtraõ, que he neſte caſo particular.

$$\overset{2\prime}{A2} = \frac{6.5.4.3.2.1}{2^2}.$$

Theorema XIII.

Se os termos da ſerie, que reſulta da multiplicaçaõ ordenada dos coefficientes do binomio $(1-x)^n$ pelos termos da ſerie dos quadrados dos numeros triangulares, ſe multiplicarem ordenadamente pelos termos da ſerie dos cubos dos numeros naturaes; a ſaber, o primeiro por n^3, o ſegundo por $(n-1)^3$, o terceiro por $(n-2)^3$, e aſſim ſucceſſivamente, a ſomma dos termos da ſerie reſultante d'eſtas multiplicações ſerá nulla, ſendo n numero inteiro poſitivo > 7, e ſerá $= \frac{7.6.5.4.3.2.1}{2^2}$, ſendo $n = 7$.

De-

Demonſtração.

Multiplicando ordenadamente as duas ſeries

$$\frac{n^2(n-1)^2}{2^2} - \frac{n(n-1)^2(n-2)^2}{2^2 \cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)^2(n-3)^2}{2^2 \cdot 1 \cdot 2} + \&c.$$

$$n^3 + (n-1)^3 \quad + (n-2)^3 \quad + \&c.$$

ſe obtem a ſerie

$$\frac{n^5(n-1)^2}{2^2} - \frac{n(n-1)^5(n-2)^2}{2^2 \cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)^5(n-3)^2}{2^2 \cdot 1 \cdot 2} - \&c.$$

cuja ſomma repreſento por $\overset{3'}{A2}$, e a qual ſe reſolve nas duas

$$\frac{n^5(n-1)^2}{2^2} - \frac{n^2(n-1)^4(n-2)^2}{2^2 \cdot 1} + \frac{n^2(n-1)(n-2)^4(n-3)^2}{2^2 \cdot 1 \cdot 2} - \&c.$$

$$\frac{n(n-1)^4(n-2)^2}{2^2} - \frac{n(n-1)(n-2)^4(n-3)^2}{2^2 \cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)^4(n-4)^2}{2^2 \cdot 1 \cdot 2} - \&c.$$

a ſomma da primeira das quaes he $= n\overset{2'}{A2}$, e a da ſegunda $= n \underset{(1)}{\overset{2'}{A2}}$, donde ſe ſegue que he

$$\overset{3'}{A2} = n\left(\overset{2'}{A2} + \underset{(1)}{\overset{2'}{A2}}\right)$$

Porém, ſendo n numero inteiro poſitivo > 7, as duas ſommas $\overset{2'}{A2}$, e $\underset{(1)}{\overset{2'}{A2}}$ ſaõ nullas, e por tanto he tambem $\overset{3'}{A2} = 0$, Mas ſendo $n = 7$, he $n - 1 = 6$, e pelo meſmo Theorema he $\overset{2'}{A2} = 0$, e $\underset{(1)}{\overset{2'}{A2}} = \frac{6.5.4.3.2.1}{2^2}$, donde ſe conclue, que neſte caſo particular he

$$\overset{3'}{A2} = \frac{7.6.5.4.3.2.1}{2^2}$$

Corollario.

Attendendo á natureza e analogia do proceſſo das Demonſtrações dos tres Theoremas antecedentes, podemos concluir em geral » Que ſe os termos da ſerie, que reſul-

» ta

» ta da multiplicaçaõ ordenada dos coefficientes do bino-
» mio $(1-x)^n$ pelos termos da ſerie dos quadrados dos
» numeros triangulares, ſe multiplicarem ordenadamente
» pelos termos da ſerie das potencias do gráo m dos nu-
» meros naturaes; a ſaber, o primeiro por n^m, o ſegundo
» por $(n-1)^m$, o terceiro por $(n-2)^m$, e aſſim ſucceſ-
» ſivamente a ſomma $A2^{m\prime}$ dos termos da ſerie

$$\frac{n^{m+2}(n-1)^2}{2^2} - \frac{n(n-1)^{m+2}(n-2)^2}{2^2.1} + \frac{n(n-1)(n-2)^{m+2}(n-3)^2}{2^2.1.2} - \&c.$$

» reſultante d'eſtas multiplicaçóes ſerá nulla, ſendo n nu-
» mero inteiro poſitivo $> m+4$, e que ſendo $n = m+4$,
» ſerá

$$\frac{n^{n-2}(n-1)^2}{2^2} - \frac{n(n-1)^{n-2}(n-3)^2}{2^2.1} + \frac{n(n-1)(n-2)^{n-2}(n-3)^2}{2^2.1.2} - \&c.$$

» ou

$$A2^{(n-4)\prime} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1}{2^2} = \frac{A^{n\prime}}{2^2}$$

Theorema XIV.

Se os termos da ſerie dos coefficientes do binomio $(1-x)^n$ ſe multiplicarem ordenadamente pelos termos da ſerie dos cubos dos numeros triangulares; a ſaber, o primeiro por $\frac{n^3(n-1)^3}{2^3}$, o ſegundo por $\frac{(n-1)^3(n-2)^3}{2^3}$, o terceiro por $\frac{(n-2)^3(n-3)^3}{2^3}$, e aſſim ſucceſſivamente, a ſomma dos termos da ſerie reſultante d'eſtas multiplicaçóes ſerá nulla, ſendo n numero inteiro poſitivo > 6, e ſerá $= \frac{6.5.4.3.2.1}{2^3}$, ſendo $n = 6$.

Demon-

Demonſtraçaõ.

Multiplicando ordenadamente as duas ſeries

$$1 - \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1.2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \&c.$$

$$\frac{n^{1}(n-1)^3}{2^3} + \frac{(n-1)^3(n-2)^3}{2^3} + \frac{(n-2)^3(n-3)^3}{2^3} + \frac{(n-3)^3(n-4)^3}{2^3} + \&c.$$

ſe obtem a ſerie

$$\frac{n^3(n-1)^3}{2^3} - \frac{n(n-1)^3(n-2)^3}{2^3 \cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)^3(n-3)^3}{2^3 \cdot 1.2} - \&c.$$

cuja ſomma repreſento por $A3$, e a qual ſe poderia ſemelhantemente obter multiplicando ordenadamente as duas ſeguintes

$$\frac{n(n-1)^3}{2^3} - \frac{n(n-1)(n-2)^3}{2^3 \cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)^3}{2^3 \cdot 1.2} - \&c.$$

$$n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \&c.$$

e que por tanto, pela repetiçaõ do artificio praticado nas Demonſtrações dos Theoremas antecedentes, ſe reſolve nas tres ſeguintes

$$\frac{n^3(n-1)^3}{2^3} - \frac{n^3(n-1)(n-2)^3}{2^3 \cdot 1} + \frac{n^3(n-1)(n-2)(n-3)^3}{2^3 \cdot 1.2} - \&c.$$

$$\frac{2n^2(n-1)(n-2)^3}{2^3} - \frac{2n^2(n-1)(n-2)(n-3)^3}{2^3 \cdot 1} + \frac{2n^2(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)^3}{2^3 \cdot 1.2} - \&c.$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)^3}{2^3} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)^3}{2^3 \cdot 1} + \&c.$$

A ſomma da primeira das quaes he $= \frac{n^3}{2^3} A^{3\prime}_{(1)}$, a da ſegunda $= \frac{2n^2(n-1)}{2^3} A^{3\prime}_{(2)}$, a da terceira $= \frac{n(n-1)(n-2)}{2^3} A^{3\prime}_{(3)}$, donde ſe ſegue que he

$$A3 = \frac{n^3}{2^3} A^{3\prime}_{(1)} + \frac{2n^2(n-1)}{2^3} A^{3\prime}_{(2)} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2^3} A^{3\prime}_{(3)}$$

Porém, ſendo n numero inteiro poſitivo > 6, he $n - 3$ numero inteiro poſitivo > 3, e por tanto pelo Theorema IV. he $\underset{(1)}{A}^{3''} = 0$, $\underset{(2)}{A}^{3''} = 0$, e $\underset{(3)}{A}^{3''} = 0$, e por conſequencia tambem $A3 = 0$. Mas ſendo $n = 6$, he $n - 3 = 3$, e pelo meſmo Theorema he $\underset{(1)}{A}^{3''} = 0$, $\underset{(2)}{A}^{3''} = 0$, $\underset{(3)}{A}^{3''} = 3.2.1$, valores, que ſubſtituidos na expreſſaõ de $A3$ moſtraõ, que neſte caſo particular he

$$A3 = \frac{6.5.4.3.2.1}{2^3}$$

Theorema XV.

Se os termos da ſerie, que reſulta da multiplicaçaõ ordenada dos coefficientes do binomio $(1 - x)^n$ pelos termos da ſerie dos cubos dos numeros triangulares, ſe multiplicarem ordenadamente pelos termos da ſerie dos numeros naturaes; a ſaber, o primeiro por n, o ſegundo por $(n-1)$, o terceiro por $(n-2)$, e aſſim ſucceſſivamente, a ſomma da ſerie reſultante d'eſtas multiplicaçǒes ſerá nulla, ſendo n numero inteiro poſitivo > 7, e ſerá $= \frac{7.6.5.4.3.2.1}{2^3}$, ſendo $n = 7$.

Demonſtraçaõ.

Multiplicando ordenadamente as duas ſeries

$$\frac{n^3(n-1)^3}{2^3} - \frac{n(n-1)^3(n-2)^3}{2^3 \cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)^3(n-3)^3}{2^3 \cdot 1.2} - \&c.$$

$$n + (n-1) \qquad + (n-2) \qquad + \&c.$$

ſe obtem a ſerie

$$\frac{n^4(n-1)^3}{2^3} - \frac{n(n-1)^4(n-2)^3}{2^3 \cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)^4(n-3)^3}{2^3 \cdot 1.2} - \&c.$$

cuja ſomma repreſento por $A3''$, e a qual ſe reſolve evidentemente nas duas

$$\frac{n^4(n-1)^3}{2^2}$$

$$\frac{n^4(n-1)^3}{2^3} - \frac{n^2(n-1)^3(n-2)^3}{2^3\cdot 1} + \frac{n^2(n-1)(n-2)^3(n-3)^3}{2^3\cdot 1\cdot 2} - \&c.$$

$$\frac{n(n-1)^3(n-2)^3}{2^3} - \frac{n(n-1)(n-2)^3(n-3)^3}{2^3\cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)^3(n-4)^3}{2^3\cdot 1\cdot 2} - \&c.$$

a somma da primeira das quaes he $= n\,A3$, e a segunda $= n\,\underset{(1)}{A3}$, donde se segue que he

$$\overset{''}{A3} = n\left(A3 + \underset{(1)}{A3}\right)$$

Porém, sendo n numero inteiro positivo > 7, he pelo Theorema antecedente $A3 = 0$, e $\underset{(1)}{A3} = 0$, por ser $n-1 > 6$, logo tambem será $\overset{''}{A3} = 0$. Mas sendo $n = 7$, he $n-1 = 6$, e pelo mesmo Theorema he $A3 = 0$, e $\underset{(1)}{A3} = \frac{6.5.4.3.2.1}{2^3}$, valores que sendo substituidos na expressaõ de $\overset{''}{A3}$ mostraõ, que neste caso particular he

$$\overset{''}{A3} = \frac{7.6.5.4.3.2.1}{2^3}.$$

Theorema XVI.

Se os termos da serie, que resulta da multiplicaçaõ ordenada dos coefficientes do binomio $(1-x)^n$ pelos termos da serie dos cubos dos numeros triangulares, se multiplicarem ordenadamente pelos termos da serie dos quadrados dos numeros naturaes; a saber, o primeiro por n^2, o segundo por $(n-1)^2$, o terceiro por $(n-2)^2$, e assim successivamente, a somma dos termos da serie resultante d'estas multiplicações será nulla, sendo n numero inteiro positivo > 8, e será $= \frac{8.7.6.5.4.3.2.1}{2^3}$, sendo $n = 8$.

Demonstraçaõ.

Multiplicando ordenadamente as duas series

$$\frac{n^3(n-1)^3}{2^3}$$

$$\frac{n^3(n-1)^3}{2^3} - \frac{n(n-1)^3(n-2)^3}{2^3 \cdot 1} + \frac{n(n-2)(n-2)^3(n-3)^3}{2^3 \cdot 1 \cdot 2} - \&c.$$

$$n^2 + (n-1)^2 \qquad + (n-2)^2 \qquad + \&c.$$

ſe obtem a ſerie

$$\frac{n^5(n-1)^3}{2^3} - \frac{n(n-1)^5(n-2)^3}{2^3 \cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)^5(n-3)^3}{2^3 \cdot 1 \cdot 2} - \&c.$$

cuja ſomma repreſento por $\overset{2\prime}{A3}$, e a qual ſe reſolve nas duas

$$\frac{n^5(n-1)^3}{2^3} - \frac{n^2(n-1)^4(n-2)^3}{2^3 \cdot 1} + \frac{n^2(n-1)(n-2)^4(n-3)^2}{2^3 \cdot 1 \cdot 2} - \&c.$$

$$\frac{n(n-1)^4(n-2)^3}{2^3} - \frac{n(n-1)(n-2)^4(n-3)^3}{2^3 \cdot 1} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)^4(n-4)^3}{2^3 \cdot 1 \cdot 2} - \&c.$$

a ſomma da primeira das quaes he $= n\overset{1\prime}{A3}$, e a da ſegunda $= n\underset{(1)}{\overset{1\prime}{A3}}$, donde ſe ſegue que he

$$\overset{2\prime}{A3} = n\left(\overset{1\prime}{A3} + \underset{(1)}{\overset{1\prime}{A3}}\right)$$

Porém, ſendo n numero inteiro poſitivo > 8, he $n-1$ numero inteiro poſitivo > 7, e por tanto pelo Theorema antecedente he $\overset{1\prime}{A3} = 0$, e $\underset{(1)}{\overset{1\prime}{A3}} = 0$, e por conſequencia he tambem $\overset{2\prime}{A3} = 0$. Mas ſendo $n = 8$, he $n-1 = 7$, e pelo meſmo Theorema $\overset{1\prime}{A3} = 0$, e $\underset{(1)}{\overset{1\prime}{A3}} = \frac{7.6.5.4.3.2.1}{2^3}$, valores que ſubſtituidos na expreſſaõ de $\overset{2\prime}{A3}$ moſtraõ, que he neſte caſo particular

$$\overset{2\prime}{A3} = \frac{8.7.6.5.4.3.2.1}{2^3}.$$

Corol-

Corollario.

A marcha do Calculo no processo das Demonstrações dos Theoremas antecedentes assás claramente mostra, que sem necessidade de acumular mais Theoremas a elles analogos podemos concluir em geral „ Que se os termos da „ serie, que resulta da multiplicaçaõ ordenada dos coefficientes do binomio $(1-x)^n$ pelos termos da serie dos „ cubos dos numeros triangulares, se multiplicarem ordenadamente pelos termos da serie das potencias do gráo „ m dos numeros naturaes; a saber, o primeiro por n^m, „ o segundo por $(n-1)^m$, o terceiro por $(n-2)^m$, e assim successivamente, a somma $A_3^{m,}$ dos termos da serie

$$\frac{n^{m+3}(n-1)^3}{2^3}-\frac{n(n-1)^{m+3}(n-2)^3}{2^3\cdot 1}+\frac{n(n-1)(n-2)^{m+3}(n-3)^3}{2^3\cdot 1\cdot 2}-\&c.$$

„ resultante d'estas multiplicações será nulla, sendo n numero inteiro positivo $> m+6$, e que sendo $n=m+6$, „ será

$$\frac{n^{n-3}(n-1)^3}{2^3}-\frac{n(n-1)^{n-3}(n-2)^3}{2^3\cdot 1}+\frac{n(n-1)(n-2)^{n-3}(n-3)^3}{2^3\cdot 1\cdot 2}-\&c.$$

„ ou

$$A_2^{(n-6)'}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1}{2^3}=\frac{A^{n'}}{2^3}$$

Conclusaõ.

Comparando o processo do Calculo nas Demonstrações dos Theoremas VI, X, e XIV podemos tambem concluir em geral. „ Que multiplicando ordenadamente os coefficientes do binomio $(1-x)^n$ pelos termos de serie das „ potencias do gráo k dos numeros triangulares; a saber, „ o primeiro por $\frac{n^k(n-1)^k}{2^k}$, o segundo por $\frac{(n-1)^k(n-2)^k}{2^k}$,

» o terceiro por $\frac{(n-2)^k(n-3)^k}{2^k}$, e assim successivamente, a

» somma A_k dos termos da serie

$$\frac{n^k(n-1)^k}{2^k} - \frac{n(n-1)^k(n-2)^k}{2^k.1} + \frac{n(n-1)(n-2)^k(n-3)^k}{2^k.1.2} + \&c.$$

» resultante d'estas multiplicações será nulla, sendo n nu-
» mero inteiro positivo $> 2k$, e que sendo $n = 2k$, será

$$A_k = \frac{2k(2k-1)(2k-2)\ldots 3.2.1}{2^k}.$$

Semelhantemente poderemos concluir, attendendo á natureza e processo das Demonstrações dos outros Theoremas desde o Theorema XIV até ao Theorema XVI » Que se
» os termos da serie, que resulta da multiplicação or-
» denada dos coefficientes do binomio $(1-x)^n$ pelos ter-
» mos da serie das potencias do gráo k dos numeros trian-
» gulares, se multiplicarem ordenadamente pelos termos da
» serie das potencias do gráo m dos numeros naturaes,
» a somma $A_k^{m\prime}$ dos termos da serie

$$\frac{n^{k+m}(n-1)^k}{2^k} - \frac{n(n-1)^{k+m}(n-2)^k}{2^k.1} + \frac{n(n-1)(n-2)^{k+m}(n-3)^k}{2^k.1.2} - \&c.$$

» resultante d'estas multiplicações será nulla, sendo n nu-
» mero inteiro positivo $> 2k+m$, e que sendo $n = 2k+m$,
» será

$$\frac{n^{n-k}(n-1)^k}{2^k} - \frac{n(n-1)^{n-k}(n-2)^k}{2^k.1} + \frac{n(n-1)(n-2)^{n-k}(n-3)^k}{2^k.1.2} - \&c.$$

» ou

$$A_k^{(n-2k)\prime} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1}{2^k} = \frac{A^{n\prime}}{2^k}$$

Ap-

Applicaçaõ.

Se na expressaõ de $d^n F\varphi$ na supposiçaõ de $d\varphi$ constante, se substitue $F\left(\varphi + ntd\varphi + \frac{n(n-1)}{2} t^2 dd\varphi\right)$ em lugar de $F(\varphi + ntd\varphi)$; $F\left(\varphi + (n-1)td\varphi + \frac{(n-1)(n-2)}{2} t^2 dd\varphi\right)$ em lugar de $F(\varphi + (n-1)td\varphi)$, e assim semelhantemente em todos os outros termos, de que consta o seu numerador, teremos a expressaõ de $d^n F\varphi$ na supposiçaõ de $dd\varphi$ constante. Mas desenvolvendo em serie cada hum dos ditos termos, teremos

$$F\left(\varphi + ntd\varphi + \frac{n(n-1)}{2} t^2 dd\varphi\right) = F\varphi + n P^{1\prime} t d\varphi + n^2 P^{2\prime} t^2 d\varphi^2 + \ldots$$
$$+ \frac{n(n-1)}{2} P^{1\prime} t^2 dd\varphi + \frac{2n^2(n-1)}{2} P^{2\prime} t^3 d\varphi dd\varphi + \ldots$$
$$+ \frac{n^2(n-1)^2}{2^2} P^{2\prime} t^4 dd\varphi^2 + \ldots$$

$$\left.\begin{array}{l}
+ n^{n-1} P^{(n-1)\prime} t^{n-1} d\varphi^{n-1} + n^n P^{n\prime} t^n d\varphi^n + \&c. \\
+ (n-1)\frac{n^{n-1}(n-1)}{2} P^{(n-1)\prime} t^n d\varphi^{n-2} dd\varphi + n.\frac{n^n(n-1)}{2} P^{n\prime} t^{n+1} d\varphi^{n-1} dd\varphi + \&c. \\
+ \frac{(n-1)(n-2)}{2}\frac{n^{n-1}(n-1)^2}{2^2} P^{(n-1)\prime} t^{n+1} d\varphi^{n-3} dd\varphi^2 + \frac{n(n-1)}{2}\frac{n^n(n-1)^n}{2^2} P^{n\prime} t^{n+2} d\varphi^{n-2} dd\varphi^2 + \&c. \\
+ \&c. \qquad + \&c.
\end{array}\right\}$$

—nF

$$-nF\left(\varphi+(n-1)td\varphi+\frac{(n-1)(n-2)}{2}t^2dd\varphi\right)=-n\left(F\varphi+(n-1)P^{1,}td\varphi\right.$$

$$+\frac{(n-1)(n-2)}{2}P^{1,}t^2dd\varphi$$

$$+(n-1)^2P^{2,}t^2d\varphi+\ldots\ldots+(n-1)^{n-1}P^{(n-1),}t^{n-1}d\varphi^{n-1}$$

$$+\frac{2(n-1)^2(n-2)}{2}P^{2,}t^3d\varphi dd\varphi+\ldots+(n-1)\frac{(n-1)^{n-1}(n-2)}{2}P^{(n-1),}t^{n}d\varphi^{n-2}dd\varphi$$

$$+\frac{(n-1)^2(n-2)^2}{2^2}P^{2,}t^4dd\varphi^2+\ldots+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\frac{(n-1)^{n-1}(n-2)^2}{2^2}P^{(n-1),}t^{n+1}d\varphi^{n-3}dd\varphi^2$$

+ &c.

$$+(n-1)^nP^{n,}t^nd\varphi^n+\&c.$$

$$+n\frac{(n-1)^n(n-2)}{2}P^{n,}t^{n+1}d\varphi^{n-1}dd\varphi+\&c.$$

$$+\frac{n(n-1)}{2}\frac{(n-1)^n(n-2)^2}{2^2}P^{n,}t^{n+1}d\varphi^{n-2}dd\varphi^2+\&c.$$

+ &c.

$$+\frac{n(n-1)}{2}F\left(\varphi+(n-2)td\varphi+\frac{(n-2)(n-3)}{2}t^2dd\varphi\right)=\frac{n(n-1)}{2}\left(F\varphi+(n-2)P^{1,}td\varphi\right.$$

$$+\frac{(n-2)(n-3)}{2}P^{1,}t^2dd\varphi$$

$$+(n-2)^2P^{2,}t^2d\varphi^2+\ldots\ldots+(n-2)^{n-1}P^{(n-1),}t^{n-1}d\varphi^{n-1}$$

$$+\frac{2(n-2)^2(n-3)}{2}P^{2,}t^3d\varphi dd\varphi+\ldots+(n-1)\frac{(n-2)^{n-1}(n-3)}{2}P^{(n-1),}t^{n}d\varphi^{n-2}dd\varphi$$

$$+\frac{(n-2)^2(n-3)^2}{2^2}P^{2,}t^4dd\varphi^2+\ldots+\frac{(n-1)(n-2)}{2}\frac{(n-2)^{n-1}(n-3)^2}{2^2}P^{(n-1),}t^{n+1}d\varphi^{n-3}dd\varphi^2$$

+ &c.

$$+(n-1)^nP^{n,}t^nd\varphi^n+\&c.$$

$$+\frac{n(n-2)^n(n-3)}{2}P^{n,}t^{n-1}d\varphi^{n-1}dd\varphi+\&c.$$

$$+\frac{n(n-1)}{2}\frac{(n-2)^n(n-3)^2}{2^2}P^{n,}t^{n+2}d\varphi^{n-2}dd\varphi^2+\&c.$$

+ &c.

− &c.

fom-

ſommando em todas eſtas expreſsões os termos, que ſe correſpondem em cada columna; iſto he aquelles, que em cada columna ſe acharem ter por factor huma meſma potencia de t, teremos

$$\overset{n}{t}\,\overset{n}{d}F\varphi = AF\varphi + A^{1\prime}P^{1\prime}t\,d\varphi + A^{2\prime}P^{2\prime}t^2d\varphi^2 + \ldots + A^{n\prime}P^{n\prime}t^n d\varphi^n \qquad + \&c.$$

$$+A_1P^{1\prime}t^2dd\varphi + 2A_1^{1\prime}P^{2\prime}t^3d\varphi dd\varphi + \ldots + \frac{n}{1}A_1^{(n-1)\prime}P^{n\prime}t^{n+1}d\varphi^{n-1}dd\varphi \qquad + \&c.$$

$$+A_2P^{2\prime}t^4dd\varphi^2 + \ldots + \frac{n(n-1)}{1.2}A_2^{(n-2)\prime}t^{n+2}d\varphi^{n-2}dd\varphi^2 \qquad + \&c.$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}A_3^{(n-3)\prime}t^{n+3}d\varphi^{n-3}dd\varphi^3 \qquad + \&c.$$

$$+ \&c.$$

Mas todos os termos, em que t ſe acha elevado a huma potencia menor do que n, ſaõ nullos pelos Theoremas antecedentes; iſto he, ſaõ nullos todos os termos da primeira linha, que ſe achaõ antes de $A^{n\prime}P^{n}t^{n}d\varphi^{n}$ por ſer $A=0$, $A^{1\prime}=0 \ldots A^{(n-1)\prime}=0$. Saõ nullos todos os termos da ſegunda linha, que antecedem o termo $(n-1)A_1^{(n-2)}P^{(n-1)\prime}t^{n}d\varphi^{n-2}dd\varphi$ por ſer $A_1=0$ $A_1^{1\prime}=0 \ldots A_1^{(n-3)\prime}=0$. Semelhantemente ſaõ nullos todos os termos da terceira linha, que antecedem o termo $\frac{(n-2)(n-3)}{2}.A_2^{(n-4)\prime}P^{(n-2)\prime}t^{n}d\varphi^{n-4}dd\varphi^2$; e aſſim por diante. Ora dividindo ambos os membros d'eſta Equaçaõ por t^n, e ſuppondo depois $t=0$, todos os termos ſubſequentes aos mencionados, iſto he, todos os termos, em que t ſe acha elevado a potencias mais altas do que n, ſe aniquillaõ; e por tanto fica

$$\overset{n}{d} F\varphi = A^{n,} P^{n,} d\varphi^{n} + \frac{n-1}{1} A1^{(n-2)'} P^{(n-1),} d\varphi^{n-2} dd\varphi + \frac{(n-2)(n-3)}{1.2}$$

$$A2^{(n-4),} P^{(n-2),} d\varphi^{n-4} dd\varphi^{2} + \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3} A3^{(n-6),} P^{(n-3),} d\varphi^{n-6} dd\varphi^{3}$$

$+$ &c.

Expreſſaõ que tambem ſe pode eſcrever d'eſta ſorte

$$\overset{n}{d} F\varphi = A^{n,}\Big(P^{n,} d\varphi^{n} + \frac{(n-1)}{2.1} P^{(n-1),} d\varphi^{n-2} dd\varphi + \frac{(n-2)(n-3)}{2^{2}.1.2}$$

$$P^{(n-2),} d\varphi^{n-4} dd\varphi^{2} + \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{2^{3}.1.2.3} P^{(n-3),} d\varphi^{n-6} dd\varphi^{3} + \&c.\Big)$$

por ſer $A1^{(n-2),} = \frac{A^{n,}}{2}$; $A2^{(n-4),} = \frac{A^{n,}}{2^{2}}$; $A3^{(n-6),} = \frac{A^{n,}}{2^{3}}$; &c.;

ou tambem aſſim

$$\overset{n}{d} F\varphi = 1.2.3 \ldots (n-2)(n-1)n\Big(P^{n,} d\varphi^{n} + \frac{(n-1)}{2.1} P^{(n-1),} d\varphi^{n-2} dd\varphi$$

$$+ \frac{(n-2)(n-3)}{2^{2}.1.2} P^{(n-2),} d\varphi^{n-4} dd\varphi^{2} + \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{2^{3}.1.2.3}$$

$$P^{(n-3),} d\varphi^{n-6} dd\varphi^{3} + \&c. \Big)$$

por ſer $A^{n,} = 1.2.3 \ldots (n-2)(n-1)n$. Formula, que publiquei ſem demonſtraçaõ na minha já citada Memoria ſobre os verdadeiros Principios do Methodo das Fluxões, e que naõ ſeria facil deduzir por inducçaõ dos reſultados particulares achados pelas ſucceſſivas hypotheſes de $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ &c.

Eſcolio.

O caminho, que ſegui para achar as formulas geraes das Fluxões na ſuppoſiçaõ de $d\varphi$ conſtante, e de $dd\varphi$ conſtante, póde conduzir igualmente ao deſcobrimento de For-

Formulas ſemelhantes para o caſo de ſe ſuppor conſtante outra qualquer Fluxaõ de φ : mas os proceſſos do calculo, ſupposto que analogos, ſeraõ muito mais extenços pelo grande numero de propoſições, que ſerá preciſo primeiro demonſtrar: facil he porém de ver, que tudo ſe reduzirá a examinar em que caſo ſe torna nulla a ſomma de huma ſerie, cujos termos ſaõ produzidos pela multiplicaçaõ ſucceſſiva de cada hum dos coefficientes do binomio $(1-x)^n$ pelos termos de qualquer ſerie de potencias dos numeros naturaes, e dos numeros figurados; e qual he o valor da ſomma da dita ſerie no primeiro caſo, em que, ſegundo os ſucceſſivos valores de n, ella deixa de ſer nulla. A primeira parte d'eſta indagaçaõ admite huma ſoluçaõ facil; por quanto com pouca reflexaõ ſe vê, que conſiderando os numeros naturaes como quantidades de huma ſó dimençaõ, os numeros triangulares como quantidades de duas dimenções, os piramidaes como quantidades de tres dimenções, e aſſim ſucceſſivamente, em quanto n fôr maior que a ſomma das dimenções de cada termo da ſerie em queſtaõ, a ſomma d'eſta ſerá nulla. Tambem naõ he dificil de ver, que o primeiro caſo, em que ella deixará de ſer nulla, ſerá quando n fôr igual ao numero das dimenções dos termos da dita ſerie: achar porém qual ſeja o valor da ſomma neſſe caſo particular, he juſtamente em que reſide a dificuldade da queſtaõ, e o que ſe naõ póde determinar antecipadamente ſem o ſoccorro do Calculo. Como a ſoluçaõ d'eſta queſtaõ nos naõ offerece utilidade ſenſivel, e immediata, por iſſo nos contentamos com ter aberto a carreira para ella, de maneira que qualquer a poſſa ſeguir ſem difficuldade, huma vez que entenda ſer util adiantar mais algum paſſo neſta materia.

OBSERVAÇÕES ASTRONOMICAS.

Feitas no Real Collegio de Mafra

Por D. Joaquim da Assumpçaõ Velho.

Obſervaçaõ do Eclipſe total da Lua de 10 *de Setembro de* 1783.

O Ceo claro e limpo ao principio da noite prometia huma obſervaçaõ deſembaraçada e ſeguida ; mas hum vento brando de S.O. eſpalhou pelo Ceo algumas nevoas altas, e nuvens eſpeſſas, que embaraçáraõ principalmente no meio , e fim da obſervaçaõ , o fazella completamente. A pendula eſtava perfeitamente regulada pelo tempo medio , verificada por muitas obſervações anteriores , e ultimamente rectificada por huma boa Merediana no meſmo dia da obſervaçaõ , e no ſeguinte. O Sñr. Jeronymo Allen , Miſſionario Inglez do Collegio de S. Pedro , e S. Paulo de Lisboa , bem conhecido pelas ſuas luzes nas Sciencias Fyſicas , e Mathematicas , veio de propoſito ao meu Gabinete para ter parte na obſervaçaõ : e o Illuſtriſſimo Sñr. D. Domingos Joſé Xavier de Lima Telles , Cavalheiro da Ordem de Malta , e Tenente da Armada Real , ſe dignou ajudarnos com hum zelo bem diſtincto , e proprio da ſua applicaçaõ a ſemelhantes obſervações. O Sñr. Allen , e eu obſervamos ſeparadamente por dous Oculos Achromaticos de M. Dollond. , o do Sñr. Allen tem a lente objectiva de duas pollegadas de abertura , e tres pés e meio de foco , o meu tem a meſma lente de 2 $\frac{3}{4}$ pollegadas de abertura , e ſinco pés de foco : a noſſa obſervaçaõ ſeparada foi inteiramente concorde naquelles pontos , que ambos marcámos : e ella junta he como ſe ſegue

Tem-

Tempo da Pendula.	
9^h 2′ 3″	Principio certo da Penumbra.
9 5 7	Diſtinguia-ſe bem a Penumbra nas vizinhanças de Grimaldus, e pelo que ſe podia julgar, a direçaõ deſta Penumbra era de L E. $\frac{1}{4}$ S.E. a reſpeito do Diſco Lunar.
9 7 41	Toca a ſombra no Diſco da Lua, e principia a immerſaõ.
9 7 49	Chega a Penumbra a Grimaldus, e Ariſtarcho.
9 11 27	Principia a immerſaõ de Keplero.
9 13 0	Total immerſaõ de Ariſtarcho na Sombra.
9 13 12	Principia a immerſaõ de Heraclides.
9 14 24	Chega a Penumbra a Copernico.
9 20 31	Chega a Sombra a Copernico.
9 23 54	Total immerſaõ de Copernico na Sombra.
9 26 5	Chega a Penumbra a Tycho.
9 28 13	Entra Plataõ na Sombra.
9 29 29	Total immerſaõ de Plataõ na Sombra.
9 35 0	Chega a Sombra a Tycho.
9 37 33	Total immerſaõ de Tycho.
9 39 36	Immerſaõ total de Menelão.
9 41 20	Immerſaõ total de Plinio.
9 48 3	Pricipia a immerſaõ de Mare Nectaris.
9 54 7	Principia a immerſaõ de Mare Criſium.
9 59 28	Immerſaõ total do Mare Criſium.
10 5 54	Immerſaõ total do Diſco Lunar.

Naõ foi poſſivel obſervar o eſtado de apparencia, em que ficava a Lua em todo o tempo da ſua Immerſaõ, por cauſa de hum grande nevoeiro, e algumas nuvens eſpeſſas, que a encobríraõ inteiramente, e por eſta meſma razaõ ſe naõ pode determinar bem o principio da Emerſaõ do Diſco Lunar, e com muito trabalho, e ainda com alguma duvida he que ſe podéraõ marcar os pontos ſeguintes:

11′ 42″ 0	Principiava a Emerſaõ de Grimaldus.
11 48 30	Já Grimaldus eſtava inteiramente fóra da Sombra.
11 57 12	Total Emerſaõ de Heraclides.
12 9 28	Total Emerſaõ do Copernico.
12 46 40	Emerſaõ total do Diſco Lunar, e fim do Eclipſe.

O fim da Penumbra naõ ſe póde obſervar por cauſa dos nevoeitos, e nuvens, que ſobrevieraõ.

Obſervaçaõ do Eclipſe total da Lua no dia 3 de Janeiro de 1787.

A Noite deſta obſervaçaõ foi ſummamente favoravel: o Ceo conſervou-ſe ſempre claro e ſereno, e daria toda a occaſiaõ a hum Aſtronomo, bem provido de Inſtrumentos para muitas obſervações completas. Eu fiz eſta juntamente com hum meu Collega o Sñr. D. Diogo da Annunciaçaõ Huet, Profeſſor da Cadeira de Filoſofia Racional: o Sñr. Huet uſou de hum oculo achromatico de Dollond de 3 ½ pés de foco, augmentando o diametro dos objectos 55 vezes: o de que eu uſei he igualmente achromatico do meſmo Dollond, e augmenta 22 vezes os objectos. A differente força d'eſtes dous oculos naõ foi indifferente á obſervaçaõ; como no progreſſo da Emerſaõ a ſombra veio a ſer ſummamente eſcura, e eſpeſſa, o oculo de maior força naõ diſtinguia abſolutamente mancha alguma antes da Emerſaõ, o de menos força alcançava ſufficientemente muitas das mais notaveis. O tempo foi determinado pelas alturas correſpondentes do Sol, tomadas em muitos dias, que precedêraõ, e ſe ſeguíraõ ao da obſervaçaõ.

Tempo verdadeiro.

9^h	$3'$	$0''$	Parece á viſta ſimples que a Lua entra na Penumbra.
9	12	0	Já o Limbo oriental da Lua ſe vê muito offuſcado.
9	20	16	Parece principiar a Immerſaõ da Lua na Sombra.
9	21	13	Principio certo da Immerſaõ.
9	23	41	Grimaldus principia a entrar na Sombra.
9	24	59	Grimaldus entra inteiramente na Sombra.
9	26	54	Galileo.
9	28	19	
9	32	24	Keplero.
9	33	21	
9	33	52	Ariſtarco.
9	36	6	

9

Tempo verdadeiro.

9h	40′	18″	Copernico.
9	42	46	
9	43	50	Tycho.
9	45	27	
9	55	56	Plataõ.
9	57	1	
9	57	1	Mare ſerenitatis.
10	6	19	
10	2	38	Eudoxo.
10	3	34	
10	3	0	Ariſtoteles.
10	4	31	
10	13	58	Mare Criſium.
10	18	36	
10	21	4	Immerſaõ total da Lua.

Foi muito difficultoſo determinar o verdadeiro principio da Immerſaõ, porque ſe naõ podiaõ obſervar bem os limites entre a ſombra, e a penumbra: as primeiras manchas fôraõ ainda marcadas com alguma duvida, pela meſma razaõ. No progreſſo da Immerſaõ a ſombra veio a ſer mais bem terminada, e entaõ a Immerſaõ das manchas, e a total da Lua foi marcada mais exactamente. A ſombra era ſummamente eſcura, e eſpeſſa antes da Immerſaõ total. As manchas deſapparecêraõ quaſi inteiramente pouco tempo depois da ſua Immerſaõ.

A Lua ficou viſivel, e o ſeu diſco bem terminado em todo o tempo da total Immerſaõ, a ſua côr era de hum vermelho eſcuro, e affogueado com differentes ondas eſcuras, que ſucceſſivamente foraõ mudando de ſitio. Algum tempo antes da Emerſaõ a côr vermelha, que cobria a Lua ſe deſvaneceu taõ conſideravelmente, que todas as manchas appareciaõ muito diſtinctamente, ſobre tudo as da parte oriental da Lua, o que fazia duvidar ſe a Emerſaõ era, ou naõ já principiada: ſó depois de alguns minutos deſta duvida he que conheci os limites da ſombra, e que obſervei o principio da Emerſaõ.

Tem-

Tempo verdadeiro.			
11^h	59$'$	26$''$	Principia a Emersaõ da Lua.
12	2	42	Grimaldus inteiramenre fóra da Sombra.
22	4	12	Galileo total Emersaõ.
12	6	22	Aristarcho principia a sahir.
12	7	42	Aristarcho sahe inteiramente da Sombra.
12	11	26	Keplero inreiramente fóra da Sombra.
12	20	4	Tycho principia a Emersaõ.
12	21	22	Tycho total Emersaõ.
12	23	15	Plataõ sahe da Sombra.
12	29	20	Eudoxo principia a apparecer.
12	29	57	Eudoxo apparece de todo.
12	54	7	Mare Crisium total Emersaõ.
12	56	30	Toral Emersaõ da Lua.

Depois de principiar a Emersaõ a côr avermelhada da Lua se mudou para hum sinzento escuro , que foi augmentando gradualmente com o progresso da Emersaõ, formando-se cada vez mais negra, e espessa.

NO-

NOTICIA DAS OBSERVAÇÕES ASTRONOMICAS

Feitas em o anno de 1790

POR CUSTODIO GOMES DE VILLAS-BOAS.

ESte anno foi pouco fertil de obſervações; porque de quatro Eclipſes do Sol que houveraõ, o que ſuccede raras vezes, nenhum foi viſivel no noſſo horizonte. Houveraõ mais dois Eclipſes da Lua, que ambos fôraõ viſiveis em Lisboa, e em toda a Europa; mas naõ podemos obſervar ſe naõ o de 28 de Abril, que eſteve huma noite excellente para iſſo; porém deſcontamos depois eſta fortuna a 22 de Outubro, que era a noite do ſegundo, a qual eſteve encuberta, e carregada de nuvens, nevoa, e chuva, de ſorte que apenas ſe pôde conhecer que a Lua ſe eclipſára.

As obſervações dos Satellites de Jupiter tambem fôraõ poucas; porque nos mezes de Julho, Agoſto, Setembro, e Outubro, que ſaõ os melhores para as obſervações, andava o planeta muito perto do Sol, e naõ ſe podiaõ vêr os Satellites; nem ainda o meſmo Planeta nos mezes de Agoſto, e Setembro, em que eſteve em conjunçaõ a 4 deſte ultimo. Os outros Planetas naõ eſtavaõ em circumſtancias de nos darem que fazer, e das Eſtrellas fizemos algumas obſervações, que vamos expôr juntamente com as outras pela ordem chronologica, porque fôraõ feitas, e expoſtas em tempo verdadeiro como os mais annos. Fôraõ feitas com os meſmos inſtrumentos, e a pendula regulada da meſma maneira por alturas correſpondentes, como diſſemos no frontespicio das obſervações, que imprimimos nas Ephemerides de 1791.

Algumas obſervações de Saturno, que pertencem a eſte anno, já fôraõ publicadas nas meſmas Ephemerides, e por iſſo naõ fazemos aquí mençaõ dellas.

Observações de 1790.

EM JANEIRO.

A 5	Imm. do 2.° Satellite de Jupiter ás . .	9^h	54$'$	13$''$
25	Imm. do 1.° Satellite de Jupiter as . .	9	10	11

EM MARÇO.

A 10	Em. do 2.° Satellite de Jupiter ás . . Boa obſervaçaõ.	12	0	33
12	Em. do 1.° Satellite de Jupiter ás . .	11	50	32
14	Em. do meſmo Satellite . . ás . .	6	19	28
26	Em. de κ de 69 no limb. lum. da Lua ás. .	7	8	2

algum tanto duvidoſa; porque quando vi a Eſtrella já eſtava fóra da Lua.

A 22 as duas Immerſões do 3.° Satellite de Jupiter, que deviaõ acontecer a 15, e a 22, ambas obſervei com cuidado, e nenhuma pude vêr, de que infiro que o Satellite eſtava detraz do planeta, quando entrou na ſombra, e a de 15 ſuccedeu muito antes do tempo em que a dava o calculo; iſto he, ás 10 hor. e 30 min. com pouca differença.

EM ABRIL.

A 28 Observaçaõ do Eclipse da Lua.

Principio da Penumbra ás	9^h	16$'$	10$''$
Penumb. mais forte ás	9	31	10
Julguei ter começado o Eclipſe ás	9	33	57
Começa a Imm. de Keplero ás	9	39	18
Começa a Imm. de Mare humorum A ás . .	9	48	39
Imm. de Mare nubium B ás	9	49	1
Imm. total de Plato 17 ás	9	54	35
Inſula Sinus Medii 19 ás	10	3	25

Co-

Começa a Imm. de Tycho ás	10^h	$4'$	$26''$
Imm. total da mesma ás	10	6	19
Imm. de hum ponto branco ás	10	8	39
Imm. de Mare serenitatis P ás	10	15	43
Começa a Imm. de Mare Crisium H ás .	10	19	41
Imm. de Tarentius 47 ás	10	21	40
Imm. total de Mare Crisium ás	10	24	38
Imm. total da Lua ás	10	31	40

Logo que começou o Eclipse, começou tambem a Lua a fazer-se côr de fogo, e assim se foi espalhando esta côr até que as 11 horas se achava toda igual, mas a côr era fraca, e deixava vêr perfeitamente a Lua. A noite estava muito clara e serena, soprando huma viraçaõ do Norte. As 11^h $5'$ $11''$ eclipsou-se huma Estrella pequena na parte inferior do Limbo, que custava a vêr. As 11^h $23'$ $15''$ eclipsou-se outra igualmente pequena quasi no mesmo ponto, poucos segundos depois eclipsou-se outra terceira, ainda mais pequena, e pouco mais acima. As 11^h $59'$ $46''$ Imm. de outra Estrella, que parecia da 6.ª grandeza, pouco mais abaixo donde devia começar o Eclipse. Cinco, ou seis minutos antes disso se fez a Em. da 2.ª, que perdi por amor daquella.

Começa a Emersaõ da Lua ás	12^h	$7'$	$50''$
Em. de Helicon 12 ás	12	16	29
Em. de Copernico ás	12	20	11
Meio da Em. de Tycho 21 ás. . . .	12	28	52
Em. de Insula Sinus Medii 19 ás . . .	12	40	38
Começa a sahir Mare Crisium ás . . .	12	57	41
Acaba de sahir a mesma ás	13	1	40
Fim do Eclipse total ás	13	5	46
Ainda se vê a Penumbra ás	13	7	43
Apenas se vê a Penumbra com oculo, mas ainda he mui sensivel á vista simples ás	13	9	40

EM

EM MAIO.

A 27 Em. de β de Capricornio ás . . . 7 22 48

mas poderia acontecer mais cedo, porque quando ví a Eſtrella já eſtava fóra, e o Crepuſculo era muito forte porque era ao ſol poſto, mas naõ me parece que tinha mais de 15″ ou 20″ de erro.

EM JUNHO.

A 7 Em. do 2.° Satellite de Jupiter ás . . . 9^h $0'$ $1''$

Em 22 de Outubro naõ pude obſervar o Eclipſe da Lua, porque choveu, ſó perto das 11 horas ví que ella eſtava já quaſi eclipſada de todo.

EM DEZEMBRO.

A 4 Imm. do 1.° Satellite de Jupiter ás . . 15^h $47'$ $26''$

MEMORIAS
DOS
CORRESPONDENTES.

ENSAIO SOBRE AS BRACHYSTOCHRONAS,

E

REFLEXÕES

Sobre as Prop. 42, e 76 do II. Tomo da Mechanica de Euler.

POR FRANCISCO DE PAULA TRAVASSOS.

§. 1. DEterminar a linha, que hum movel solicitado no vacuo pela propria gravidade deve descrever no menor tempo possivel entre dous pontos naõ existentes na mesma vertical, nem horizontal, he o famoso Problema proposto por Joaõ Bernoulli nas Actas de Leipsick em 1696. Os mais célebres Geometras o achárað digno das suas meditações: delle com tudo só entaõ apparecêraõ as soluções de Leibnitz, Newton, Jacob Bernoulli, e o Marquez do Hospital, os quaes por caminhos differentes, e particulares achárað todos ser a Cycloide a linha pedida.

§. 2. Alguns annos depois por occasiaõ das indagações sobre as Isoperimetras este grande Geometra, e seu irmaõ Jacob Bernoulli estabelecêraõ algumas regras geraes para a soluçaõ dos problemas de semelhante natureza, nos quaes se trata de achar, naõ a maxima ou minima ordenada em huma curva dada, o que se consegue pelos principios ordinarios do Calculo Differencial, mas as mesmas curvas, em que certa expressaõ integral indefinida proposta seja hum Maximum, ou Minimum a respeito de todas as outras curvas possiveis.

§. 3. Estas regras assim dispersas fôraõ reduzidas a methodo por Euler na obra intitulada *Methodus inveniendi lineas curvas maximi, minimive proprietate gaudentes* &c., em

que enſina a reſolver ſemelhantes problemas com huma generalidade, a que antes delle parecia naõ poder chegar-ſe, e depois naõ haver mais que eſperar. Com tudo de la Grange nas Memorias de Turim para 1760, e 1761 offereceo hum methodo puramente analytico, moſtrando, que as formulas de Euler naõ tem a generalidade, que elle dá ás ſuas, fazendo variar ao meſmo tempo todas as ordenadas, e abſciſſas da curva em lugar de huma ſó ordenada: donde reſulta, que a curva variada pode naõ ter ponto algum commum com a curva do Maximum, ou Minimum.

§. 4. Eis-aqui o problema fundamental, e a ſoluçaõ, que delle ſe acha na Mem. citada.

Problema.

» Sendo propoſta huma formula integral indefinida re-
» preſentada por $\int Z$, em que Z deſigna huma funçaõ
» qualquer determinada das variaveis x, y, z, &c., e
» ſuas differenças dx, dy, dz, &c. d^2x, d^2y, d^2z, &c. &c.,
» achar a relaçaõ, que eſtas variaveis devem ter entre ſi,
» para que a formula $\int Z$ ſeja hum Maximum, ou Mi-
» nimum?

Soluçaõ.

» Segundo o methodo conhecido de *Maximis*, et *Mi-*
» *nimis* ſerá preciſo differenciar a propoſta $\int Z$, conſide-
» rando as quantidades x, y, z, &c. dx, dy, dz, &c. d^2x,
» &c. &c. como variaveis, e fazer a differencial, que re-
» ſulta, igual a zero. Marcando pois eſtas variações por
» δ, ſe terá a equaçaõ do Maximum, ou Minimum
» $\delta \int Z = 0$; ou, o que he equivalente, $\int \delta Z = 0$. Ora
» ſeja Z tal, que

» $$\delta Z = n\delta x + p\delta dx + q\delta d^2x + r\delta d^3x + \text{\&c.}$$

+

» $+ N\delta y + P\delta dy + Q\delta d^2 y + R\delta d^3 y + \&c.$
» $+ \upsilon\delta z + \varpi\delta dz + \chi\delta d^2 z + \rho\delta d^3 z + \&c.$
» $+ \&c.$
» virá a equaçaõ
» $\int n\delta x + \int p\delta dx + \int q\delta d^2 x + \int r\delta d^3 x + \&c.$
» $+ \int N\delta y + \int P\delta dy + \int Q\delta d^2 y + \int R\delta d^3 y + \&c.$
» $+ \int \upsilon\delta z + \int \varpi\delta dz + \int \chi\delta d^2 z + \int \rho\delta d^3 z + \&c. = 0.$

» Mas pelos principios do Methodo das variações he
» $\delta dx = d\delta x$, $\delta d^2 x = d^2 \delta x$, e assim nas mais expressões; » além disto pelo methodo das integrações por partes se » acha
» $\int p d\delta x = p\delta x - \int dp\delta x$; $\int q d^2 \delta x = q d\delta x - dq\delta x + \int d^2 q\delta x$;
» $\int r d^3 \delta x = r d^2 \delta x - dr\delta x + d^2 r\delta x - \int d^3 r\delta x$;
» e assim por diante. Logo a equaçaõ precedente se mu- » dará nesta
» $(A) \ldots \int (n - dp + d^2 q - d^3 r + \&c.)\delta x + \int (N - dP +$
» $d^2 Q - d^3 R + \&c.)\delta y + \int (\upsilon - d\varpi + d^2 \chi - d^3 \rho + \&c.)\delta z +$
» $\&c. + (p - dq + d^2 r - \&c.)\delta x + (q - dr + \&c.) d\delta x +$
» $(r - \&c.) d^2 \delta x + \&c. + (P - dQ + d^2 R - \&c.)\delta y +$
» $(Q - dR + \&c.) d\delta y + (R - \&c.) d^2 \delta y + \&c. + (\varpi - d\chi +$
» $d^2 \rho - \&c.)\delta z + (\chi - d\rho + \&c.) d\delta z + (\rho - \&c.) d^2 \delta z$
» $+ \&c. = 0$: donde se tirará primeiramente a equaçaõ
» indefinida $(B) \ldots (n - dp + d^2 q - d^3 r + \&c.)\delta x +$

» (N—

» $(N - dP + d^2 Q - d^3 R + \&c.)\, \delta y + (\nu - d\varpi + d^2 \chi - d^3 \rho + \&c.)\, \delta z$
» $+ \&c. = 0$; e depois a equaçaõ determinada (C) ....
» $(p - dq + d^2 r - \&c.)\, \delta x + (q - dr + \&c.)\, d\delta x + (r - \&c.)\, d^2 \delta x$
» $+ \&c. + (P - dQ + d^2 R - \&c.)\, \delta y + (Q - dR + \&c.)\, d\delta y$
» $+ (R - \&c.)\, d^2 \delta y + \&c. + (\varpi - d\chi + d^2 \rho - \&c.)\, \delta z$
» $+ (\chi - d\rho + \&c.)\, d\delta z + (\rho - \&c.)\, d^2 \delta z + \&c. = 0.$

» Eſta equaçaõ ſe refere ao ultimo ponto da integral » $\int Z$; mas he preciſo obſervar, que, como cada hum dos » termos, v. g. $p\delta x$, depende de huma integraçaõ par- » cial da formula $\int p d\delta x$, ſe pode ajuntar-lhe, ou dimi- » nuir-lhe huma quantidade conſtante. Ora a condiçaõ, » pela qual eſta conſtante deve determinar-ſe, he, que ella » faça deſvanecer o termo $p\delta x$ no ponto, em que prin- » cipia a integral $\int p d \delta x$: ſerá logo preciſo diminuir de » $p\delta x$ o ſeu valor neſte ponto: donde reſulta a regra ſe- » guinte. Seja o primeiro membro da equaçaõ (C) ex- » preſſo em geral por M, e ſeja o valor de M no pon- » to, em que principia a integral $\int Z$, deſignado por $'M$, » e no ponto, em que eſte integral acaba, deſignado por » M': ter-ſe-ha $M' - 'M = 0$ por expreſſaõ completa da » equaçaõ (C).

» Com tudo para ſe desfazer nas equações achadas » das differenças indeterminadas δx, δy, δz, &c. $d\delta x$, » $d\delta y$, $d\delta z$, &c. &c. ſe examinará, ſe pela natureza do » problema ha entre ellas alguma relaçaõ dada; e ten- » do-as reduzido ao menor numero poſſivel, ſe fará de- » pois o coefficiente de cada huma das que ficarem, igual » a zero.

» Se ellas ſaõ abſolutamente independentes humas das

» ou-

" outras, a equaçaõ (B) nos dará logo as seguintes:
" $n - dp + d^2q - d^3r + \&c. = 0$,
" $N - dP + d^2Q - d^3R + \&c. = 0$,
" $\nu - d\varpi + d^2\chi - d^3\rho + \&c. = 0$, "

§. 5. Tal he o problema geral, de que vou fazer applicaçaõ aos tres seguintes objectos.

I.° Indagar a aquaçaõ geral das brachystochronas, quaesquer que sejaõ as forças, que sollicitem o movel tanto no vacuo, como nos meios resistentes segundo qualquer lei.

II.° Deduzir da equaçaõ geral a falsidade das Prop. 42, e 76 do segundo Tomo da Mechanica de Euler, nas quaes este celebre Geometra estabelece por caracter das brachystochronas a igualdade entre as forças centrifuga, e normal.

III.° Substituir o verdadeiro caracter das brachystochronas tirado da sua equaçaõ.

I.

§. 6. Problema. Achar a linha brachystochrona tanto no vacuo, como nos meios resistentes em qualquer hypothese de forças, que sollicitem o movel?

Soluçaõ. Designando por x a abscissa vertical, por y, e z as duas coordenadas horizontaes, e orthogonaes, a expressaõ do tempo será $\int \frac{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{u}$, ou $\int \frac{ds}{u}$, sendo ds o elemento da curva, e u a velocidade effectiva em cada ponto. Pela comparaçaõ desta com a expressaõ geral $\int Z$ temos $Z = \frac{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{u}$, e $\delta Z = \ldots$

$$\frac{dx}{u\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}\,\delta dx + \frac{dy}{u\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}\,\delta dy + \ldots$$

$$\frac{dz}{u\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}\,\delta dz - \frac{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{u^2}\,\delta u;$$ mas pe-

los principios de Dynamica, reprefentando por T a força tangencial, he no vacuo $udu = Tds$, e conſeguintemente $u\delta u = T\delta s$; logo $\delta Z = \frac{dx}{uds}\,\delta dx + \frac{dy}{uds}\,\delta dy + \frac{dz}{uds}\,\delta dz - \frac{Tds}{u^3}\,\delta s = \frac{dx}{uds}\,\delta dx + \frac{dy}{uds}\,\delta dy + \frac{dz}{uds}\,\delta dz - \frac{Tds}{u^3}\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2}$; e fazendo $\frac{\delta y}{\delta x} = p$, $\frac{\delta z}{\delta x} = q$, ferá $\delta Z = \frac{dx}{uds}\,\delta dx + \frac{dy}{uds}\,\delta dy + \frac{dz}{uds}\,\delta dz - \ldots \frac{Tds\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{u^3}.\ \delta x$. Logo no valor geral de δZ ferá $n = -\frac{Tds\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{u^3}$, $p = \frac{dx}{uds}$, $P = \frac{dy}{uds}$, $\varpi = \frac{dz}{uds}$, e todas as mais quantidades q, r, N, Q, R, ν, X, ρ, &c. iguaes a nada.

§. 7. Ora, como o problema he achar em geral entre todas as linhas poſſiveis aquella do mais breve deſcenſo, e naõ ha por conſequencia relaçaõ alguma dada entre as differenças δx, δy, &c., mas ſaõ abſolutamente independentes humas das outras, teremos as tres equaçóes ſeguintes: (1.ª) $\frac{Tds\sqrt{1+p^2+q^2}}{u^3} + d\left(\frac{dx}{uds}\right) = 0$, (2ª) $d\left(\frac{dy}{uds}\right) = 0$, (3ª) $d\left(\frac{dz}{uds}\right) = 0$. E como eſtas tres equaçóes devem repreſentar huma curva unica, he preciſo, que ellas ſe poſſaõ reduzir a duas ſómente. Com effeito ſe acha a primeira, ſommando a (2ª) multiplicada por $\frac{2dy}{uds}$ com a (3ª) multiplicada por $\frac{2dz}{uds}$, integrando, ſubſtituindo $1 - \left(\frac{dx}{ds}\right)^2$ por $\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2$, e differenciando de novo.

§. 8.

§. 8. Integrando por tanto as duas $d\left(\frac{dy}{uds}\right) = 0$, e $d\left(\frac{dz}{uds}\right) = 0$, temos $\frac{dy}{uds} = a$, $\frac{dz}{uds} = b$; logo $\frac{dy}{dz} = \frac{a}{b}$, que he equaçaõ á linha recta, projecçaõ orthogonal da curva ſobre o plano horizontal. Donde ſe conclue, que a curva eſtá em hum plano vertical, e he por conſequencia de ſimples curvatura. Se a referirmos pois a duas coordenadas orthogonaes tomadas no ſeu meſmo plano, huma x, e outra t, que tenha a meſma origem que y, e z, ſerá $t = \sqrt{y^2+z^2} = y\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = z\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$. Logo $y = \frac{at}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $dy = \frac{adt}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $z = \frac{bt}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $dz = \frac{bdt}{\sqrt{a^2+b^2}}$, e $ds = \sqrt{dx^2+dt^2}$.

§. 9. Subſtituindo por dy o ſeu valor na equaçaõ $\frac{dy}{uds} = a$, ou o de dz na outra $\frac{dz}{uds} = b$, virá de qualquer ſorte $uds = \frac{dt}{\sqrt{a^2+b^2}} = cdt$; e $dt = \frac{udx}{\sqrt{c^2-u^2}}$.

§. 10. Se o meio he reſiſtente, e a reſiſtencia repreſentada em geral por R, em lugar de $n = -\frac{Tds\sqrt{1+p^2+q^2}}{u^3}$, que achámos na hypotheſe do vacuo, ſerá $n = -(T-R)\,ds\frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{u^3}$, ficando tudo o mais da meſma ſorte, e as tres equações, que vem neſta hypotheſe, ſe reduzem ás meſmas duas $d\left(\frac{dy}{uds}\right) = 0$, e $d\left(\frac{dz}{uds}\right) = 0$. Logo

$dt =$

$dt = \frac{udx}{\sqrt{c^2-u^2}}$ he a equaçaõ geral das brachyſtochronas, aſſim no vacuo, como nos meios reſiſtentes.

§. 11. Eſta equaçaõ he conforme com a que ſe acha no N°. 37 das obras de Joaõ Bernoulli; em que depois de moſtrar, que a brachyſtochrona naõ deve differir da curva, que hum raio de luz deſcreve, atraveſſando hum meio diaphano de denſidade continuamente variavel, ſegundo qualquer lei, acha para a curva deſcripta pelo raio de luz a dita equaçaõ: e a deduz de hum principio ſyſico, ou antes metafyſico eſtabelecido por Fermat, e demonſtrado depois por Leibnitz, e Huyghens; a ſaber, Que hum raio de luz, paſſando de hum meio menos denſo para outro mais denſo, ſe refrange de ſorte, que o caminho desde o ponto luminoſo até o illuminado ſe faça no menor tempo poſſivel: donde ſe infere, que a razaõ entre o ſeno do angulo de incidencia, e o do angulo de refracçaõ he a inverſa das denſidades, ou a directa das velocidades, com que o raio penetra os meios.

§. 12. Como o methodo precedente ſe applica da meſma ſorte, ou a curva deva ter a propriedade de Maximum, ou de Minimum, fazia-ſe preciſo hum criterio para diſtinguir eſtes dous caſos.

Eſte he, o que deu le Gendre nas Mem. da Acad. Real das Scienc. de Pariz para 1786; aonde moſtra, que ſe v he funçaõ de x, y, p, q, r, &c. ſendo $p = \frac{dy}{dx}$, $q = \frac{dp}{dx}$, &c. a quantidade $\int vdx$ ſerá hum Maximum, ou hum Minimum, ſegundo que $\frac{d^2v}{dr^2}$ for huma quantidade negativa, ou poſitiva, entendendo por r a ultima das quantidades p, q, r, &c., e ſendo $\frac{d^2v}{dr^2}$ o coefficiente de dr na differencial de $\frac{dv}{dr}$.

§. 13.

§. 13. Fazendo applicaçaõ ao prefente problema, em que $\int \frac{ds}{u} = \int \frac{dt\sqrt{1+p^2}}{u}$ (fazendo $\frac{dx}{dt} = p$) he a expreffaõ do Maximum, ou Minimum, teremos $v = \frac{\sqrt{1+p^2}}{u}$, $\frac{dv}{dp} = \frac{p}{u\sqrt{1+p^2}}$, e $\frac{d^2v}{dp^2} = \frac{1}{u(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$, quantidade pofitiva. Logo o tempo na curva achada, ou $\int \frac{dt\sqrt{1+p^2}}{u}$ he hum Minimum.

§. 14. Para fazermos alguma applicaçaõ da equaçaõ geral das brachyftochronas, fupponhamos, que o movel he follicitado no vacuo por huma força acceleratriz variavel P, que obra unicamente no fentido vertical.

Teremos nefta hypothefe $udu = Pdx$; donde $u^2 = 2\int Pdx$, e $u = \sqrt{2\int Pdx}$: o que fubftituido na equaçaõ geral $dt = \frac{udx}{\sqrt{c^2-u^2}}$ a torna em $dt = \frac{dx\sqrt{2\int Pdx}}{\sqrt{c^2-2\int Pdx}}$; da qual fe deduz facilmente $ds = \frac{cdx}{\sqrt{c^2-2\int Pdx}}$; que he a mefma, que fe acha na Prop. 41 do fegundo tomo da Mechanica de Euler.

Se o movel além da força acceleratriz vertical P fôr follicitado tambem por outra acceleratriz horizontal Q, ferá $udu = Pdx + Qdt$, e $u = \sqrt{2\int(Pdx + Qdt)}$; logo $dt = \frac{dx\sqrt{2\int(Pdx + Qdt)}}{\sqrt{c^2-2\int(Pdx+Qdt)}} = \frac{dx\sqrt{2\int Tds}}{\sqrt{c^2-2\int Tds}}$, por fer a força tangencial $T = \frac{Pdx + Qdt}{ds}$..

Se o meio fôr refiftente, e a refiftencia reprefentada

por R, ſerá $udu = (T-R)\,ds$; logo $u = \sqrt{2\int(T-R)ds}$;

e $dt = \dfrac{dx\sqrt{2\int(T-R)ds}}{\sqrt{c^2-2\int(T-R)ds}}$.

II.

§. 15. Vamos agora ver, como da equaçaõ achada ſe deduz a falſidade das Prop. 42, e 76 do ſeg. tomo da Mechanica de Euler.

Da equaçaõ $uds = cdt$, ou $\dfrac{u}{\left(\frac{dt}{ds}\right)} = c$ ſe tira pela differenciaçaõ $du\left(\dfrac{dt}{ds}\right) = ud\left(\dfrac{dt}{ds}\right)$; mas chamando r ao raio oſculador, he $d\left(\dfrac{dt}{ds}\right) = \dfrac{dx}{r}$; logo ſerá $du\left(\dfrac{dt}{ds}\right) = \dfrac{udx}{r}$; donde $\dfrac{u^2}{r} = \dfrac{ududt}{dx.ds}$. E ſendo no vacuo $udu = Tds = Pdx + Qdt$, teremos $\dfrac{u^2}{r} = (Pdx + Qdt)\dfrac{dt}{ds.dx} = P\dfrac{dt}{ds} + \dfrac{Qdt^2}{ds.dx} = P\dfrac{dt}{ds} + Q\dfrac{(ds^2 - dx^2)}{ds.dx} = Q\dfrac{ds}{dx} + \dfrac{Pdt - Qdx}{ds}$. Mas $\dfrac{u^2}{r}$ he a expreſſaõ da força centrifuga, e $\dfrac{Pdt - Qdx}{ds}$ a da força normal, que chamemos N. Logo $\dfrac{u^2}{r} = Q\dfrac{ds}{dx} + N$. Donde ſe ſegue, que *na brachyſtochrona no vacuo ſerá a força centrifuga igual á normal unicamente*, *quando* $Q = 0$; iſto he, *quando as forças acceleratrizes forem ſómente verticaes*: e por conſequencia tambem na hypotheſe da gravidade obrar por direcções parallelas; na qual, como acima diſſe, foi primeiramente reſolvido eſte problema, e achada a Cycloide.

§. 16. Nos meios reſiſtentes he $udu = (T - R)\,ds =$

Pdx

$Pdx + Qdt - Rds$. Logo a equaçaõ $\frac{u^2}{r} = \frac{udu dt}{ds.dx}$ ſe torna em $\frac{u^2}{r} = \frac{Qds}{dx} - \frac{Rdt}{dx} + N$: e por conſequencia *nos meios reſiſtentes nunca he na brachyſtochrona a força centrifuga igual á normal.*

§. 17. De tudo iſto ſe conclue, que *a força centrifuga he igual á normal na linha do mais breve deſcenſo ſomente, quando o movel no vacuo fôr ſollicitado por forças acceleratrizes unicamente verticaes variaveis, ou conſtantes*; e por conſequencia *que a Prop. 76 he ſempre falſa, e a 42 ſó naõ he falſa, quando as forças acceleratrizes fôrem unicamente verticaes.*

§. 18. Tomando pois por principio o caracter eſtabelecido por Euler, repreſentado pela equaçaõ $\frac{u^2}{r} = N$, ſó acharemos a verdadeira equaçaõ da brachyſtochronas, quando o movel fôr ſollicitado no vacuo por forças acceleratrizes ſómente verticaes.

Seja por exemplo ſollicitado ſómente pela força da gravidade conſtante: teremos neſta hypotheſe $u^2 = 2gx$, $N = g\frac{dt}{ds}$; logo $\frac{u^2}{r} = N$ ſe torna em $\frac{2gx}{r} = g\frac{dt}{ds}$, ou $\frac{2gx}{\frac{dx}{d\left(\frac{dt}{ds}\right)}} = g\frac{dt}{ds}$; donde ſe tira $\frac{dx}{2x} = \frac{d\left(\frac{dt}{ds}\right)}{\frac{dt}{ds}}$; integrando, $\frac{1}{2}\log. x = \log. \left(\frac{dt}{ds}\right) + \frac{1}{2}\log. a$; $\sqrt{x} = \frac{dt}{ds}\sqrt{a}$, $ds = \frac{dt\sqrt{a}}{\sqrt{x}}$, ou $dt = \frac{dx\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}}$, que he a equaçaõ á Cycloide, e identica com a que neſta hypotheſe ſe tira da equaçaõ geral $dt = \frac{udx}{\sqrt{c^2-u^2}}$.

Seja

Seja sollicitado o movel pela força acceleratriz vertical variavel P, e $Q=0$; será $u^2=2\int Pdx$, $N=\frac{Pdt}{ds}$:

logo $\frac{u^2}{r}=N$ será $\frac{2\int Pdx}{\frac{dx}{d\left(\frac{dt}{ds}\right)}}=P\frac{dt}{ds}$, $\frac{Pdx}{2\int Pdx}=\frac{d\left(\frac{dt}{ds}\right)}{\frac{dt}{ds}}$; e integrando, $\frac{1}{2}\log.(\int Pdx)=\log.\left(\frac{dt}{ds}\right)+\log. c$, e $\sqrt{\int Pdx}=\frac{cdt}{ds}$, ou $dt=\frac{dx\sqrt{\int Pdx}}{\sqrt{c^2-\int Pdx}}$; que he a mesma, que no §. 14 se deduzio da equaçaõ geral.

§. 19. Mas se o movel fôr sollicitado ao mesmo tempo pelas forças acceleratrizes P, e Q, naõ se poderá da equaçaõ $\frac{u^2}{r}=N$ tirar a verdadeira equaçaõ da brachystochrona.

Com effeito nesta hypothese será $u^2=2\int(Pdx+Qdt)$, e $N=\frac{Pdt-Qdx}{ds}$; logo $\frac{u^2}{r}=N$ se tornará em . . .
$\frac{2\int(Pdx+Qdt)}{\frac{dx}{d\left(\frac{dt}{ds}\right)}}=\frac{Pdt-Qdx}{ds}$, ou $2\int(Pdx+Qdt)\,d\left(\frac{dt}{ds}\right)=$
$Pdx.\frac{dt}{ds}-\frac{Qdx^2}{ds}=Pdx.\frac{dt}{ds}-\frac{Q(ds^2-dt^2)}{ds}=(Pdx+Qds)\frac{dt}{ds}-Qds$; da qual se tira $\frac{d\left(\frac{dt}{ds}\right)}{\frac{dt}{ds}}=\frac{Pdx+Qdt}{2\int(Pdx+Qdt)}-\frac{Qds^2}{2dt\int(Pdx+Qdt)}=\frac{Tds}{2\int Tds}-\frac{Qds^2}{2dt\int Tds}$; a qual só póde reduzir-se á verdadeira equaçaõ achada no §. 14, quando $\frac{Qds^2}{2dt\int Tds}=0$, ou quando $Q=0$.

§. 20.

§. 20. Ainda que a certeza, e evidencia dos principios, de que me servi, e a identidade da equaçaõ, que delles deduzi, com a que Joaõ Bernoulli derivou de principios totalmente differentes, naõ deixe lugar a duvidar das conclusões, que tirei; com tudo a authoridade de Euler he de tanto pezo, que julgo preciso mostrar o paralogismo, que ha na sua demostraçaõ.

§. 21. Na Prop. 40 chama elle v a altura devida á velocidade no ponto M, $v + du$ a devida á velocidade em m, e $v + du + ddw$ a devida á velocidade em n. Ora, sendo v a altura devida á velocidade em M, se o movel se movesse pela vertical BMG, seria $v + dv$ a altura devida á velocidade em G. Logo, estando os pontos G, m, n na mesma horizontal, temos $v + dv$, $v + du$, $v + du + ddw$ por alturas devidas ás velocidades em G, m, e n. Mas no Corol. 3.° da Prop. 40 suppõe, que sempre $du = dv$. Logo suppõe implicitamente, que sempre as velocidades saõ as mesmas em G, e m; o que com tudo só tem lugar, quando as forças acceleratrizes saõ unicamente verticaes, como elle mesmo mostra no Prop. 12, Corol. 1.°, e 2.° do II. Tom. da Mechanica.

Logo, sendo a Prop. 42 deduzida desta igualdade, he evidente, que ella só será verdadeira, quando a dita igualdade tiver lugar; isto he, no caso de serem as forças acceleratrizes unicamente verticaes: o que concorda com o que acima conclui.

Entaõ porém naõ só he $du = dv$, mas tambem $ddw = 0$; porque as velocidades nos pontos G, m, e n, e em todos os mais, que estivessem na mesma horizontal, seraõ iguaes. He isto com effeito, o que se observa na Prop. 41.

III.

§. 22. Se na equaçaõ $\frac{u^2}{r} = \frac{udu.dt}{ds.dx}$ substituirmos por udu o seu valor Tds no vacuo, e $(T-R)\,ds$ nos meios resisten-

tes,

tes, teremos no primeiro caſo $\frac{u^2}{r} = T\frac{dt}{dx}$, e no ſegundo $\frac{u^2}{r} = (T-R)\frac{dt}{dx}$. Mas $\frac{dt}{dx}$ he a tangente do angulo, que a curva, ou a ſua tangente faz em cada ponto com a vertical. Logo da equaçaõ geral das brachyſtochronas ſe deduzem as duas ſeguintes Propoſiçóes, que eſtabelecem o ſeu verdadeiro caracter.

Prop. I.ª

Nas brachyſtochronas no vacuo he a força centrifuga igual á força tangencial multiplicada pela tangente do angulo, que a curva, ou a ſua tangente faz em cada ponto com a vertical.

Prop. II.ª

Nas brachyſtochronas nos meios reſiſtentes he a força centrifuga igual á dita tangente multiplicada pela differença entre a força tangencial, e a reſiſtencia do meio.

§. 23. Se quizermos por exemplo a equaçaõ da brachyſtochrona no vacuo, quando o movel he ſollicitado por quaesquer forças acceleratrizes vertical, e horizontal, da equaçaõ $\frac{u^2}{r} = T\frac{dt}{dx}$ teremos $\frac{2\int Tds}{r} = T\frac{dt}{dx}$, ou $2\int\frac{Tds.d\left(\frac{dt}{ds}\right)}{dx} = Tds.\frac{dt}{ds.dx}$; ou $\frac{Tds}{2\int Tds} = \frac{d\left(\frac{dt}{ds}\right)}{\frac{dt}{ds}}$, e integrando $\frac{1}{2}\log.(\int Tds) = \log.\left(\frac{dt}{ds}\right) + \log.\ c$; $\sqrt{\int Tds} = c\frac{dt}{ds}$, e $dt = \frac{dx\sqrt{\int Tds}}{\sqrt{c^2-\int Tds}}$.

§. 24. Semelhantemente ſe achará a equaçaõ das brachyſtochronas nos meios reſiſtentes pelo caracter eſtabelecido na Prop. II.ª

OB-

OBSERVAÇAÕ ANATOMICA

De hum feto humano, que em consequencia de hum parto laborioso passou á bexiga urinaria.

POR MANOEL JOAQUIM DE SOUSA FERRÁS.

A Noticia dos mais raros fenomenos da natureza, sendo com prazer acolhida na Republica Litteraria, tanto pela instrucçaõ que dahi nasce, como pela satisfaçaõ que resulta para o Filosofo, que medita sobre as operações naturaes, admira os seus maravilhosos effeitos, buscando imitallos, e indaga seus desvios para remediallos, ou prevenillos, se lhe fôr possivel: he justo, que eu me apresse a publicar o seguinte facto, que a Anatomia me deu a conhecer.

Huma mulher de 25 annos de idade, robusta, e de temperamento bilioso, estando já no principio do setimo mez da sua gravidaçaõ, foi acommettida por huma violenta paixaõ, a qual durando quatro dias consecutivos, lhe causou notaveis desaranjos na economia animal, enfraquecendo principalmente as forças tonicas e digestivas, e irritando summamente o genero nervoso. Por conseguinte abortou incompletamente, quero dizer, houveraõ grandes dores no hyppogastrio, e na regiaõ lombar, acompanhadas de fortes contracções do utero, do diaphragma, e dos musculos abdominaes, romperaõ-se as tunicas, que envolviaõ o feto, evacuou-se o liquido, em que nadava, e por fim sobreveio a hemorrhagia, que precede a separaçaõ da placenta, a qual pouco depois tambem sahio.

Por tanto causou justa admiraçaõ, que o feto naõ sahisse

ſe á luz, naõ obſtante os extraordinarios esforços da mãi, e o continuo teneſmo, em conſequencia dos quaes ſentio ella huma violenta dor no ventre inferior, e depois começou a achar-ſe melhor. Desde entaõ deixáraõ as ourinas de ſahir pela urétra, e vinhaõ pela vagina miſturadas com os lóchios, o que fez ſuſpeitar com fundamento, que havia communicaçaõ da bexiga para o utero, em conſequencia de alguma rotura cauſada pelos violentos esforços da mãi. Gradualmente ſe foi augmentando depois a ſenſibilidade do abdomen pela inflammaçaõ, que ahi ſe formava; os lochios degeneráraõ em materia podre, e de cheiro cadaveroſo, a qual irritava, e roía as partes por onde paſſava. Entaõ naõ houve mais duvida ácerca de eſtar morto o feto, e com effeito as ſuas putridas exhalações, communicando-ſe á maſſa humoral por meio dos vaſos lynfaticos inhalantes, deraõ origem a huma hectica.

Ao principio de Julho de 1792 eſta infeliz mulher ſe recolheu ao Hoſpital geral deſta Cidade do Porto, iſto já ſeis mezes depois do fruſtrado aborto: queixava-ſe entaõ de continua affliçaõ, e de grande calor interno, e tambem pelas partes genitaes: o ſeu pulſo era pequeno, e ligeiro; hum tumor duro, e deſigual occupava a parte inferior do ventre, e julgava-ſe que era produzido pelos oſſos do feto reprimidos no utero pela conſtricçaõ do ſeu collo, e por iſſo ſe applicáraõ alguns relaxantes emollientes, ordenou-ſe que ella tomaria ſemicupios tepidos todos os dias, fizeraõ-ſe algumas injecções no utero, pelas quaes ſe extrahiaõ alguns oſſinhos, e preſcreveo-ſe o uſo da quina para reſtaurar as forças, e oppôr-ſe á degeneraçaõ ſeptica dos humores; mas foi logo interrompida a ſua adminiſtraçaõ, por quanto a doente dizia com razaõ, que ella lhe augmentava os calores, e ardores.

A 20 de Agoſto ſahiraõ alguns oſſos por esforços naturaes, e já entaõ as pernas começavaõ a inchar; o fluxo alvino era frequente; a doente naõ podia dormir, e tinha ſuores frios pela cabeça, e agudas dores no ventre; o pulſo

ſo eſtava apreſſado, e muito abatido. A 29 ſahiraõ mais oſſos, e entaõ me diſſe a enferma, que ſe achava muito mal, e que tinha dores por todo o corpo; no dia ſeguinte apparecêraõ todos os ſymptomas mortaes, a fyſionomia ſe fez hippocratica, extinguio-ſe a falla, a lingoa ficou ſecca, e negra, e da meſma ſorte os dentes, os olhos ſe fixáraõ tendo perdido o ſeu luſtre natural, e o pulſo juntamente com a reſpiraçaõ perdeu a regularidade.

A 31, tendo a morte finalizado tantos ſoffrimentos, abri o cadaver, e eis-aqui os fenomenos, que ſe me appreſentáraõ: logo que comecei a inciſaõ dois dedos aſſima do embigo, onde eſtava a ponta do tumor, fez-ſe huma exploſaõ de ar corrupto, e apparecêraõ as pontas de algumas coſtellas do feto já deſcarnadas, e denegridas: continuando a inciſaõ até abaixo, e ſeparando a ſynfiſe do pubis, abri todo o tumor, naõ podendo evitallo por cauſa da intima adherencia, que havia entre o ſeu involucro, e os muſculos abdominaes; e era por ventura o utero que continha os oſſos, como ſe tinha penſado? naõ certamente.. eſte ſingular fenomeno me cauſou juſta admiraçaõ, e excitou-me a proſeguir a minha indagaçaõ; era pois a bexiga urinaria, onde ſe achavaõ os reſtos do feto; com effeito deſcobri na ſua parte poſterior huma grande rotura correſpondente á vagina; entaõ ſoppus que na occaſiaõ do aborto, tendo-ſe o feto appreſentado obliquamente, fôra obrigado pelos violentos esforços da mãi a romper, e forçar a entrada para a bexiga, ou iſto foſſe logo, quando ella ſentio a forte dor, ou depois em conſequencia da ſupuraçaõ daquellas partes offendidas, e dilaceradas.

A bexiga eſtava por todos os lados adherente ás partes circunviſinhas, e o utero no eſtado natural, porém cuberto de huma groſſa membrana, a qual o unia á bexiga; os inteſtinos entortilhados eſtavaõ collados huns aos outros, tudo por conſequencia immediata da longa inflammaçaõ do abdomen, a qual coagulando o muco, que lubrificava eſtas viſceras, o tranſtornou em membranas.

Entre os oſſos do feto encontrei huma groſſa lombriga morta, e naõ deſcobrindo paſſagem por onde ella poderia ter vindo dos inteſtinos, penſei, naõ que foſſe originada da podridaõ, como dizia Ariſtoteles, mas ſim de hum ovo (pois *omne vivum ex ovo*) ahi introduzido pela rotura da vagina por meio do ar, ou tambem pelo chylo da mãi, pois em fetos recem-naſcidos ſe tem achado muitas vezes lombrigas.

Subindo aos hyppocondrios notei, que o figado eſtava muito obſtruhido ainda que com a côr natural, e que a bexiga do fel abundava de atrabiles, cuja degeneraçaõ, de que tanto fallou Hippocrates, alguns Medicos tem negado ſem razaõ; o baço pelo contrario tinha menor diametro, e maior conſiſtencia, do que em eſtado natural.

Quantos outros fenomenos ſingulares teriaõ enriquecido os noſſos annaes, e illuſtrado a Medicina, ſe acaſo entre nós naõ exiſtiſſe geralmente hum horror inſenſato contra as indagações Anatomicas. Nos paizes mais cultos da Europa já as leis franqueáraõ eſte caminho para a util inſtrucçaõ, mas naõ ſei para quando differimos arrancar eſte abuſo, moſtrondo ao público as vantagens, que dahi reſultariaõ para o bem da ſociedade, e quanto he prejudicial a ſua obſtinaçaõ.

SIN-

SINGULAR OBSERVAÇAÕ,

Que confirma a sympathia do estomago com a cabeça.

POR MANOEL JOAQUIM DE SOUSA FERRÁS.

O Author da natureza construio de hum modo taõ sabio e artificioso o corpo humano, que ficáraõ suas partes mutuamente dependendo humas das outras, e como por alliança unidas estreitamente, a fim de conspirárem para a conservaçaõ do todo; de sorte, que sendo huma dellas offendida, as mais daõ promptamente indicios claros do seu resentimento, e lhe prestaõ todo o auxilio; isto por intervençaõ do principio vital, e do systema nervoso, muscular, sanguineo, e cellular. *Consentiente una, consentiunt omnes* (†). Hippocrates nas suas admiraveis observações.

Mas esta correspondencia se mostra mais intima entre humas, que outras partes, como por exemplo, entre o estomago, e a cabeça. Desta he que pertendo fallar, visto ser o seu conhecimento mais util, e mais necessario para a praxe Medica, expondo finalmente huma curiosa observaçaõ, que a confirma, e attesta de hum modo naõ equivoco.

Esta maravilhosa fabrica do nosso Fysico, á que já os Antigos attenderaõ com particularadade, dando-lhe o nome de *consenso, ou sympathia*, merece todo o cuidado no tratamento das molestias; por quanto decide as indicações, e os meios de as satisfazer: tambem fornece ao Fysiologista objecto de observações interessantes para a explicaçaõ de alguns fenomenos, os quaes, naõ obstante a sua naturalidade, se appresentaõ com aspecto admiravel e estupendo.

De

De todas as viſceras he o eſtomago aquella, que tem com todas as partes do corpo a mais inſigne ſympatia; por quanto naõ ſó as excita, e fortalece inſtantaneamente, pela força tonica dos alimentos (como ſe obſerva logo que ſe come) e as nutre depois com a ſubſtancia alimentar, que produz a digeſtaõ; mas tambem as faz participantes dos ſentimentos de ſuas afflicções, e incommodos.

Nem iſto he muito de admirar, ſe com effeito o Creador ſupremo o conſtituio parte principal do corpo, e fonte alimentar, donde as mais houveſſem de receber quotidianamente os auxilios neceſſarios, para a reparaçaõ dos continuos eſtragos das funcções da vida; o que moveo Hippocrates a dizer, *Ventriculus dat omnibus, et ab omnibus accipit*; *marisque potestatem habet*; Van-Helmont pela meſma razaõ nelle collocou o aſſento da vida, e o maior poder do corpo.

Com tudo o ſeu commercio mais intimo, e a ſua maior influencia he ſobre a cabeça; razaõ porque ordinariamente dimanaõ delle as moleſtias da cabeça; o que deu motivo para a util diviſaõ dellas em Idiopaticas, e ſympaticas.

As obras dos mais celebres Medicos, tanto modernos como antigos, abundaõ de obſervações e factos, que provaõ a realidade deſta uniaõ; Hippocrates, Galeno, Hoffmann, Stoll, Tiſſot, e outros muitos notáraõ, frequentes vezes, que a ſaburra eſtomacal era a cauſa de agudas dores de cabeça, de Frenezía, Manía, Vertigens, Ophthalmias, Othalgias, e Odonthalgias; a Apoplexia ordinariamente provém da nimia repleçaõ do eſtomago (como vi ſucceder em França a hum amigo, e condiſcipulo), e tambem do ſeu vicio bilioſo, e pituitoſo; da ſua inaniçaõ, ou atonia reſulta ſempre a vertigem, o desfalecimento, e tambem o delirio chronico, aſſim como obſervou Vith; finalmente he conſtante, que a ſua irritabilidade natural, ou excitada por qualquer eſtimulo, produz convulções nas partes ſuperiores, a Epilepſia, o Triſmo, e outras queixas nervoſas, e por ultimo a alienaçaõ do eſpirito; diſto fôraõ teſte-

teſtemunhas Van-Swieten, Stoll, Roſen, e Harriſio; e a pratica no-lo moſtra todos os dias.

Nem eu deſcubro outra fonte, donde tragaõ origem os delirios das febres gaſtricas, os chamados feitiços, e muitos deſarranjos do cerebro, os quaes hum emetico diſſipa inſtantaneamente. Van-Helmont nos refere, que tendo certo homem comido duas oitavas de ſementes de Meimendro branco, *Hyosciamus albus*, ficára ſubitamente louco, mas que hum vomitorio logo o reſtituíra ao antigo eſtado: muitos effeitos deſte genero ſabemos terem cauſado as Daturas, a Belladona, e outras da Pentandria, como tambem o Ranunculo malvado, o Rhaphano Rhaphaniſtro, o Lólio temulento &c.

A obſervaçaõ, que vou expôr, e que he digna de occupar por hum inſtante a imaginaçaõ de qualquer obſervador da natureza, prova ſufficientemente, que hum eſtimulo fyſico reprezado no eſtomago, vellicando os ſeus numeroſos e ſenſiveis nervos, e promovendo as ſuas oſcilações, e as das tunicas muſculares, por onde ſe diſtribuem, faz com que eſtas ſe communiquem logo á cabeça; onde perturbando, e atropelando a regularidade da circulaçaõ dos eſpiritos animaes, e deſarranjando por conſeguinte as funções intellectuaes, induzem o deſvarío, e a alienaçaõ da alma; a qual ſem a perfeita harmonia do ſenſorio commum, naõ póde cogitar, nem imaginar recta e perfeitamente.

Huma mulher de 42 annos de idade, robuſta, e de bom temperamento, tendo ſido conduzida por outras, que ſe diziaõ amigas, a huma merenda fóra da Cidade, eſtas depois de a terem regalado com alguns guizados, e licôres eſpirituoſos a ponto de a embriagarem, lhe fizeraõ comer inſenſivelmente huns bolos doces, dentro dos quaes tinhaõ malicioſamente ſemeado pedaços de cabellos groſſos, e entortilhados no intento de a enfeitiçarem; voltando ella muito ſatisfeita, naõ ſentio incommodo algum nas vinte e quatro horas ſeguintes, excepto a inappetencia de comer; paſſado eſte intervallo, começou a queixar-ſe de nau-

ſea, e oppreſſaõ no eſtomago, ao que brevemente ſuccedeu a alienaçaõ do eſpirito, e demencia, com perda de todo o conhecimento, até de ſeu marido.

Neſte miſero eſtado permaneceu dois dias, ſem que nelles comeſſe, ou bebeſſe couſa alguma, nem taõ pouco ſe entregaſſe ao ſomno; hora parecendo meditar profundamente, hora alegrar-ſe muito, e por fim enchendo-ſe de furor maniaco, e querendo ſahir para fóra.

Sendo eu chamado em ſeu auxilio, depois de ter ouvido a narraçaõ de todas as precedencias, ſuſpeitando que a indigeſtaõ de algum máo alimento, que houveſſe comido na tal merenda, foſſe a cauſa primaria deſta doença, reſolvi dar-lhe immediatamente dous grãos de tartaro emetico desfeitos em agoa ſufficiente; com effeito meia hora depois de tomado eſte remedio, tive a ſatisfacçaõ de ver ſahir pelo vomito hum bolo de cabellos duros, e entortilhados, de grandeza de huma caſtanha, em cuja ſuperficie appareciaõ algumas pontas; entaõ, como por milagre, recuperou a doente o ſeu antigo juizo, e logo ſe queixou de eſtar muito moida, e muito debilitada; porém a reſpeito do como lhe tinha acontecido aquelle caſo, baſtantemente lhe admirava, e ácerca do que tinha dito, e feito, durante a alienaõ do eſpirito, me aſſegurou que nada ſabia, nem de couſa alguma ſe lembrava.

Eis-aqui como eſta mulher foi enfeitiçada, e como no Brazil os Negros enfeitiçaõ, ſervindo-ſe de meios ſemelhantes, e de alguns venenos, que unicamente atácaõ os nervos.

Segundo eſta expoſiçaõ, facilmente ſe collige a razaõ de todos eſtes fenomenos, e a ſua explicaçaõ; o que julgo ſer deſte modo: nas primeiras vinte e quatro horas, naõ ſentio eſta mulher incommodo algum notavel, por eſtarem os cabellos diſperſos, e involvidos pela maſſa dos alimentos; porém logo que eſta foi digerida, e expellida do eſtomago, ficando unicamente os cabellos, por ſerem ſummamente indigeſtos, fòraõ-ſe ajuntando, e entortilhan-

lhando huns nos outros pelas mesmas contracções do estomago nauseado; de maneira que estando formado o bolo, as pontas da sua circunferencia vellicavaõ, e offendiaõ os nervos do estomago, cuja irritaçaõ communicando-se ao cerebro, ahi causava commoções, que perturbando a ordem dos espiritos, davaõ lugar ao desarranjo das funções da alma; porém huma vez que foi lançado pelo vomito o estimulo, causa primaria de tudo, cessáraõ as oscilações, e se restabeleceu promptamente a harmonia do sensorio commum, e a antiga saude.

OB-

OBSERVAÇAÕ

De huma Thisica tuberculosa, e de huma concreçaõ calcárea, achada no utero.

POR MANOEL JOAQUIM DE SOUSA FERRÁS.

HUma mulher de 27 annos de idade, e de conſtituiçaõ delicada, queixava-ſe, ha tempos, de toſſe ſecca, alguma dyſpnêa, e calor ſobrenatural nos bofes, ao que ás vezes ſuccedia a expectoraçaõ de muco tenue, miſturado com alguns raios de ſangue vivo; a conſtipaçaõ cutanea, que tinha ordinariamente, naõ ſó por cauſa da fatal inconſtancia de temperatura, que eſte clima tem experimentado, ha alguns annos a eſta parte, mas ainda pelo ſeu natural relaxamento de póros, dirigia todas as fluxões para os bofes, como centro mais fraco, e incapaz de reacçaõ; por cujo motivo ficando elles continuadamente opprimidos pela abundancia e tenacidade das materias da perſpiraçaõ, lentamente ſe fôraõ formando tuberculos, e vomicas, donde naſceu a Thiſica pulmonar.

Conduzio muito para o rapido progreſſo deſta queixa o deſprezo, que della fazia a doente, entregando-ſe com exceſſo a bebidas eſpirituoſas, e a alimentos de má qualidade, ſem recorrer á Medicina, antes que a moleſtia ſe arraigaſſe, e ſe fizeſſe mais poderoſa que a natureza; eſta incomprehenſivel arte do Creador, ou força Divina, que por leis ſabias, e conſtantes rege o univerſo, mantendo as leis primordiaes, oppondo-ſe á deſtruiçaõ dos entes, e reproduzindo-os, por huma regular ſucceſſaõ!

Sendo eu chamado para tratalla, tive o diſſabor de fa-

fazer hum prognostico funesto, em razaõ do auge, a que vi a molestia levada, e naõ encubri a insufficiencia das minhas forças, para vencer taõ poderoso inimigo; estava pois a doente muito extenuada, mas ainda com bastantes forças; o que admirava, visto o seu fastio, e a colliquaçaõ, que se fazia pela expectoraçaõ, suores, e diarrhéa; o pulso era duro, apressado, e irregular; a tosse vehemente, e tambem a suffocaçaõ.

Isto naõ obstante, determinei pôr em pratica todos os meios, que nos prescreve a arte em casos semelhantes, para abater o calor hectico, resolver as estagnações, e tuberculos dos bofes, repellindo, e evacuando as materias, e por fim corroborando-os, e dissipando a sua irritaçaõ; entre outros remedios, usei do Lichen Islandico, da Veronica, e Polygala; planta esta, que aqui florece abundantemente, sem que ninguem a conheça (como muitas outras Medicinaes), e que, segundo tenho experimentado, merece bem os elogios de Collin, e Stoll.

Porém tudo foi baldado (como se podia crer); chegou apressadamente a morte, e a doente lhe tributou a sua devida homenagem; entaõ propuz abrilla, naõ só para que os parentes vissem o deploravel estado do peito, mas ainda para que se desenganassem a respeito da presumpçaõ, que tinhaõ de prenhez, em attençaõ a alguns indicios, que precedêraõ, e principalmente a hum tumor duro, que a doente sentia na regiaõ uterina, o qual bastantemente a incommodava; com effeito, sendo accolhida a minha proposiçaõ (ainda que com bastante repugnancia) executei-a com grande satisfacçaõ, por me ser aqui ordinariamente vedado lêr em semelhantes livros os segredos da natureza, e observar por esta via o genio das molestias, e os meios de que se servem para contaminar, e aniquilar a maquina humana; mas ah! que louco prejuizo! por ventura naõ he este o caminho, por onde temos vindo a ser uteis á humanidade, analysando as doenças no seu mesmo centro, e aprendendo como, e onde as devemos combater? naõ he

por esta manobra, que nos fazemos dignos do sagrado déposito da saude humana, instruindo-nos no conhecimento da estructura do corpo, e do jogo, e uso de todas as suas partes, para saber remediar o seu desarranjo?

Abrindo primeiramente o abdomen, divisei estar o utero fóra do diametro natural, isto he, do tamanho de huma laranja, aberto este tumor, fiquei assás maravilhado de achar a sua cavidade cheia de huma materia calcarea, de mediocre consistencia, a qual tendia a calculo; o que me fez recordar do singular caso, que se acha nas *Anecdotas de Medicina*, de huma Franceza da Cidade de Sens, a qual nove mezes depois de ter concebido, abortou incompletamente, por ficar dentro a criança, cujo tumor de dia em dia se foi endurecendo; por fim morrendo ella 24 annos depois, se lhe achou no utero hum globo de gesso, dentro do qual estava o esqueleto do feto, quasi petrificado.

Sendo o utero o emunctorio geral, para onde se dirigem todos os humores superfluos, e grosseiros, como diz o célebre Rodrigo de Castro, he natural que ahí se formem lentamente incrustações, e concreções terrosas, e lapideas, dos depositos das ditas fluxões, por via do calor natural da parte, o qual dissipa os humores mais tenues, e une os mais grossos, e feculentos; o que succede em todas as cavidades do corpo, como consta pela tradição dos Anatomicos.

Tambem conduzem para as concreções uterinas as fézes, que deixaõ os menstruos reprimidos, ou suprimidos; o que penso ter succedido á minha doente, por quanto só depois da sua falta de assistencia he que o tumor se foi manifestando no ventre inferior; Schéele, e Bergmann imagináraõ como causa d'estas concreções calculosas o predominio de certo ácido, a que chamaõ *Lithico*, o qual dissolvendo partes sólidas, e precipitando humores, fornece lhes hum sedimento terroso; bem como succede nos gotosos, e rheumaticos inveterados.

Abrindo depois o thorax, achei nelle grande extravasaçaõ

ſaçaõ de ſôro ; producto da tranſſudaçaõ das vêas pulmonaes, e vaſos lynfaticos, por cauſa do ſangue, que ahi regurgitava, e eſtagnava, e tambem da falta de reabſorpçaõ, ou inhalaçaõ. Pelos boſes eſtavaõ diſperſos muitos tuberculos de differente grandeza, e conſiſtencia ; e na parte eſquerda achei huma vômica, cujo humor era branco, e de máo cheiro ; donde colligi a razaõ por que a doente nunca ſe pôde deitar, nem inclinar ſobre aquelle lado, por motivo da grande ancia, e ſuffocaçaõ, que lhe ſobrevinha immediatamente.

He para notar-ſe, que ſem embargo d'eſtas lesões, e da toſſe violenta, que continuamente a mortificava, ella naõ ſentia dôr alguma no peito ; o que próva a inſenſibilidade dos boſes em tal circunſtancia ; a expectoraçaõ nunca foi purulenta, nem de máo cheiro ; razaõ por que nunca preſumi haver ulceraçaõ interna, mas ſim tuberculos, cuja inflammaçaõ, e ſuppuraçaõ promovem a Thiſica ; o que frequentemente ſuccede neſta Cidade.

Porto 20 de Outubro de 1794.

OB-

OBSERVATIONES ASTRONOMICAE HABITAE

AB ANDREA RODRIGUES.

CUm maior ſequentium obſervationum pars facta ſit in ſpecula Aſtronomica, ubi Eclipſium tempore tenemur adeſſe, ſciendum eſt 1.° Palatium Imperatoris, et domos Europeorum ſitum eſſe in urbe Tartarorum, in cujus angulum, qui reſpicit ortum, eſt Imperialis ſpecula in propugnaculo ad moenia, qui locus diverſus eſt a Tribunale Aſtronomico, quod in eadem Civitate Tartara non multum diſtat a Palatio: praedicta ſpecula diſtat 6″ ſecunda temporis ad ortum a Pekinenſe meridiano, qui ſecat urbem, et Palatium, ac primus a Sinis numeratur meridianus. Collegium vero Patrum Luſitanorum diſtat ad occaſum a meridiano 7″ temporis ſecunda, et a ſpecula 13″; et Reſidentia S. Joſephi P.P. etiam Luſitanorum, quæ ſita eſt fere juxta magnam Palatii januam Orientalem, diſtat fere unum ſecundum temporis ad ortum à meridiano, et ab ſpecula 5″ temporis.

Sciendum 2.° has obſervationes factas eſſe ad tempus verum, ſeu app. ad quod adaptatum, correctumque fuit horologium partim per altitudines Solis correſpondentes, partim per lineam meridianam, in iis quae factae ſunt in ſpecula interdum diſiderantur ſecunda, ea de cauſa, quia quiſque debet portare ſuum parvum horologium, in quo raro notantur ſecunda, Sinenſes enim, quamvis de calculo ſint valde ſoliciti, de obſervatione tamen parum curant; nam ſtatim poſt obſervationem monetur Imperator de obſervatione diligenter facta, et ad adamuſſim calculo correſpondente, nec aliter moneri poteſt.

Sciendum 3.° Sinenſes dividere diametrum Lunae, ac Solis in decem partes aequales, ſeu digitos, ſingulos deinde digi-

digitos partiuntur in 60 minuta, ac quodlibet minutum in 60 secunda, idcirco sequentes observationes factae sunt more Sinensi.

Anno 1753 die 16 Maii in Collegio Pekinensi observavit Pater Augustinus Alerstein Mercurium in Sole. Ingresus h. 6. 44′ mane: medium h. 10. 9′. Totalis egress. h. 1. 32′ p. merid. in medio Mercurius distabat à centro Solis ad austrum h. 24.

Anno 1755 die 12 Januarii Luna texit Aldeberam: Ingressus recta contra Galileum h. 11 6′ 14″ p. merid. egressus per Langrenum h. 12 26′ 58″ med. noctis. In residentia.

Anno 1760 die 13 Junii observavi in residentia Solis Eclipsim. Initium h. 4 26′ 0 p. merid. maximam obscurationem h. 5 57′ fin. h. 6 23′ 4″ dig. 9 42′. Dubitavit Imperator de magnitudine istius Eclipsis, vocansque coram se P. Alerstein, tunc temporis Tribunalis Praesidem, illum interrogavit quomodo ita magna fuit Eclipsis, cum in magna obscuratione, adhuc coelum erat satis clarum; et nondum satisfactus expedivit statim cursores ad Provincias *Hu Kuam*, et *Xan tum*, an revera ibi esset, sicut praenunciabatur; responsumque accepit a Proregibus, quod tempora maioris obscurationis adhuc viderentur homines tamquam arbores.

Anno 1762 die 17 Octobris observavi in residentia Init. Eclip. Solis h. 4 40′ p. merid. occidit Sol. h. 5 40′ cum dig. 5 40′.

Anno 1765 die 30 Augusti observavi in residentia tubo 6 ped. Init. Eclip. Lunae h. 9 51′ 2″ p. merid. Immers. h. 10 50′ 20″: Emers. momentum h. 12 31′ 36″ fin. h. 1 30′ 38″ p. med. noctem: dig. 19.

Anno 1766 die 25 Februarii in resid. tubo 7 ped. observavi Lunae Eclipsim Init. h. 2 18′ 42″ mane: max. obscur. h. 3 15′ 0, fin. h. 4 30′ 32″: dig. 3 34′.

Anno 1766 die 19 Aprilis in resid. Luna obtexit dimidiam partem Jovis: appulsus ad limbum Lunae h. 8 59′ 30″: Egress. totalis h. 9 8′ 55″.

Anno 1768 die 23 Decembris in reſid. obſervavi tub. 6 ped. Init. Eclip. Lunae h. 9 4′ 44″ p. merid. Immerſ. h. 10 4′ 42″ : Emmerſ. h. 11 43′ 4″ fin. h. 12 41′ 58″. dig. 18 44′.

Anno 1770 in reſid. obſervavi init. Eclip. Solis die 25 Maii h. 7 31′ 16″ mane : fin. h. 9 20′ 26″ dig. 4 8′

Anno 1771 die 23 Octobris in reſid. tub. 5 ped. obſervavi Init. Eclip. Lunæ h. 11 20′ 20″ p. merid. : finem. h. 1 37′ 50″ : dig. 4 10′.

Anno 1772 die 29 Januarii Luna obtexit Scorpionis ſtelam υ. Appulſus h. 4 16′ 35″. Egreſſus h. 5 33′.

Anno 1772 die 11 Octobris obſervavi in reſid. Init. Eclip. Lunæ h. 11 13′ 42″ p. merid. Immerſ. h. 12 22′ 10″ Emmerſ. h. 2 2′ 25″ : fin. h. 3 13′ 30″ , dig. 16 40′.

Anno 1773 die 23 Martii in reſid. tubo 6 ped. Init. Eclip. Solis h. 1. 0′ 12″ max. obſcurat. h. 2. 20′ 10″ : fin. h. 3 37′ 20″ dig. 4 : nimis aberravit haec Eclip. a calculo Tribunalis.

Anno 1773 die 26 Decembris Luna obtexit Aldeberam h. 4 54′ p. merid. Egreſ. h. 5. 34′ 0″.

Anno 1774 die 6 Setembris obſervavi in reſid. tubo 6 ped. Init. Eclip. Solis h. 7. 15′ 30″ mane : max. obſcurat. h. 8 13′ 2″ : fin. h. 9 19′ 15″ dig. 3 50′.

Anno 1775 in ſpecula Aſtronomica die 15 Januarii tubo 5 ped. obſervavi Init. Eclip. Lunae recta contra Harpalum, h. 9 19′ 30″ : ſum. obſcur. h. 10 40′ 30″ : fin. 12 6′ 8″ p. m.

Anno 1775 die 26 Auguſti in ſpecula tubo 6 ped. cum dimidio obſervavi Init. Eclip. Solis h. 11 23′ 56″ ; Coelum erat aliquantulum nebuloſum Solis tamen diſtingui potuit, max. obſcur. in camera obſcura h. 12 54′ 58″ : fin. h. 2 46′ 56″ : dig. 4 48′.

Anno 1775 die 6 Decembris Luna texit Aldeberam. Ingreſ. inter Grimaldum, et Ariſtarcum h. 5 34′ 30″ : egreſ. juxta Mare criſium h. 6 31′ 38″ : in reſid.

An-

Anno 1776 die 21 Januar. praenuntiabat. Solis Eclip. Init. ex calculo h. 9. 36 mane: med. h. 10 20′ : fin. h. 11 6 : dig. 1 47′ : at propter tempus nebulosum observari non licuit.

Anno 1776 die 4 Febr. in specula tubo 6 ped. Init. Eclip. Lunae h. 8 4′ 30″ p. merid. Luna recta contra Gazendum. Immers. h. 9 5′. Emers. h. 10 53′ : fin. h. 11 57′ 50″ : dig. 18. Citius incepit, quam calculus praedicebat.

Anno 1777 die 23 Januarii in specula. Init. Eclip. Lunae h. 10 38′ 30″ max. obscurat. h. 12 4 : fin. h. 1 23′ 30″ : p. med. noct. dig. 5 38′.

Anno 1777 die 20 Julii in specula tub. 5 ped. Init. Eclip. Lunae h. 7 56′ 30″ : med. h. 8 32′ ; fin. h. 9 7′ 30″ : dig. 0 57′ quia non perveniebat ad dig. unum de more ; non fuit monitus Imperator de observatione.

Anno 1779 die 24 Novembris in specula tubo 6 ped. cum dimid. Init. Eclip. Lunae h. 1 57′ mane, Immers. h. 2 56′. Emers. h. 4 36′, fin. h. 5 35′ : toto Eclipsis tempore Luna fuit conspicua, post totalem Immers. apparebat fusca ; ac sanguinolenta, dig. 17 30′.

Anno 1780 die 18 Maii in ortu Lunae h. 7 10′ p. merid. praedicebat. Eclipsis Lunae, dig. 9 7′ post max. obscurationem, sed vapores ita crassi ut Lunae faciem omnino impedirent : apparuit tandem eclipsata Luna h. 7 30′ ; ac pars maior eclipsata ita obtenebrata apparebat, ut nihil albedinis, aut rubedinis inspiceret, eodem modo usque ad finem, quem in specula tubo 6 ped. observavi h. 8 30′ p. merid.

Anno 1782 die 21 Setemb. in specula Init. Eclipsis Lunae h. 9 5′ 30″ p. merid. : sum. obscur. h. 10 12′ : fin. 11 12′ : dig. 3 16′ : Eandem observavit in residentia P. Joannes de Seixas. Init. h. 9 6′ 30″ : fin. h. 11 12′ 29″.

Anno 1783 die 19 Martii in specula Init. Eclip. Lunae h. 3 18′ 30″ mane. Immers. h. 4 18′ : Luna occidit h. 6 2′ ante Emersionem. Acceleravit aliquantulum a calculo Tribunalis.

An-

Anno 1784 die 16 Augusti expectabatur hic Eclipsis Solis Init. h. 5 32′ mane; summam h. 6 14′ : fin. h. 6 59′ : dig. 1 5′ ; at coelum fuit ita nebulosum ut nihil observari potuerit; imo post h. 8. incaepit pluvia non parva, et ita monitus a nobis fuit Imperator.

Anno 1784 die 30 Augusti in specula tub. 6 ped. Init. Eclip. Lunae h. 9 13′ p. merid. sum. h. 10 34′ : fin. h. 11 56′ : dig. 6 40′.

Anno 1785 die 5 Augusti in specula tub. 6 ped. cum dimidio Init. Eclip. Solis h. 6 38′ ; sum. h. 7 39′ : fin. h. 8 49′ : dig. 4 17′ : adamussim cum calculo Tribunalis.

Anno 1786, 1787, ac 1788 : jam misi in Lusitaniam.

Anno 1789 d. 17 Novembris in specula tubo 6 ped. Init. Eclip. Solis h. 9 7′ 12″ : sum. h. 10 21′ : fin. h. 11 39′ 58″ mane : dig. in camera obscura 5 39′. Eandem Eclip. observavit in residentia P. Ignatius Franciscus tubo 5 ped. Init. h. 9 7′ 17″ : fin. h. 11 39′ 52″ : coelum erat clarissimum : acceleravit a calculo Tribunalis aliquot min.

Anno 1791 die 18 Aprilis. Imperatoris *Kien Lum* 56. Lunae tertiae die 16. In residentia S. Josephi Patrum Lusitanorum tubo 7 ped. cum dimidio observavi Lunae Eclipsim. Horologium correptum per lineam merid.

Init. Eclipsis	hor.	11.	3′	30″	p. m. temp. vero.
Sum. obscurat.	h.	12.	31	20	p. mer.
Finem Eclip.	h.	1.	58	20	p. med. noct.
Durat Eclip.	h.	2.	54	50	
Dig. Eclip.	7 40′				

Coelum erat satis clarum, quamvis, toto Eclipsis tempore, flaret ventus australis vehemens. Lunae pars obscurata ita nigra, ut nihil distingueretur, aut appareret usque ad finem Eclipsis.

An-

Anno 1793 die 26 Februarii, id est, Imp. *Kien Lum* anno 58 Lunae primae die 16 tubo 6 ped. in residentia S. Josephi observavi Initium Eclipsis Lunae partialis, recta fere contra Petavium ad laevam partes superioris disci Lunae h. 5 10′ 30″ : aer satis serenus usque ad h. 6 10′ temp. ver., quo tempore amplius videri non potuit propter montes occidentales in quibus Luna se abscondit cum Eclip. dig. 4 50′.

Anno Imperatoris *Kien Lum* 58. Lunae setimae die 15, id est, anno 1793 die 21 Augusti, sereno coelo, tubo 6 ped. observavi Pekini in residentia S. Josephi P.P. Lusitanorum Initium Eclipsis Lunae parrialis a parte sinistra inferioris limbi orientalis recta inter Aristotelem, ac Platonem tempore vero h. 9 15′ 4″ p. merid. : max. obscurationem h. 10 39′ 4″ : finem h. 12 3′ 3″ : dig. 7 20′ more Sinensi, sive 8 48′ more Europ.

Anno 1794 die 15 Februarii Pekini in resid. S. Josephi tubo 5 ped. observavi Lunae Eclip. incipientem a superiori Lunae limbo partis sinistrae recta fere contra Ticonem Init. h. 3. matutina 54′ 50″ tempo vero. Immersionem totalem h. 5 2′ 30″, max. obscurationem h. 5 33′ 0″ : occidit Luna h. 6 43′ cum Eclip. dig. Sinens. 11 31′ ab inferiori Lunae limbo dextrae partis. Coelo sereno.

Anno *Kien Lum* 60 Lunae primae die prima, id est, anno Christi 1795 die 21 Januarii observavi Pekini in resid. S. Josephi PP. Lusitanorum Solis Eclip. horisontalem : ortus Solis h. 7 11′: apparuit Sol sereno Coelo, cum Eclipsi dig. 7 19′ a parte inferiori sinistra Solis, post max. obscurationem, quae ex calculo praenuntiabatur h. 6. 54′, dig. 8 54′ more Sinico: fin. ejusdem Eclip. h. 8. 0′ 40″ temp. vero.

Eodem anno 60 Imper. Lunae sextae die 17, id est, 1795 die prima Augusti observavi in eadem resid. S. Josephi tubo 6 ped. initium Eclip. Lunae partialis h. 2. matutina 4′ 55″ erant tamen aliquae nubeculae circa Lunae limbum : medium Eclip. h. 3 13′ 53″ : fin. ejus h. 4 22′ 52″ temp. vero: dig. 2 16′ more Sinensi.

Accedit Observatio Eclipsis Solis die 15 Julii 1730, habita Pekini in publico ejus Regiae Observatorio, a PP. Ignatio Kegler, et Andrea Pereira Societatis Jesu.

EO die coelum a summo mane dense obnubilatum, ac postea in pluvias resolutum, copiosos imbres dejecit proxima ante Eclipsim hora; ita ut Eclipsim alii quidem observari posse pene jam desperarent, alii vero non apparituram sibi gratularentur: cum ex insperato sub ipsum Eclipsis initium sistere pluviae, simulque nubes rarescere caeperunt, ac post horae quadrantem per rariora nubila nudis oculis spectabile apparere corpus Solis, superne ex parte borea non nihil ad dexteram, seu occidentem versus Eclipsi infectum circiter sesquidigitum. Igitur purgata e vestigio area, et madore utcunque absterso, exprompsimus, quod pro observatione coram spectatoribus multis commonstranda praeparaveramus organon, ad speciem Solis scilicet per telescopium 6 pedum sinicorum excipiendam in orthogonaliter subjecta mensula, e cujus centro ad amplitudinem apparentis speciei accurate descriptus erat circulus per 10 digitos more Sinico divisus. Parati quoque habebantur in charta munda plures circuli similiter divisi, et super illum successive applicandi, in quibus praesignatae erant phases eclipticae per singulos digitos appariturae, secundum inclinationes Lunae ad lineam verticalem Solis. Interim vero dum Sol tenues nubes penitus evinceret, clareque distinctam in disco speciem redderet, aliud ad Solem dirigebatur telescopium duabus lentibus objectivis instructum, in ea inter se distantia, ut filare reticulum, in foco telescopii dispositum, pariterque per 10 digitos divisum, exacte quadraret apparenti magnitudini Solis atque per istud primo observatus fuit appulsus Lunae.

H.

H. 11 40′ a. m.		ad dig. III. id eſt Europ.	dig.		3	36′
H. 11 51	. . .	ad dig. IV.	. . . .		4	48.

Poſtea clariſſime allucente Sole per hujus ſpeciem in diſco notati fuerunt, ut ſequitur.

H. 0. 2′ p. m.	ad centrum	ſeu dig. v.	Europ.	6	0′
H. 0. 14	. . . .	ad dig. VI.	. . .	7	12
H. 0. 26½.	. . . .	ad dig. VII.	. .	8	24
H. 0. 40	. . . .	ad dig. VIII.	. .	9	36
H. 0. 51	max. Eclip.	dig. VIII¼.	. .	9	54
H. 1. 2	regreſſ.	ad dig. VIII.	. .	9	36
H. 1. 16 20″	. . . . . .	ad dig. VII.	. .	8	24
H. 1. 27 50.	. . . . . .	ad dig. VI.	. . .	7	12

Dein rurſus tenui nebula involutus Sol ſuam ſpeciem infuſcavit, teleſcopio tamen praefato clare viſibilis ad cujus reticulum obſervatus eſt

H. 1. 39′ p. m.	regreſſ.	ad dig. v.	ſeu cent.	6	0′
H. 1. 50	. . . .	ad dig. IV.	. . . .	4	48
H. 2. 0	. . . .	ad dig. III.	. . . .	3	36

Iterum emergens e nebula Sol clariſſimam exhibuit ſpeciem, ad quam porro notati ſunt

H. 2. 9′ 20″	receſſus	ad dig. II.	. . . .	2	24
H. 2. 18 20	. . . . . .	ad dig. I.	. . . .	1	12

H. 2. 27 10 finis Eclipſis, qui itidem per aliud teleſcopium excellens 14 pedum Sinicorum eodem momento eſt annotatus.

Horologium denique correxit, atque direxit Sol ipſe tum in magno ſciatherico, armillaque aequatoria Obſervatorii ſingula minuta horaria commonſtrans, tum per captas aliquot altitudines eadem momenta temporis comprobans.

Praeterea aliquot in Sole macularum occultationes, et retectiones obſervatae ſunt. Macula maior, quae erat in ipſa

ipſa perepheria dig. II. ad Nord-Oſt immerſa eſt h. 0 22′ p. m. ſequentes aliae minores ibidem inter dig. II. et I. immerſae ſunt 1.ª h. 0. 27′ 50″; 2.ª h. 0. 31′ 40″; 3.ª h. 0. 37′ 10″; 4.ª h. 0. 38′ 35″. Maculae duae inter dig. III. et IV. verſus Sud-weſt retectae ſunt una h. 1. 18′ 45″; altera h. 1. 23′ 50″, quarum immerſiones non fuerunt annotatae. Maculae 4 ad Nord-oſt retecte fuerunt 1.ª h. 2. 5′ 20″; 2.ª h. 2. 7′ 30″; 3.ª h. 2. 11′ 25″; 4.ª h. 2. 12′ 25″.

OB-

OBSERVATIO ECLIPSIS LUNARIS HABITA, die 3 Januarii anno 1787, in Collegio Romano a Josepho Calandrelli.

Telescopio achromatico pollicum 18, *micrometro objectivo achromatico instructo, diametrum apparentem amplificante vicibus* 40.

	Temp. ver.
Initium penumbrae sensibilis	10^{h}48′ 18″
Initium umbrae verae	10 50 13.

Micrometri partes exponentes Lunae Phases obcuras.	Temp. ver.	Micrometri partes exponentes Lunae Phases obscuras in egress.	Temp. ver.
1470	10^h 56′ 28″	110	13^{h}34′ 38″
1185	11 1 49	305	- 38 58
1030	- 7 12	345	- 41 11
995	- 13 42	476	- 43 46
807	- 18 42	504	- 45 46
681	- 24 6	587	- 48 13
425	- 31 15	665	- 50 13
318	- 33 50	729	- 52 40
280	- 37 53	824	- 54 22
236	- 40 28	861	- 56 11
101	- 44 40	909	- 57 59
Immersio totalis - - -	- 11 48 33	948	- 58 31
		990	14 2 14
Emersionis initium ab umbra - - - - -	- 13 27′ 44″	1110	- 4 13
		1115	- 5 40
Emersio totalis ab umbra	14 26 45	1180	- 7 27
		1256	- 9 24
Emersio totalis a penumbra - - - - - - -	14 28 43	1340	- 11 18
		1365	- 12 41
		1435	- 14 5
		1500	- 15 51
		1511	- 17 12
		1580	- 20 14
		1663	- 21 22
		1736	- 22 59

	Microm. Part.
Diameter Solaris die 3 Januarii pluries mensurata - - - - -	1752
Diameter Lunaris pluries tum ante tum post Eclipsim mensurata - - - - - - - - - -	1801

Toto observationis tempore Coelum valde sudum fuit, et tantum initio Eclipsis, levissima nubecula initium penumbrae incertum reddidit.

OBSERVAÇÕES ASTRONOMICAS

Feitas na Cidade de S. Paulo, com hum Oculo Achromatico de 3 ½ pés.

Por Francisco de Oliveira Barbosa.

Eclipses dos Satellites de Jupiter.

1788.	Dezembro.		d. 19.	I.	1.° S. I.	As	12^h	52′	0″
1789.	Fevereiro.		b. 28.	I.	3.° S. I.	As	9	34	54
		m.	b. 28.	E.	1.° S. I.	As	9	54	30
	Março.	m.	b. 16.	E.	2.° S. I.	As	11	5	30
			d. 22.	I.	4.° S. I.	As	10	43	37
		m.	b. 23.	E.	1.° S. I.	As	10	13	40
	Dezemb.	m.	b. 8.	I.	1.° S. I.	As	12	13	40
1790.	Fevereiro.		b. 1.	I.	1.° S. I.	As	8	32	13
			d. 17.	E.	1.° S. I.	As	9	5	38
	Março.	m.	b. 10.	E.	2.° S. I.	As	9	30	32
			b. 19.	E.	1.° S. I.	As	11	16	37

Noticia do Eclipse total da Lua de 28 de Abril de 1790.

Na noite do dia 28 de Abril de 1790, a mais bella, e serena que jámais ví, ou poderei vêr, observei nesta Cidade de S. Paulo da America Meridional o Eclipse total da Lua. Este Phenomeno, que era annunciado no Almanack

nack Inglez, e que devia principiar em Greenwich ás $10^{h}\ 10'\ 15''$ naõ ſuccedeu aquí antes das $7^{h}\ 3'\ 20''$, ſegundo pude avaliar com a Luneta Achromatica do Quadrante Aſtronomico de 1 pé de raio, pertencente á Collecçaõ de Inſtrumentos da 2.ª Partida, deſtinada para a Demarcaçaõ de Limites entre as Corôas de Portugal, e de Heſpanha neſta Capitanía de S. Paulo.

Neſte dia appareceu a Lua no horizonte deſta Cidade as $5^{h}\ 35'$; por cuja cauſa achava-ſe ao tempo do Phenomeno em huma mais que ſufficiente altura, para eſtar inteiramente livre dos vapôres do horizonte, quando os houveſſe: mas naõ ſei por que cauſa foi eſte dia taõ privilegiado pela natureza, que ceſſou inteiramente eſte infallivel, e conſtante Phenomeno.

Durou a nevoa neſte dia ſingular até ás dez horas da manhã, e ficou depois diſſo toda a athmosfera taõ bella, o azul celeſte taõ puro, e o horizonte taõ izento de vapôres, que ſería determinado o principio do Eclipſe, e mais circumſtancias com a meſma exactidaõ, com que ſe determinou na meſma altura, em que ſe achava a Lua, quando eſte Phenomeno ſuccedeſſe algum tempo antes. Além diſto, naõ ſe percebia vento algum; e eſtava o calor taõ temperado, que chegou o Thermometro ao Meio-dia á 74° á pezar de ſer já aquí principio de Inverno.

Tinha regulado a Pendula Aſtronomica por alturas correſpondentes com toda a exactidaõ no dia 27; fiz o meſmo no dia 28, e ainda no dia 29, para que naõ houveſſe mais outra incognita, do que o inſtante prefixo do Phenomeno, que ſe devia determinar, ſegundo o alcance do Oculo, e perſpicacidade da viſta do Obſervador. Chegou finalmente o annunciado inſtante; e á pezar da pouca commodidade, que tinha para obſervar eſte celebre, e natural Phenomeno, ſempre fiz as obſervaçóes ſeguintes.

Prin-

Principio do Eclipse total da Lua . . .	7^h	$3'$	$20''$
Imm. tot. de Grim. 1.ª	7	6	50
Imm. tot. de Gal. 2.ª	7	8	50
Imm. de Kepl. 4.ª.	7	10	50
Imm. tot.	7	13	40
Imm. Mar. Hum. A.	7	16	40
Imm. tot.	7	22	10
Imm. de Copern. 11.ª	7	18	40
Imm. tot.	7	20	50
Imm. tot. de Plato 17.ª	7	25	40
Imm. Mar. Seren. F.	7	31	30
Imm. de Tyc. 21.ª	7	34	10
Imm. tot.	7	36	40
Imm. tot. de Procl. 35.ª	7	48	50
Imm. Mar. Crif. H.	7	49	50
Imm. tot.	7	54	50
Imm. Tot. da Lua	8	1	0
Principio da Clar. ou Em.	9	37	30
Em. de Grim. tot. 1.ª	9	40	20
Em. de Arist. tot. 3.ª	9	46	30
Em. de Kepl. tot. 4.ª	9	50	30
Em. de Copern. tot. 11.ª	9	57	15
Em. de Tyc. tot. 21.ª.	10	0	40
Em. de . . . tot.	10	7	30
Em. de . . . tot.	10	21	0
Em. de Mar. Crif. H.	10	28	10
Em. tot.	10	31	50
Fim do Eclipse total	10	35	0
Fim da Penumbra.	10	37	30

Com-

Comparaçaõ das Phases observadas em S. Paulo, com as que fôraõ observadas em Lisboa no Observatorio da Academia.

Por Custodio Gomes de Villas-boas.

Principio do Eclipse em Lisboa ás	9^h	$32'$	$57''$
O mesmo em S. Paulo ás	7	3	20
Differença dos meridianos	2	29	37
Começa a Imm. de Keplero ás	9	39	18
a mesm. em S. Paulo ás	7	10	50
Differença . .	2	28	28
Começ. a Imm. de Mar. Hum. A.	9	48	39
a mesma em S. Paulo	7	16	40
Differ. . .	2	31	59
Immersaõ total de Plato 17.ª	9	54	35
a mesma em S. Paulo ás	7	25	40
Differ. . .	2	28	55
Começa a Imm. do Tych 21. ás	10	4	26
a mesma em S. Paulo	7	34	10
Differ. . .	2	30	16
Immersaõ total do Tycho ás	10	6	19
a mesma em S. Paulo	7	36	40
Differ. . .	2	29	39
Começ. a Imm. de Mar. Cris. H. ás	10	19	41
a mesma em S. Paulo ás	7	49	50
Differ. . .	2	29	51
Imm. total de Mare Crisium ás	10	24	38
a mesma em S. Paulo ás	7	54	50
Differ. . .	2	29	48
Immersaõ total da Lua ás	10	31	40
a mesma em S. Paulo ás	8	1	0
Differ. . .	2	30	40

Começa a Emerſaõ da Lua ás	12^h	$7'$	$50''$
a meſ. em S. Paulo ás	9	37	30
Differ. . .	2	30	20
Emerſaõ total do Tycho 21. ás	12	29	39
a meſma em S. Paulo ás	10	0	40
Differ. . .	2	28	59
Começa a Em. de Mar. Criſ. H.	12	57	41
a meſma em S. Paulo	10	28	10
Differ. . .	2	29	31
Emerſaõ total de Mare Criſ.	10	1	40
a meſma em S. Paulo	10	31	50
Differ. . .	2	29	50
Fim do Eclipſe total ás	13	5	46
o meſmo em S. Paulo	12	35	0
Differ. dos meridianos	2	30	41
Fim da Penumbra ás	13	7	43
a meſma em S. Paulo	10	37	30
Differ. dos meridianos	2	32	13

Temos pois, que de 29 obſervações feitas em S. Paulo ſe achaõ 15 correſpondentes ás minhas, que fôraõ 27; e por tanto temos 15 reſultados, comprehendidos entre $2^h\ 28'\ 28''$, e $2^h\ 31'\ 59''$; cujo meio entre todos dá $2^h\ 29'\ 56''$; porém como as obſervações do principio e fim do Eclipſe, e do principio e fim da obſcuraçaõ total, ſaõ mais certas, tomando hum meio entre os 4 reſultados, que ellas daõ, temos $2^h\ 30'\ 21''$ pela differença dos meridianos daquí a S. Paulo.

Já em outro tempo determinamos a meſma longitude por 8 obſervações do 1.º Satellite de Jupiter, feitas, e mandadas pelo noſſo Socio Bento Sanches d'Horta, as quaes deraõ $2^h\ 30'\ 17''$, cujo reſultado naõ differe ſe naõ $4''$ deſte ultimo, e por conſeguinte o meio entre ambos he $2^h\ 30'\ 19''$. Aſſim a longitude de S. Paulo eſtá determinada com baſtante certeza. Contada do 1.º Meridiano vem a ſer $331°\ 26'\ 15''$, e referida ao de Paris, $49°\ 3'\ 45''$.

FIM.

IN-

INDICE

Das Memorias, que contém efte Segundo Tomo.

DEMONSTRAÇAÕ *do Theorema de Newton fobre a relaçaõ, que tem os coefficientes de qualquer equaçaõ algebrica com as fommas das potencias das fuas raizes, e applicaçaõ do mefmo Theorema ao defenvolvimento em ferie dos productos compoftos de infinitos factores*, por Francifco de Borja Garçaõ Stockler - - - - - - - - pag. 1.

Memoria *fobre huma efpecie de petrificaçaõ animal*, pelo P. Joaõ de Loureiro - - - - - - - - - - - - - - 47.

Exame Phifico, e Hiftorico *fe ha, ou tem havido no Mundo diverfas efpecies de homens*, pelo mefmo. - - - 56.

Defcripçaõ Botanica *das Cúbebas Medicinaes*, pelo mefmo. 82.

Confideraçaõ Phifica, e Botanica *da planta Aerides, que nafce, e fe alimenta no Ar*, pelo mefmo. - - - 88.

Memoria, *em que fe dá noticia de diverfas efpecies de abelhas, que daõ mel, proprias do Brasil, e defconhecidas na Europa*, por Vicente Coelho de Seabra. - - - - - - - 99.

Obfervações Meteorologicas *feitas no Real Collegio de Mafra no anno de* 1785, por D. Joaquim da Affumpçaõ Velho. - - - - - - - - - - - - - - - - - 105.

Obfervações Meteorologicas *feitas no Real Collegio de Mafra no anno de* 1786, pelo mefmo. - - - - - - - 132.

Memoria *fobre os inftrumentos de Reflexaõ*, por Jofé Maria Dantas Pereira. - - - - - - - - - - - - - 159.

Reflexões *fobre certas fommações fucceffivas dos termos das feries arithmeticas, applicadas ás foluções de diverfas queftões algebricas*, pelo mefmo. - - - - - - - - 168.

Defcripçaõ *de hum Monftro de efpecie Humana, exiftente na Cidade de S. Paulo na America Meridional*, por Bento Sanches Dorta. - - - - - - - - - - - - - - - 187.

Obfervações Aftronomicas *feitas na Cidade de S. Paulo na America Meridional*, pelo mefmo. - - - - - 190.

Me-

Memoria *sobre as Equações de Condiçaõ das Funcções Fluxionaes*, por Francisco de Borja Garçaõ Stockler. - - - - 196.

Descripçaõ *de hum Feto humano monstruoso, nascido em Coimbra no dia 28 de Novembro de 1791*, por Francisco Tavares. - - - - - - - - - - - - - - - - - 296.

Loxodromia da Vida Humana, ou Memoria *em que se mostra, qual seja a carreira da nossa especie pelos espaços da nossa presente existencia*, por José Joaquim Soares de Barros. - - - - - - - - - - - - - - - 306.

Memoria *sobre o Restabelecimento da quinta Ordem de Marcha, alterada por haver alargado o vento*, por Manoel do Espirito Santo Limpo. - - - - - - - - - - 322.

Observações Astronomicas, e Meteorologicas *feitas na Cidade do Rio de Janeiro no anno de* 1784, por Bento Sanches Dorta. - - - - - - - - - - - - - - 347.

Observações Astronomicas, e Meteorologicas *feitas na Cidade do Rio de Janeiro no anno de* 1785, pelo mesmo. 369.

Determinaçaõ *das Orbitas dos Cometas*, por José Monteiro da Rocha. - - - - - - - - - - - - - - 402.

Memoria *sobre algumas propriedades dos Coefficientes dos termos do Binomio Newtoniano*, por Francisco de Borja Garçaõ Stockler. - - - - - - - - - - - - - - 480.

Observações Astronomicas *feitas no Real Collegio de Mafra*, por D. Joaquim da Assumpçaõ Velho. - - - - 512.

Noticia das Observações Astronomicas *feitas em o anno de* 1790, por Custodio Gomes de Villas-Boas - - 517.

Memorias dos Correspondentes.

Ensaio sobre as Brachystochronas, e Reflexões *sobre as Prop.* 42, *e* 76 *do II. Tomo da Mechanica de Euler*, por Francisco de Paula Travassos. - - - - - - - - - 3.

Observaçaõ Anatomica *de hum feto humano, que em consequencia de hum parto laborioso passou á bexiga urinaria*, por Manoel Joaquim de Sousa Ferrás - - - - 17.

Singular Observaçaõ *que confirma a sympathia do estomago com a cabeça*, pelo mesmo. - - - - - - - - 21.

Ob-

Obſervaçaõ *de huma Thiſica tuberculoſa*, *e de huma concreçaõ calcárea*, *achada no utero*, pelo meſmo. - - 26.
Obſervationes Aſtronomicae Habitae, ab Andrea Rodrigues. - - - - - - - - - - - - - - - - - - - 30.
Obſervatio Eclipſis Lunaris habita, die 3 Januarii anno 1787, in Collegio Romano, a Joſepho Calandrelli. - - 39.
Obſervaçóes Aſtronomicas *feitas na Cidade de S. Paulo*, *com hum Oculo Achromatico de* 3 ½ *pés*, por Franciſco de Oliveira Barboſa. - - - - - - - - - - - - - - 40.
Comparaçaõ das Phaſes obſervadas em S. Paulo, *com as que fôraõ obſervadas em Lisboa no Obſervatorio da Academia*, por Cuſtodio Gomes de Villas-Boas. - - - - 43.

CATALOGO

Das Obras já impressas, e mandadas compôr pela Academia Real das Sciencias de Lisboa: com os preços, por que cada huma d'ellas se vende brochada.

I. BREVES Instrucções aos Correspondentes da Academia sobre as remessas dos productos naturaes para formar hum Museo Nacional, *folheto* 8.° - - - - - - - - - - 120

II. Memorias sobre o modo de aperfeiçoar a Manufactura do Azeite em Portugal remettidas á Academia, por Joaõ Antonio Dalla-Bella, Socio da mesma, 1. vol. 4.° - - - - - - 480

III. Memorias sobre a Cultura das Oliveiras em Portugal remettidas á Academia pelo mesmo Author, 1. vol. 4.° - - - - 480

IV. Memorias de Agricultura premiadas pela Academia, 2. vol 8.° 960

V. Paschalis Josephi Mellii Freitii Historia Juris Civilis Lusitani Liber singularis, 1. vol. 4.° - - - - - - - - - - - - - - - 640

VI. Ejusdem Institutiones Juris Civilis, et Criminalis Lusitani, 5. vol. 4.° - 2400

VII. Olmîa, Tragedia coroada pela Academia. *folh.* 4.° - - - 240

VIII. Vida do Infante D. Duarte, por André de Rezende, *folh.* 4.° 160

IX. Vestigios da Lingoa Arabica em Portugal, ou Lexicon Etymologico das palavras, e nomes Portuguezes, que tem origem Arabica, composto por ordem da Academia, por Fr. Joaõ de Sousa, 1. vol. 4.° - - - - - - - - - - - - - - - - - - 480

X. Dominici Vandelli Viridarium Grysley Lusitanicum Linnæanis nominibus illustratum, 1. vol 8.° - - - - - - - - - - - 200

XI. Ephemerides Nauticas, ou Diario Astronomico para o anno de 1789, calculado para o meridiano de Lisboa, e publicado por ordem da Academia, 1. vol. 4.°. - - - - - - - - - - - - 360

O mesmo para os annos seguintes até 1798. inclusivamente.

XII. Memorias Economicas da Academia Real das Sciencias de Lisboa, para o adiantamento da Agricultura, das Artes, e da Industria em Portugal, e suas Conquistas, 3. vol. 4.° - - - 2400

XIII. Collecçaõ de Livros ineditos de Historia Portugueza, dos Reinados dos Senhores Reys D. Joaõ I., D. Duarte, D. Affonso V., e D. Joaõ II., 3. vol. *folh.* - - - - - - - - - - 5400

XIV. Avisos interessantes sobre as mortes apparentes, mandados recopilar por ordem da Academia, *folh.* 8.° - - - - - - - - *gr.*

XV. Tratado de Educaçaõ Fysica para uso da Naçaõ Portugueza, publicado por ordem da Academia Real das Sciencias, por Francisco de Mello Franco, Correspondente da mesma, 1. vol. 4.° 360

XVI. Documentos Arabicos da Historia Portugueza, copiados dos originaes da Torre do Tombo com permissaõ de S. Magestade, e vertidos em Portuguez, por ordem da Academia, pelo seu Correspondente Fr. Joaõ de Sousa, 1. vol. 4.° - - - - - - - - 480

XVII. Observações sobre as principaes causas da decadencia dos Portuguezes na Asia, escritas por Diogo de Couto em fórma de Dialogo, com o titulo de *Soldado Pratico*; publicadas por or-

dem da Academia Real das Sciencias de Lisboa, por Antonio Caetano do Amaral, Socio Effectivo da mesma, 1. tom. *in* 8.° *mai.* 480

XVIII. Flora Cochinchinensis; sistens Plantas in Regno Cochinchinæ nascentes. Quibus accedunt aliæ abservatæ in Sinensi Imperio, Africa Orientali, Indiæque locis variis, labore ac studio Joannis de Loureiro Regiæ Scientiarum Academiæ Ulyssiponensis Socii: Jussu Acad. R. Scienr. in lucem edita, 2. vol. *in* 4.° *mai.* 2400

XIX. Synopsis Chronologica de Subsidios, ainda os mais raros, para a Historia, e Estudo critico da Legislaçaõ Portugueza; mandada publicar pela Academia Real das Sciencias, e ordenada por José Anastasio de Figueiredo, Correspondente do Número da mesma Academia, 2. vol. 4.° - - - - - - - - - - - - - - - - 1800

XX. Tratado de Educaçaõ Fysica para uso da Naçaõ Portugueza, publicado por ordem da Academia Real das Sciencias, por Francisco José de Almeida, Correspondente da mesma; 1. vol. 4.° 360

XXI. Obras Poeticas de Pedro de Andrade Caminha, publicadas de ordem da Academia, 1. vol. 8.° - - - - - - - - - - 600

XXII. Advertencias sobre os abusos, e legitimo uso das Agoas Mineraes das Caldas da Rainha, publicadas de ordem da Academia Real das Sciencias, por Francisco Tavares, Socio Livre da mesma Academia, *folh.* 4.° - - - - - - - - - - - - - - - - 120

XXIII. Memorias de Litteratura Portugueza, 6. vol. 4.° - - - 4800

XXIV. Fontes Proximas do Codigo Filippino, por Joaquim José Ferreira Gordo, Correspondente da Academia, 1. vol. 4.° - 400

XXV. Diccionario da Lingoa Portugueza, 1. vol. *fol. mai.* - - - 4800

XXVI. Compendio da Theorica dos Limites, ou Introducçaõ ao Methodo das Fluxões por Francisco de Borja Garçaõ Stockler, Socio da Academia - - - - - - - - - - - - - - - - - - 240

XXVII. Ensáio Económico sobre o Comércio de Portugal, e suas Colónias, oferecído ao Principe do Brazil N. S., e publicádo de ordem da Academía Reál das Sciências pelo seu Sócio José Joaquim da Cunha de Azerêdo Coutinho. - - - - - - - - 480

XXVIII. Tratado de Agrimensura por Estevaõ Cabral, Socio da Academia, em 8.° - - - - - - - - - - - - - - - - - 240

XXIX. Analyse Chimica da Agoa das Caldas, por Guilherme Withering, em Portuguez e Inglez. *folh.* 4.° - - - - - - - - 240

XXX. Principios de Tactica Naval por Manoel do Espirito Santo Limpo, Correspondente do Número da Academia, 1. vol. 8.° - 480

XXXI. Memorias da Academia Real das Sciencias, 2. vol. *fol.* - 4000

XXXII. Memorias para a Historia da Capitania de S. Vicente, 1. vol. 4.° - 480

XXXIII. Observações Historicas e Criticas para servirem de Memorias ao systema da Diplomatica Portugueza, por Joaõ Pedro Ribeiro, Socio da Academia, Part. I. 4.° - - - - - - - - 480

XXXIV. J. H. Lambert Supplementa Tabularum Logarithmicarum, et Trigonometricarum. 1. vol. 4.° - - - - - - - - - - 960

XXXV. Obras Poeticas de Francisco Dias Gomes, 1. vol. 4.° - 800

Vendem-se em Lisboa *na loja de* Bertrand; *e em* Coimbra, *e no* Porto *tambem pelos mesmos preços.*

NATURAL HISTORY